類別：數學類

篇名：

河內塔分奇偶之探討

作者：

蔡易霖。台南縣私立南光高中。高一智班
翁煜傑。台南縣私立南光高中。高一智班
吳泳昇。台南縣私立南光高中。高一智班

指導老師：
黃韻如老師

壹●前言

一、研究動機

之前曾經聽老師介紹過「河內塔（Tower of Hanoi）」這個遊戲，是由一位法國數學家 Edouard Lucas（1883 年）在一份雜誌上所發表的。老師除了一開始計算移動步數之外，後來也引導同學們找出它的最小步數公式：2^n-1，並講解了遊戲的原理。而我們這組在課堂之後則是突發奇想地嘗試去改變這個遊戲的規則，也就是將玩法改成：有三個柱子，其中一個柱子上有 n 個金屬片，但這些金屬片是照奇數偶數的順序依序排列，亦即第一片編號為：1、第二片編號為：2・・・依此類推。經過移動後要讓編號為 1、3、5・・・的金屬片在同一柱子上，編號為 2、4、6 的則在另一根柱子上，同時編號小的數字必得在編號大的數字上（例如：1 一定要在 3 的上面），若按此條件進行，則所需的最小步數為多少？

二、研究方法

先找尋並研讀河內塔的相關資料文獻，了解其數學證明後，組員們用紙筆針對新規則先進行初步的推導，嘗試找出規律，進而歸納出它的走法，最後經過共同討論後將結論加以整理記錄。

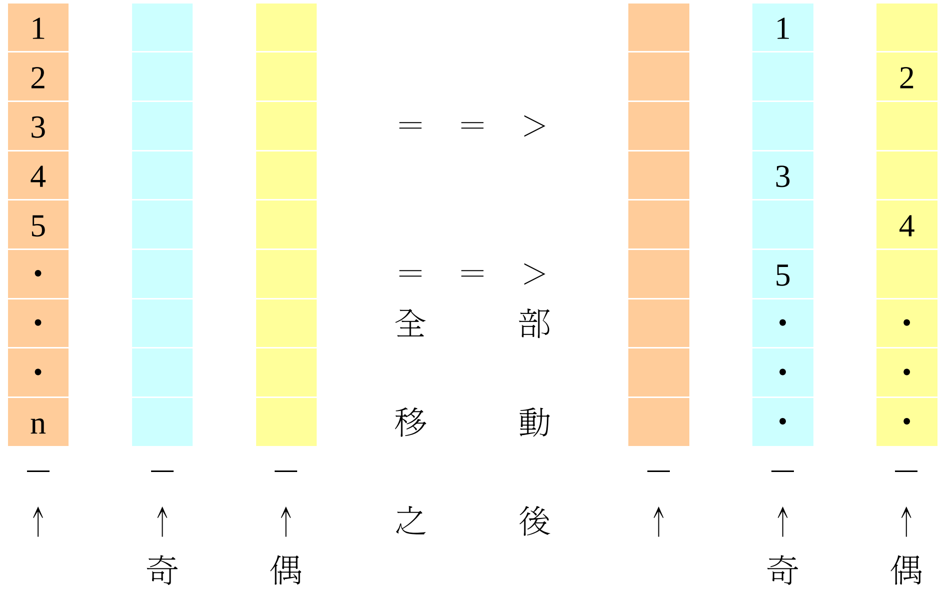
貳●正文

一、研究基礎

新規則的移動方式其基本原理是建立在原本的河內塔之上，也就是將一個柱子上的圓圈全部移動到另外一根柱子上，並讓小圓圈恆在大圓圈之上。依照遞迴數列之概念，可以計算出，當有 n 層圓盤時，「最少」需要(2^n-1)次移動才能完成。
依此原則與概念，開始進行題目的研究，以及歸納出它的相關性質與走法。

二、研究主題

於本研究中所要討論的是當使用三根柱子時，將原先在柱上的 n 個圈由上而下分成奇數圈和偶數圈，並以「最少步數」分別移動到其餘兩根奇數柱和偶數柱上，而編號較小的圈必定在編號較大的圈上（也就是不可以「大」壓「小」），至於移動的基礎即是建立在原始「河內塔」上。
以圖表示意圓圈之移動結果：

