

---

# 簡易而精確的伯努力定律實驗

林峻璋 蘇益加 張瑞文 黃福坤 賈至達\*

國立臺灣師範大學 物理系

## 壹、前言

在一般的教學實驗中，伯努力定律相關的實驗設計並不多見。也許是因為伯努力定律是與流體相關，而且要直接測量流體的流速、流體的壓力等相關物理量，都有著一定的難度，且容易造成測量上有很大的誤差，可能是相關實驗並不多見的原因！雖然描述伯努力定律（Bernoulli Principle）的公式是以理想流體為出發點，但是在適當的條件下，日常生活中隨手可得的液體也可以近似為理想的流體！本文所描述的伯努力定律實驗就是利用液體來驗證的。

近年來由於電腦科技軟硬體的發展，尤其是電腦 Universal Serial Bus（USB）介面軟硬體充分的支援下，許多簡易的偵測器，都能夠透過 USB 的介面由電腦直接擷取實驗的量測數據。使得原本是一件複雜且繁瑣的實驗量測，能夠藉由電腦的操作，有效地簡化實驗的步驟，減少人為操作可能造成的誤差，並且縮短實驗所需花費的時間。另一方面，使用電腦來輔助量測，使得單位時間內可以取得的實驗數據大幅增加，對於微小變化的分辨能力增加，著實地提高實驗的精確度。

不過我們仍然要強調一件重要的概念，教學實驗的目標絕對不是按電腦按鍵就可以達成的！在物理實驗的設計中，訓練學生自己動手進行物理基本量的測量是很重要的，也就是三個基本量，長度、質量和時間的基本量測在教學實驗的設計中是非常根本的！更重要的是：實驗的誤差就是在量測過程中發生，因此學生可以根據所使用的量具的精確度，估計出實驗誤差的數值，驗證理論的正確性。

基於上述的理念，本文所描述的實驗設計，將利用以上所述這些特點，不僅僅可以使用 USB 介面偵測器進行數據量測；也可以使用傳統的碼錶、直尺等簡單的儀器，進行伯努力定律的驗證，而且精確度也不差！上述兩種量測的方法，可以適用於不同層次的學習，同學也可以比較兩者的差異！實驗的方法是測量注入水的壓克力圓柱筒中，在其下方有小孔打開後；記錄筒中液面下降的高度與時間的關係，探討底部開孔大小與液面隨時間變化情形的關連性。另一方面，以連續方程式及伯努力方程式作為理論基礎，對實驗數據進行分析，並提出適當的模型解釋實驗的結果。

---

\* 為本文通訊作者

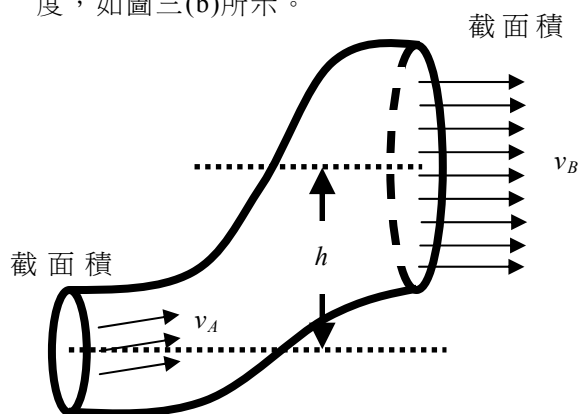
## 貳、實驗儀器製作和測量的原理

本文所描述的實驗概念，主要是根據流體動力學中主要的兩個基本方程式。第一個方程式為「連續方程式」，是描述一個不可壓縮流體的特性，如圖一所示；流進 A 截面的流量，會等於流出 B 截面的流量，即  $Av_A = Bv_B$ ，也是質量守恆的一個特例。