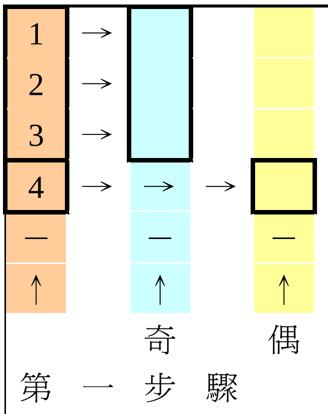
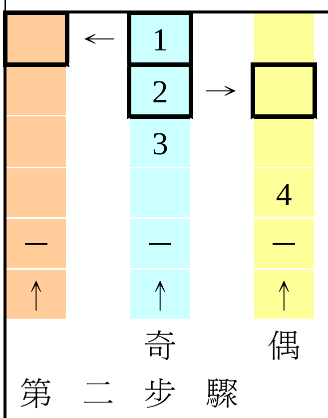


《圖一》

接著以幾個實例來說明移動的狀況，將有助了解移動時所須注意的事項：

(一) 以 4 個圈圈的情況作爲範例：

《表一》

	步驟一： 因爲移動時必先將最底部的圈（編號 4）移動到偶數柱，所以應將上面的 3 個圈先移動到奇數柱。而這 3 個圈的移動方式就像原先的河內塔一樣，故此處需要的步數爲：2^3-1 步。接著剩下的圈移動到偶數柱需 1 步。 此步驟所需步驟：$2^3-1+1=2^3$（步） ＊此步驟可讓「圈 4」和「圈 3」歸位，也就是說「第一步能讓兩個圈歸位。」
	步驟二： 接著必須讓「圈 2」到偶數柱，因此應先將「圈 1」移回原來的柱子。此處所需步數各爲：1 步。此步驟所需步數： $1+1=2=2^1$（步） ＊ 此步驟可讓「圈 2」歸位，並讓剩餘的 1 個圈回歸到原本的柱子，也就是說「第二步能讓一個圈歸位，並讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子。」

1 → 2 3 4 — — — ↑ ↑ ↑ 奇 偶 第 三 步 驟	步驟三：最後將「圈 1」移動到奇數柱就大功告成，而此步驟所需步數為：$1=2^0$（方便觀察） ＊此步驟即重複步驟二「讓一個圈歸位」，但因為圈圈已全部擺置完成，故原柱上無任何圈圈。而根據「讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子」也可得知：$4-3-1=0$ ，並沒有圈回到原柱子，所有圈皆移動完畢。
1 2 3 4 — — — ↑ ↑ ↑ 奇 偶 完 成 圖	綜合以上發現的特性，可以歸納出： 1、當所有圈在原塔柱時，經過步驟一可讓兩個圈歸位。 2、完成第一次移動後，經由步驟二能讓一個圈歸位，並讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子。 3、移動到最後會剩下「圈 1」在原塔柱，因此只要將其移動到奇數柱即可。 4、將步數一一寫出：$2^3+2^1+2^0=11$（步）

(二) 接著以 5 個圈圈的情況作為範例：

《表二》

1 → → → 2 → → → 3 → → → 4 → → → 5 → — — — ↑ ↑ ↑ 奇 偶 第 一 步 驟	步驟一： 因為移動時必先將最底部的圈（編號 5）移動到奇數柱，所以應將上面的 4 個圈先移動到偶數柱。而這 4 個圈的移動方式就像原先的河內塔一樣，故此處需要的步數為：2^4-1 步。接著剩下的圈移動到奇數柱需 1 步。 此步驟所需步數：$2^4-1+1=2^4$（步） ＊ 此步驟可讓「圈 5」和「圈 4」歸位，也就是說「第一步能讓兩個圈歸位。」
← ← ← 1 ← ← ← 2 ← 3 4 5 — — — ↑ ↑ ↑ 奇 偶 第 二 步 驟	步驟二： 接著必須讓「圈 3」到奇數柱，因此應先將由上到下的 2 個圈移回原來的柱子。此處所需步數為：2^2-1 步。再將剩下的「圈 3」移到奇數柱，所需步數 1 步。此步驟所需步數：$2^2-1+1=2^2$（步） ＊ 此步驟可讓「圈 3」歸位，並讓剩餘的二個圈回歸到原本的柱子，也就是說「第二步能讓一個圈歸位，並讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子。」

1	→			
2	→	→	→	
		3		
				4
		5		
—		—		—
↑		↑		↑
		奇		偶

第　三　步　驟

步驟三：
最後將置放在第一柱上的「圈 1」和「圈 2」，分別移至奇數柱和偶數柱。
此步驟所需步數：$2=2^1$（步）
＊ 此步驟不可將「圈 1」和「圈 2」先移動到偶數柱後，再將「圈 1」移動到奇數柱，如此只會徒增步數。

		1		
				2
		3		
				4
		5		
—		—		—
↑		↑		↑
		奇		偶

完　成　圖

綜合以上發現的特性，可以歸納出：
1、當所有圈在原塔柱時，經過步驟一可讓兩個圈歸位。
2、完成第一次移動後，經由步驟二能讓一個圈歸位，並讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子。
3、當只剩下「圈 1」和「圈 2」在原塔柱時，將其分別移動到奇數柱和偶數柱即可，不需仿照第一步驟的移動方式，如此將會多增加步數。
4、將步數一一寫出: $2^4+2^2+2^1\ =22$（步）

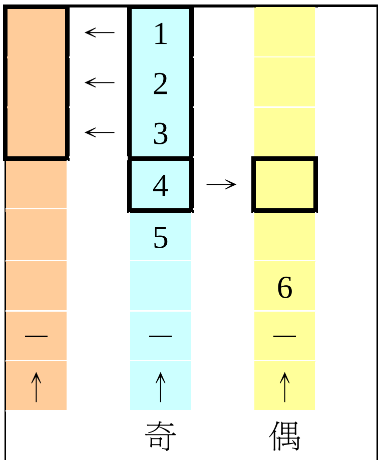
(三) 最後以 6 個圈圈的情況作為範例：

《表三》

1	→			
2	→			
3	→			
4	→			
5	→			
6	→	→	→	
—		—		—
↑		↑		↑
		奇		偶

第　一　步　驟

步驟一：
因為移動時必先將最底部的圈（編號 6）移動到偶數柱，所以應將上面的 5 個圈先移動到奇數柱。而這 5 個圈的移動方式就像原先的河內塔一樣，故此處需要的步數為：2^5-1 步。接著剩下的圈移動到偶數柱需 1 步。
此步驟所需步數：$2^5-1+1=2^5$（步）
＊ 此步驟可讓「圈 6」和「圈 5」歸位，也就是說「第一步能讓兩個圈歸位。」

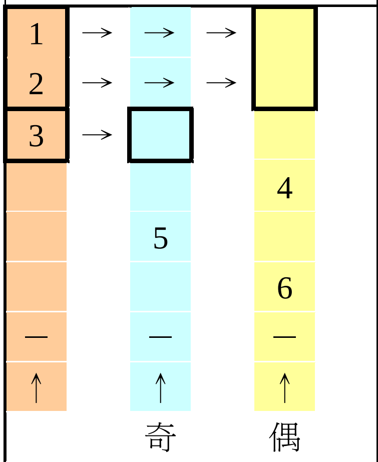


第 二 步 驟

步驟二：

接著必須讓「圈 4」到偶數柱，因此應先將由上到下的 3 個圈移回原來的柱子。此處所需步數爲：2^3-1 步。再將剩下的「圈 4」移到偶數柱，所需步數 1 步。此步驟所需步數：$2^3-1+1=2^3$（步）

＊此步驟可讓「圈 4」歸位，並讓剩餘的三個圈回歸到原本的柱子，也就是說「第二步能讓一個圈歸位，並讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子。」