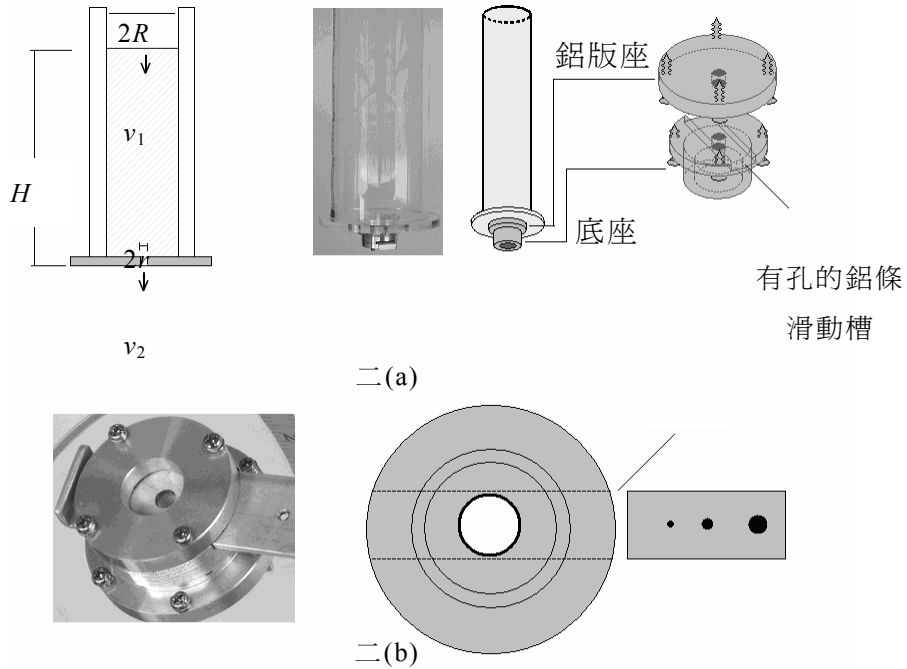
第二個方程式為「伯努力方程式」，描述一個不可壓縮的流體，在管徑不均勻的管中，流體的力學能量關係，也可以視為是力學能守恆的一個特例，即  $P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gh = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$ 。我們假設水在我們實驗的壓力範圍內，可視為不可壓縮的流體；因此以連續方程式作為基礎假設，我們可以設計一簡單實驗來驗證伯努力定律，因而製作了一個上端開口的圓柱筒，並且圓柱筒底部鑽有小圓孔。在不可壓縮的假設下，單位時間內由小圓孔流出的水量是等於筒內液面下降的體積；由液面下降的高度與時間的關係，我們就可以輕易的驗證伯努力定律。

為了探討圓柱筒內液面下降的速率與底部小圓孔半徑  $r$  的關係，我們準備了幾組不同半徑的小圓孔來進行實驗， $r$  的變化範圍約由 0.5 公釐到 4.5 公釐。實驗主要的結構是一透明的壓克力製圓柱筒，主體是由一 50 公分長、厚度約為 3 公釐的壓克力圓柱管。圓柱管的內直徑  $2R$  為 14.435 公分（即內半徑為  $R = 7.218$  公分）。圓柱管底部用直徑 20 公分而厚度為

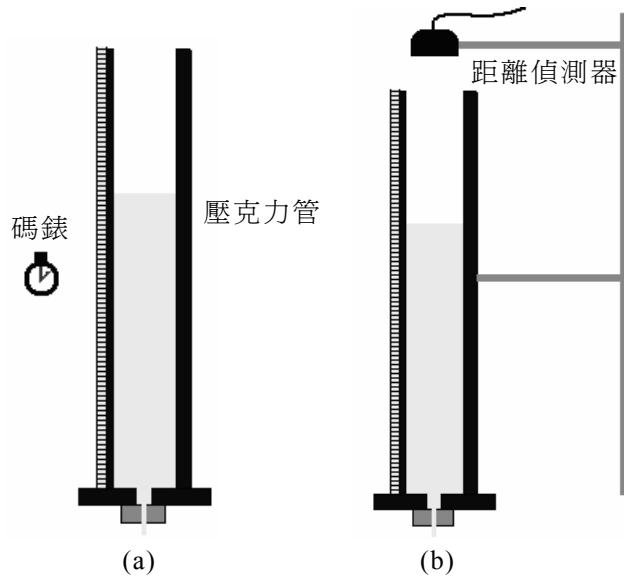
1 公分的壓克力片封住，而形成一深度約為 50 公分的圓柱筒，如圖二(a)所示。為了讓實驗能夠進行快速，我們在圓柱筒底部設計一個可以直接變換孔徑大小的裝置，也就是一個可以直接變換孔徑大小的接頭，而此實驗最大的困難點在於如何去設計一個能夠變換孔徑大小的接頭。此接頭最少要能夠承受 50 公分水柱高的壓力，且不變形、不漏水。最後經由不斷改良，最終接頭主要以鋁質加工製作最為理想，其設計如圖二(b)。此實驗裝置能滿足我們實驗需要測量的液面高度變化與底部的孔洞大小，並且可以依據我們的需要任意的改變孔洞的大小，進行不同變因的實驗。在實驗的測量上，我們採取了兩個方法；第一種方法是利用碼錶進行人為觀測的測量，因此在圓柱筒外貼上皮尺，記錄液面高度隨時間的變化，如圖三(a)所示。第二種方法是利用 USB 距離偵測器，在圓柱筒開口之上方測量不同時間時液面之高度，如圖三(b)所示。