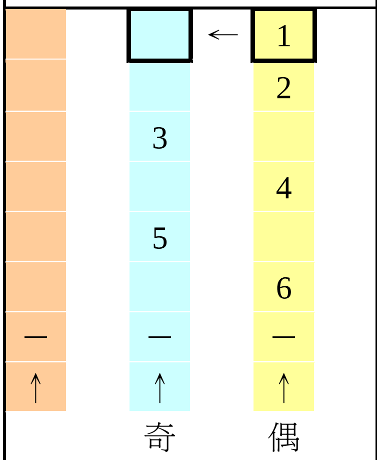
第 三 步 驟

步驟三：

照著第一步驟的觀念移動即可發現：移動後又可以讓 2 個圈歸位。

此步驟所需步數爲：$2^2-1+1=2^2$（步）

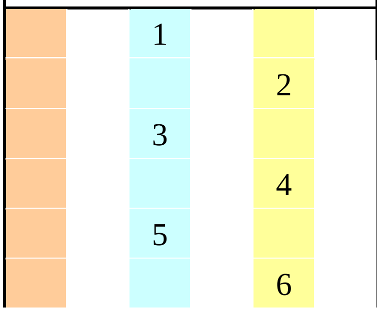
＊ 從這步開始即開始重複第一步驟和第二步驟。



第 四 步 驟

步驟四：最後將「圈 1」移動到奇數柱就大功告成，而此步驟需步數爲：$1=2^0$（方便觀察）

＊此步驟即重複步驟二「讓一個圈歸位」，但因爲圈圈已全部擺置完成，故原柱上無任何圈圈。而根據「讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子」也可得知：$6-3-3=0$ ，並沒有圈回到原柱子，所有圈皆移動完畢。



綜合以上發現的特性，我們可以歸納出：

1、當所有圈在原塔柱時，經過步驟一可讓兩個圈歸位。

2、完成第一次移動後，經由步驟二能讓一個圈歸位，並讓比總圈數少 3 個的圈數回到原本的柱子。

一		一		一	3、從第三次移動開始只是不斷重複著一和二的步驟而已。
↑		↑		↑	4、將步數一一寫出：$2^5+2^3+2^2+2^0=45$（步）
		奇		偶	
完	成	圖			

(四) 再繼續寫出其他圈數時所需的最短步數，並將其整理成下圖表格。

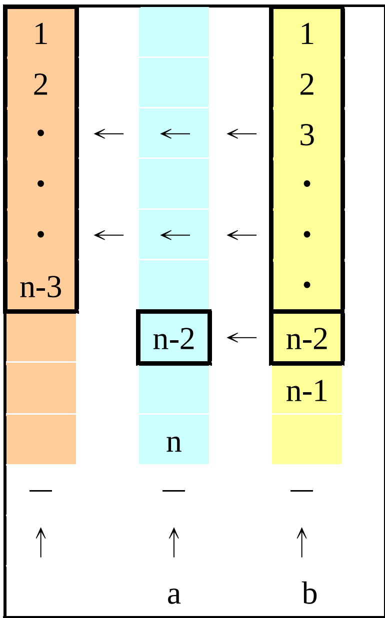
《表四》

1			1		n＝1	2^0
2				2	＝2	2^1
3			3		＝3	2^2+2^0
4	＝	＞		4	＝4	$2^3+2^1+2^0$
5	＝	＞	5		＝5	$2^4+2^2+2^1$
•	全	部	•	•	＝6	$2^5+2^3+2^2+2^0$
•	移	動	•	•	＝7	$2^6+2^4+2^3+2^1+2^0$
•	之	後	•	•	＝8	$2^7+2^5+2^4+2^2+2^1$
n					＝9	$2^8+2^6+2^5+2^3+2^2+2^0$
一			一	一	＝10	$2^9+2^7+2^6+2^4+2^3+2^1+2^0$
↑			↑	↑	＝11	$2^{10}+2^8+2^7+2^5+2^4+2^2+2^1$
			奇	偶	：	：

(五) 依此推導出 n 個圈圈時走法：

《表五》

1				1	將圈數假設爲 n 個，而奇數柱和偶數柱設爲 a 和 b（因爲無法確定 n 爲奇數或偶數），移動的的方式如下：
2				2	1、起初必先將 1～（n－1）圈移動到 b 柱上，如此才能夠將 n 移出，此處所需步數爲：$2^{(n-1)}-1$（步）
3	→	→	→	3	2、接著將 n 圈移動到 a 柱上，此處需 1 步。
•				•	3、共需步數：$[2^{(n-1)}-1]+1=2^{(n-1)}$（步）
•	→	→	→	•	＊第一步驟可讓兩個圈歸位，因此下次需移動的圈爲 1～（n－2）圈。
•				•	
•				•	
				n-1	
n	→	n			
一		一		一	
		↑		↑	
		a		b	



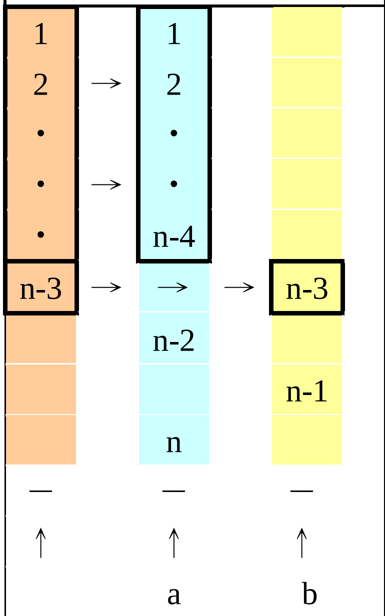
經過第一次移動後，接著開始移動 1～（n－2）圈

1、將 1～（n－3）圈移動回原柱，如此才能將（n－2）圈移動到 a 柱，此處步數爲：$2^{(n-3)}-1$（步）

2、接著將（n－2）圈移動到 a 柱上，此處需 1 步。

3、共需步數：$[2^{(n-3)}－1]＋1＝2^{(n-3)}$（步）

＊第二步驟可讓一個圈歸位，並使（n－3）個圈回到原柱，因此下次需移動的圈爲 1～（n－3）圈。



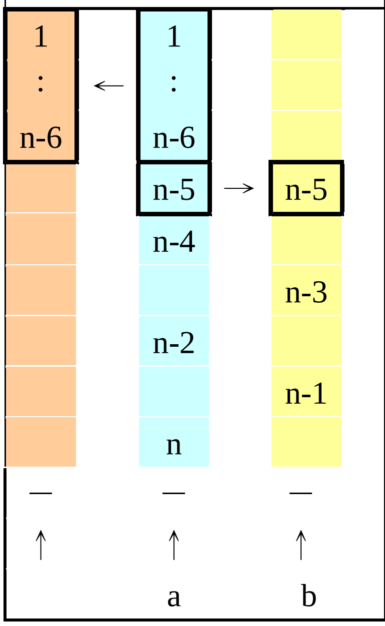
接下來的第三步驟，經過移動過程可發現到和第一次移動十分的相似，只是將 1～（n－4）個圈移動到 a 柱，有別於一開始移動到 b 柱。

1、先將 1～（n－4）圈移動到 a 柱上，如此才能夠將（n－3）圈移出，此處所需步數爲：$2^{(n-4)}-1$（步）

2、接著將（n－3）圈移動到 b 柱上，此處需 1 步。

3、共需步數：$[2^{(n-4)}－1]＋1＝2^{(n-4)}$（步）

＊第三步驟如同第一步驟可讓兩個圈歸位，因此下次需移動的圈爲 1～（n－5）圈。



接下來的第四步驟，經過移動過程可發現到和第二次移動十分的相似，接著開始移動 1～（n－5）圈

1、將 1～（n－6）圈移動回原柱，如此才能將（n－5）圈移動到 b 柱，此處步數爲：$2^{(n-6)}-1$（步）

2、接著將（n－5）圈移動到 a 柱上，此處需 1 步。

3、共需步數：$[2^{(n-6)}－1]＋1＝2^{(n-6)}$（步）

＊第四步驟可讓一個圈歸位，並使[(n－3)－3]個圈回到原柱，因此下次需移動的圈爲 1～（n－6）圈。

＊接下來的步驟皆和步驟一、二重複。

由上面整理出的走法可發現：
步驟一、步驟三可使 2 個圈移動到正確位置；而步驟二、步驟四可使 1 個圈移動到正確位置，因此可以導出一個公式：

當圈數為 n 時，所需步數為： $2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots$

1. 將所有的資料統整後提出以下的性質：

(1) 圈數所對應的步數規律是以 3 個為一組增加的（圈數不能等於 0，故上方表格中的第一組只有圈數 1 和 2）。

(2) 當圈數有 n 個時，所需的步數為： $2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots$ 可以將這個一般式寫成： $2^{(n-1)}+2^{[(n-1)-2]}+2^{[(n-3)-1]}+2^{[(n-4)-2]}+2^{[(n-6)-1]}\ldots$