圖一：不可壓縮流體之連續方程式示意圖。截面 A 之流速為  $v_A$ ，而截面 B 之流速為  $v_B$ ，兩者的高度差為  $h$ 。



圖二：實驗用的管柱。(a)由左而右，為整個實驗用的管柱之簡單示意圖、實驗用管柱的照片、底座結構圖。其中  $R$  為圓柱筒的內半徑（ $2R$  即表示為直徑）， $r$  為小圓孔的半徑， $H$  為筒內液面距小圓孔的高度， $v_1$  為液面下降的速度， $v_2$  為由小圓孔流出的液體流速。(b)則為底座的近照及俯視圖。



圖三：實驗裝置圖（圖(a)為方法一，圖(b)為方法二）

當半徑為  $R$  的圓柱筒中注入高度為  $H_0$  的水後，打開半徑為  $r$  小圓孔讓水由小圓孔垂直流下，液面的高度會隨著時間逐漸下降。實驗者可以利用碼錶、米尺等，或者是以 USB 介面的距離偵測器 (Motion Sensor)，記錄在  $t$  時刻時筒內液面的高度。設筒內液面下降的速率為  $v_1$ ，(即圓柱筒內液體流速)，設液體流過底部孔洞的流速為  $v_2$ ；則由連續方程式可得：

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad \pi R^2 v_1 = \pi r^2 v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (1)$$

假設液面的起始高度為  $H_0$ ，而在  $t$  時刻時，上端液面與小圓孔的垂直距離為  $H$ 。在漏水的過程中，上端液面下降的速度為  $v_1 = \frac{dH}{dt} = - \left| \frac{dH}{dt} \right|$ ；此式的負號是因為液面的高度  $H$  的變化由一起始高度  $H_0$  逐漸下降到零為止，故有負號。由小圓孔流出的液體，其速度為  $v_2 = v_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2$ ，其中  $R$  為圓筒的內徑，而  $r$  為圓筒下方漏水小圓孔的半徑。因為整個系統是置於空氣中，因此可以假設上下兩端的液體的所受的大氣壓力相同 (設為  $P_0$ )，由伯努力方程式可得：

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2)$$

將第(1)式代入第(2)式中，則可以得到第(3)式，即：

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^2 v_1 \right]^2,$$

$$v_1^2 = \frac{2gH}{\left[ \left( \frac{R}{r} \right)^4 - 1 \right]} \equiv 2aH \quad (3)$$

第(3)式中  $a$  的定義為：

$$a \equiv \frac{g}{\left[ \left( \frac{R}{r} \right)^4 - 1 \right]}, \quad (4)$$

因為  $a$  與  $H$  無關僅與  $R/r$  的比值相關，也就是當  $R$  和  $r$  幾何關係固定時  $a$  是一個定值。故第(3)式顯示：在  $t$  時刻時，液面下降速度  $v_1$  的平方和當時液面的高度  $H$  成正比。在  $t=0$  時， $|v_1|$  值為最大；

當時間逐漸增加時， $H$  逐漸變小， $|v_1|$  數值也會逐漸變小，直到為  $H$  和  $v_1$  均變為 0 為止，如圖四中的(a) $H-t$  圖、(b) $\sqrt{H}-t$  圖及(c) $v_1-t$  圖所示，最後的數值都會等於 0。這就有如物體在初始時間  $t=0$  時，其初始位置為  $H_0$ ，初速度為  $v_1(t=0) = -\sqrt{2aH_0}$ ；而在其他任意時刻  $t$  時，即圖四(c)，速度為  $v_1(t) = -\sqrt{2aH_0} + a \cdot t$ ，此公式與一般質點的等加速度運動方程式完全相同，而且由上式可以預測將水完全漏完所需的時間  $T$

為  $\sqrt{2H_0/a}$ ；預測的  $T$  數值與實驗上所量測到的  $T$  相當接近。因此第(4)式中的  $a$ ，可以視為是運動公式中的加速度；故第(4)式表示水在漏的時候，筒內液面下降是一個等加速度運動，而且是一個加速度與液面下降速度方向相反的等加速度運動，參見圖四(c)。因此使得在漏水的時候，漏水的速度隨時間的進行而遞減。我們可以經由實驗的測量，測得筒內液面高度隨時間變化的數值，因此可以得出液面下降速度隨時間變化的圖形。由速度隨時間變化的圖形中（即圖四(c)）所求得的斜率即為實驗所求得的加速度，也就是  $a_{exp}$  的數值。另一方面，我們也可以用游標尺等量測工具，精確的得知  $r$  與  $R$  的數值，因此依據公式(4)也可以推算出可能的加速度數值，即為  $a_{the}$ 。因為水會有黏滯力、非理想流體等因素，所以所求得的  $a_{exp}$  和  $a_{the}$  數值不會完全相等，但是數值應該會相近且有相關性。將實驗量測所推得的加速度  $a_{exp}$  代入第(4)式，可以推算下方小圓孔『有效的半徑』， $r_{eff}$ ，也就是：

$$r_{eff} = R^4 \sqrt{\frac{a_{exp}}{g + a_{exp}}} \quad (5)$$

利用第(5)式，所推算出有效的孔徑大小  $r_{eff}$ ，與直接用游標尺去測量半徑  $r_{real}$  的結果相比較，兩者應該會有正相關性。由於實驗過程中水壓變化範圍並不大，相信可以用成正比的相關性作為近似。

## 參、實驗結果與分析

### 一、手動測量及用距離偵測器之結果比較

我們先選取孔洞直徑（ $= 2r$ ）為 1.09 公釐、1.65 公釐、2.44 公釐的三孔，同時進行手動的測量方式和使用距離偵測器的測量方式，以便觀察兩者之間的結果是否有所異同。手動操作測量的部分，我們於圓柱筒的筒壁上貼上皮尺，注入水至特定高度（ $\sim 30$  公分），在打開圓筒下方小圓孔的同時開始計時，液面每下降 1 或 2 公分時，記錄碼錶所顯示的時間，這是傳統的量測方式，圖五中顯示所測的數據。液面的上方約 30 公分處也放置距離偵測器，利用距離偵測器測量液面下降的高度與時間的關係，數據也請參見圖五。因為兩種測量方式並不會相互干擾，故也可以同時以兩種不同的方式進行測量。圖五中顯示不同小圓孔半徑  $r$ （約由 0.55 公釐 $\sim$  1.22 公釐）所得到的實驗結果。我們可發現，手動測量和使用 USB 介面距離偵測器測量的結果大致是吻合的，即不論使用那一種測量方式，都可以得到相同的結果。然而採用人為測量時，因為在於人對液面高度觀察上的誤差，以及按碼錶時需要反應的時間，而使得測量結果上，有著高度和時間的準確度和精確度上的誤差。而使用距離偵測器測量，除了可以避免前述之人為測量所致的誤差外，而且在相同時間之內，能取得的數據之數量更是遠超過使用碼錶之測量方式，且因為距離偵測器最小可以測量到 0.1 公釐，所以得到的數

值，會比手動得到的數據精確許多。由圖五可以發現：半徑  $r$  越大液面下降的越快，也就是筒內液體會在較短的時間內流光！這與一般的日常經驗是相符；若仔細觀察圖五，可以發現  $H-t$  呈現一個二次曲線的關係。