由此公式即能看出 2 的次方數 n 是以「－1」和「－2」不斷地減少下去，直到減少到 n－1 或 n－2 等於 0 或小於 0 則停止。

2. 又可以把公式分成三種情形來討論：

(1) 第一種情形：

當 n÷3＝a…b，而 b＝0 的時候（即 n 可整除三），n 為≥ 3 之整數
步數公式推演：

$2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots+2^{0}$（此情形最後一項必為 2^0 ）

$=2^{2}\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{0}\right]+\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{0}\right]$（將奇次項都提出 2^2 ）

（＊此數列的項數多寡必為偶數）

$=\left(2^{2}+1\right)\cdot\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{0}\right]$（兩項合併）

$=5\sum_{k=1}^{\frac{n}{3}}2^{(n-3k)}$ n≥3， $\frac{n}{3}\in N$

＊n=3 可以適用在此公式，因為當步數寫成： $2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots$ 時，最少有兩項以上。

(2) 第二種情形：

當 n÷3＝a…b，而 b＝1 的時候，n 爲≥ 4 之整數
步數公式推演：

$2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots+2^{1}+2^{0}$（此情形最後一項必爲 2^{0} ）

（＊此數列的項數多寡必爲奇數）

$=2^{2}\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{1}\right]+\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{1}\right]+2^{0}$（將奇次項都提出 2^{2} ）

$=\left(2^{2}+1\right)\cdot\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{1}\right]+2^{0}$（兩項合併）

$=5\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{3}}2^{(n-3k)}+2^{0}$　　n≥4，$\frac{n-1}{3}\in N$

＊n=1 並不適用以上公式，因爲 $\frac{n-1}{3}$ 還必須大於 0，也就是說：將步數寫成

$2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots$時，至少要有兩項以上。

(3) 第三種情形：

當 n÷3＝a…b，而 b＝2 的時候，n 爲≥ 5 之整數
步數公式推演：

$2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots+2^{2}+2^{1}$（此情形最後一項必爲 2^{1} ）

$=2^{2}\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{2}\right]+\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{2}\right]+2^{1}$（將奇次項都提出 2^{2} ）

（＊此數列的項數多寡必爲奇數）

$=\left(2^{2}+1\right)\cdot\left[2^{(n-3)}+2^{(n-6)}+\ldots+2^{2}\right]+2^{1}$（兩項合併）

$=5\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{3}}2^{(n-3k)}+2^{1}$　　n≥5，$\frac{n-2}{3}\in N$

＊n=2 並不適用以上公式，因爲 $\frac{n-2}{3}$ 還必須大於 0，也就是說：將步數寫成

$2^{(n-1)}+2^{(n-3)}+2^{(n-4)}+2^{(n-6)}\ldots$時，至少要有兩項以上。

參●結論

一、心得：

在這次的研究過程中，經過不斷的討論，並遭遇許多的失敗與挫折後，我們成長並且蛻變，更體會到數學世界的奧妙。抽絲剝繭地將規則一步步發掘，喜悅也伴隨著綻放開來，使我們對研究增加了許多動力。雖然花費了許多的時間以及精神在這次的研究上面，但是我們甘之如飴，且研究一開始，原本默契不佳的三人，對問題的解決方法偶有意見不合，經由討論，將歧見磨合並激盪出真理的火花，彼此互相協助、互相扶持、互相鼓勵，漸漸的培養出相當的默契，並增加了數學研究的經驗。當我們發現問題的解決方法時，所有的努力以及付出都是值得的，而這也是我們在整個研究中所獲得最珍貴的寶物。

二、未來的發展：

本研究之後發展方向是將河內塔由三柱推廣到四柱甚至是更多柱，而規則也是將奇數圈圈、偶數圈圈，分別置放在其中兩根柱子上，期望能找出解決這個問題的方法，並找出其間的共通性。而在研究過程中，曾試著去尋找四柱的移動方法，但是到第十一個圈圈時失去了規律性，而目前還在努力探討其原因。

肆●引註資料

一、河內塔之深入研究：
http://teach.ymhs.tyc.edu.tw/t1086/study/knowle/Hanoi-tower-2.htm

二、河內塔：
http://www.chiuchang.com.tw/toy/hanoi/hanoi.html

三、許志農（主編）（2008）。普通高級中學數學第四冊。臺北市：龍騰文化事業。