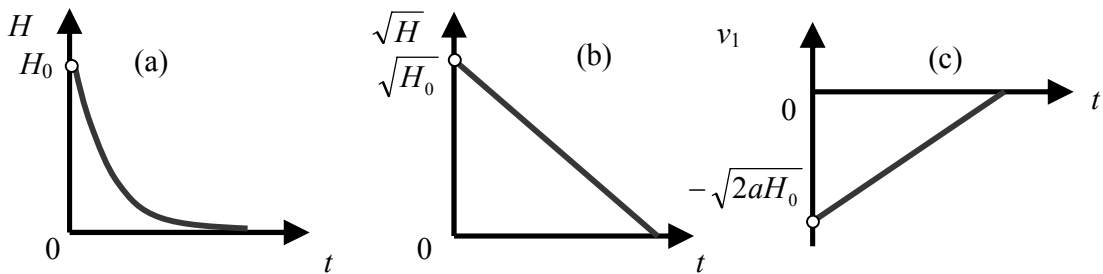
圖六是将圖五的直接量測數據轉換

成  $\sqrt{H}-t$  的圖，發現兩者呈現明顯的線性關係，也就是說  $H$  與  $t^2$  成正比，圖六中直

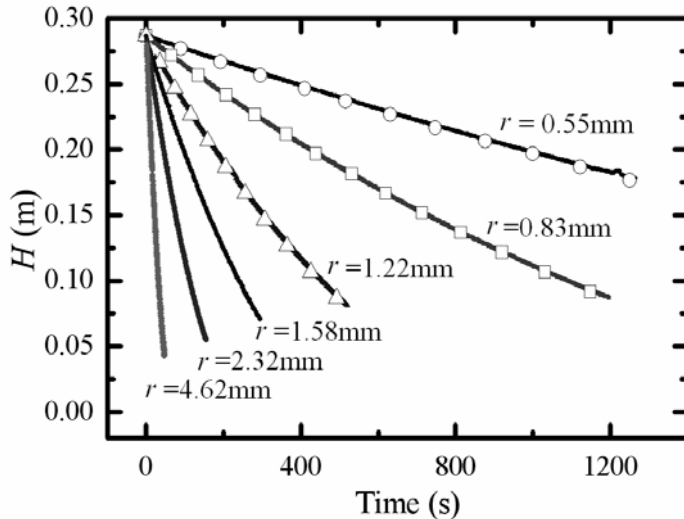
線的意義就是  $H = H_0 - \frac{1}{2}at^2$ 。因此水由

小孔完全流出所需的時間等於  $\sqrt{\frac{2H_0}{a}}$ ，與

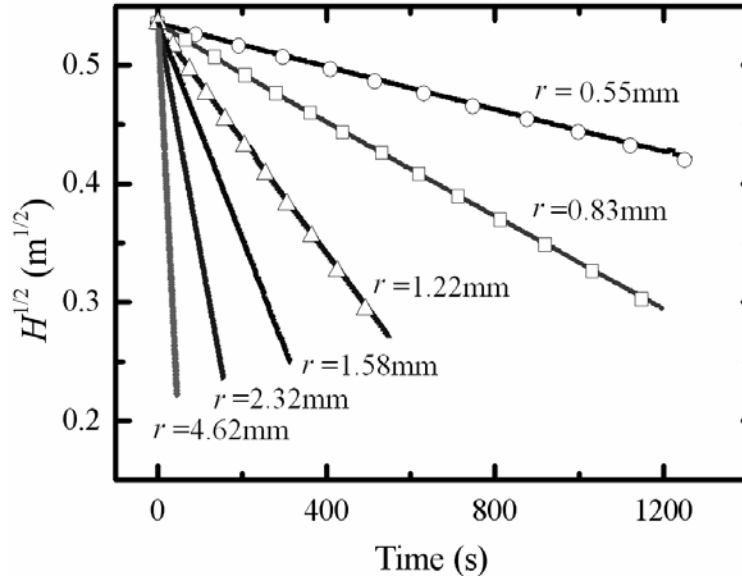
前一節的理論預測相同。



圖四：當漏水時(a)高度與時間的  $H-t$  圖、(b)由(a)數據轉換而得的  $\sqrt{H}-t$  圖和轉換成(c)水面下降速度的  $v_1-t$  圖。由此三圖中我們可以發現當漏水的時候，圓柱筒內的液面隨時間的變化情形。



圖五：手動測量和使用距離偵測器測量之結果，由右而左分別表示為  $r = 0.55\text{mm}$ 、 $r = 0.83\text{mm}$ 、 $r = 1.22\text{mm}$ 、 $r = 1.58\text{mm}$ 、 $r = 2.32\text{mm}$ 、及  $r = 4.62\text{mm}$  時的實驗結果。實心的線是用 USB 介面距離偵測器測量的結果，○、□和△所顯示的是以碼錶測量的結果。手動 (Stop Watch) 及用距離偵測器 (USB) 所測量的結果相當吻合，且  $H$  和時間  $t$  呈現一個二次曲線的關係。

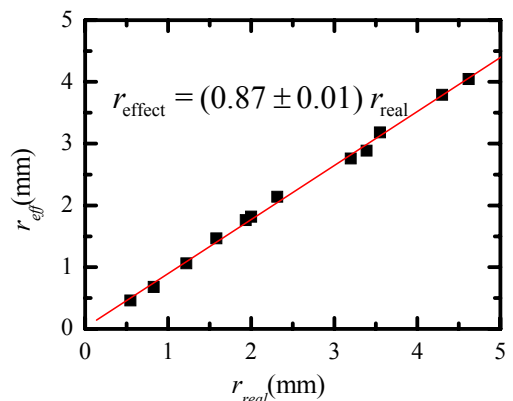


圖六：將圖五中的數據轉換成  $\sqrt{H}-t$  的圖，由右而左分別表示為  $r = 0.55\text{mm}$ 、 $r = 0.83\text{mm}$ 、 $r = 1.22\text{mm}$ 、 $r = 1.58\text{mm}$ 、 $r = 2.32\text{mm}$ 、及  $r = 4.62\text{mm}$  時的結果。實心的線是用 USB 介面距離偵測器測量的結果，○、□和△所顯示的是以碼錶測量的結果；可發現  $\sqrt{H}$  和時間  $t$  呈現明顯的線性關係。

## 二、用距離偵測器進行一系列測量

雖然手動和用距離偵測器可得到相吻合的結果，但是因為距離偵測器得到的數據量多、精確度高之特性，故我們利用距離偵測器，進行一系列的數據分析，來探討孔徑大小與流速隨時間的演化關係。經由圖五實驗數據分析的結果，發現實驗數據  $H-t$  圖所估算的孔洞半徑大小  $r_{eff}$ ，和直接使用游標尺去測量得到的小圓孔半徑大小  $r_{real}$  相比之下，並不相等，而且在我們量測結果均是： $r_{real}$  略大於  $r_{eff}$ 。如果我們把實驗所推算  $r_{eff}$  對  $r_{real}$  作圖，如圖七所示；則會發現，無論孔洞的大小為何，由實驗結果代入第(5)式中所計算得到的小圓孔半徑  $r_{eff}$  與  $r_{real}$  有線性正比關係，經數據擬合發現  $r_{eff} = 0.87 \times r_{real}$  的倍，也就是

說，水流出時所對應到的孔洞大小  $r_{eff}$ ，會稍小於實際孔洞的大小  $r_{real}$ 。  $r_{real}$  在  $0 \sim 0.5$  公釐之間，無論  $r_{real}$  如何變化， $r_{eff}$  大約為  $r_{real}$  的 0.87 倍，但是何種原因使得  $r_{eff}$  比  $r_{real}$  略小？

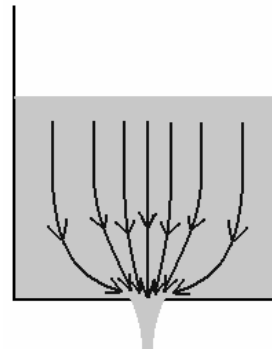


圖七：實驗所估算的孔徑大小(reff)與直接測量的孔徑大小(rreal)之關係。

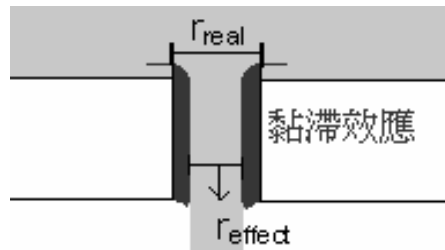
由圖七中顯示  $r_{eff}$  會略小於  $r_{real}$ ，表示水載往下流出時，所感應到的小孔半徑較實際的為小。由實驗中的觀察中可以發現，水的流動並不是只有由上往下的流動，而是有從洞的旁邊往洞口方向做類似於向心的流動，如圖八所示。由於筒內的水會向洞口推擠，使得水從洞口流出的時候，不是完全只有垂直方向的速度，而是還會有部分的水平方向的速度，因為會使得在實驗結果所推算的小圓孔大小，略低於直接用游標尺所測量到的大小。

其次，在實驗過程之中，我們也觀察了當時液面的現象。因為水從小圓孔中漏出的時候，並非是只有單純向下的流動，而有水平方向的流動。由於科氏力的作用，使得水流產生了旋轉，在液面上形成一個向下凹陷的區域。在小圓孔的時候，水也是以旋轉向下的方式流出小圓孔。使得在能量的轉換上，原本估計應該只有垂直於孔面方向的速度，出現了平行於孔面方向的速度分量，減少了垂直於孔面方向的速度，使得由實驗推得的小圓孔大小，會比直接測量的結果略低。

當我們進行理論的分析時，均假設實驗所用的流體是理想流體，在液體與容器之間沒有存在著黏滯的作用。如圖九所示，實際上這個作用確實是存在的，而且也會使得小圓孔有效的大小略為縮小。再加上上面所述水在小圓孔附近的平行流動，所得的結論，均使得在實驗測量上，由水漏出的實驗所推算小圓孔的大小，會略低於直接用尺測量得到的大小。



圖八、水在圓柱筒內的流動



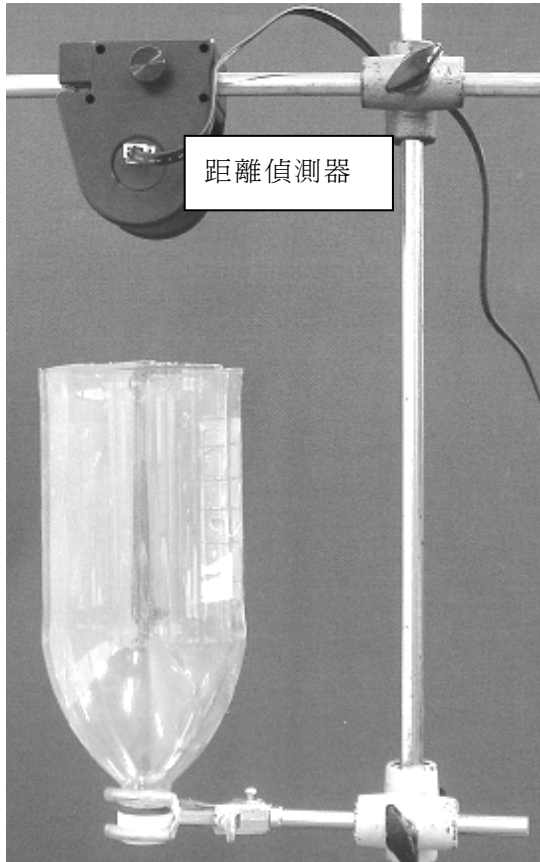
圖九、水在洞口的黏滯效應

#### 肆、實驗在教學示範上的作用

就製作成本而言，這個實驗，因為並不須要花費大量成本，同時也不具危險性，所使用的原理也容易被學生接受，所以非常合適作為教學性的實驗與課堂上的教學示範實驗，因此適合各高中職學生或者是大學一年級的普通物理實驗。另一方面，由於實驗所需的儀器，最主要是底部有孔的柱狀容器，可以在日常生活中找到許多的替代品，例如盛裝飲料用的保特瓶（如圖十所示），通常不會花費太多的費用；而在測量液面隨時間變化上，若是  $R/r$  的比值足夠大，也可以用碼錶記錄液面高度時所對應的時間，不一定非用昂貴的儀器不可。實驗儀器在安全上也無太大的顧



慮，因此學生也可以在家中自己進行類似實驗，以驗證課堂上所學，此乃本實驗設計的另一個好處！



圖十：使用寶特瓶進行實驗。置於寶特瓶上方的即為距離偵測器。

## 伍、結語

本文內中所述的實驗，主要為流體動力學中伯努力定律中驗證的實驗。雖然此實驗只要使用寶特瓶、皮尺、和碼錶即可進行實驗的進行和測量，但是我們仍為此實驗製作了如圖一所示的實驗裝置，及使用了距離偵測器進行量測，以達到大量取得數據及測量微小變化情形。經測量的

結果，發現在實驗的範圍之內，由實驗所測得的流速，均比理論計算出來的流速要略低；即由流速所換算得的孔洞半徑  $r_{\text{eff}}$ ，比實際用游標尺量得的  $r_{\text{real}}$  要小，且  $r_{\text{eff}}$  大約為  $r_{\text{real}}$  的 0.87 倍。我們推論可能的原因，是因為我們所使用的水，和理論公式中所假設的理想流體有一些差別，即為水在洞口附近的流動方式，和水在洞口周邊的黏滯作用，使得測量的結果與理論上有系統上的誤差。這實驗的特點，是即使不用距離偵測器，單是用碼錶和尺測量，只要把人為的誤差儘量縮小，仍然可以得到相當準確的結果。

本文介紹使用 USB 介面偵測器進行數據量測；也可以使用傳統的碼錶、直尺等簡單的儀器，進行伯努力定律的驗證！傳統量測的方式與使用 USB 介面偵測器的兩種量測方式，適用於學習程度不同的學生，不過重要的是都可以用以證明伯努力定律，而且兩種實驗的方法所得到的誤差與精確度都很相近。因此讓學生使用兩種方法進行實驗，可以理解到實驗如果設計適當、量測方法正確，即使使用簡便的量測儀器，依然可以獲得與精密儀器量測相當的精確度；因而可以使得學生對於誤差的概念會更理解，同時能更深一層的理解實驗精神。

另一方面，我們想要強調的另一點，是實驗教學對於基礎科學教育，是相當重要的。除了因為它對於一般課堂上內容的理解，有著重要的貢獻之外；由實驗的目的需求，自行動手設計、製作實驗的器材

和工具，並完成所要的實驗，更可以發揮且創作的思考能力；而在這過程之中，將克服因難、解決問題的能力，也能培養對於一個問題解決方式的智慧。這些重要能力的培育，對於國內的教育是相當需要的。由於自行設計所需的時間漫長，學校多半直接買整套的實驗組件；然而本實驗所設計的伯努力定律實驗，使用的器材設計簡單，提供教師可以嘗試自行製作的一個簡單又精確的實驗。如圖十所示，坊間可得的寶特瓶，也可以進行相似的實驗。透過自己動手對於時間、距離的量測，以及測量結果的處理分析，對於學生實驗裝設能力、數據分析能力的養成亦有所助益。伯努力定律，通常在高中時就有機會學到；因此對於高中實驗課而言，抑或大學的普通物理實驗而言，本文所描述都是一個相當好的實驗題材，其實驗的設計和製作並不會太難。故我們以這樣的一個實驗設計作為嚮導，冀能引發注意和思考，而出現更多有趣的的教學實驗設計及製作，達到拋磚引玉之效。

## 陸、參考資料：

- Rafael M. Digilov and M. Reiner ,  
*Weight-controlled capillary viscometer*, American Journal Physics 73, page1020-1022 , November 2005
- Nathaniel R.Greene and Matthew R.Dworsak, *Bernoulli at the Gas Pump*, THE PHYSICS TEACHER Vol.39, page346-348,September 2001
- Stephen J. Fairman, Joseph A. Johnson, and Thomas A Walkiewicz, *Fluid Flow with Logger Pro*, THE PHYSICS TEACHER Vol. 41, page345-350, September 2003
- Gaylord T. Hageseth , *Surface and kinetic energy densities: A fluid dynamics laboratory exercise* , American Journal Physics 54 , page1011-1014 , November 1986 .
- David Guerra ,Aaron Plaisted, and Michael Smith , *A Bernoulli's Law Lab in a Bottle.pdf* , THE PHYSICS TEACHER , Vol .43 , page456-459 , October 2005 .