投稿類別：數學類

篇名：亂中有序－移動的規律

作者：

葉子瑄。台北市立中山女子高級中學。高一正班

指導老師：

林淑娥 老師

壹●前言

一、研究動機

於玩益智遊戲或日常生活中，常會碰到與移動有關的情形，如下跳棋、玩九連環、或由出發地至目的地間最佳路線選擇等問題，在這些活動中是否有其規則性及合理的分析策略呢？希望經由此次研究可找出隱藏在其中的數學觀念與技巧，進而發現某些移動問題的通用公式。

二、研究目的

（一）找出河內塔遊戲的移動規律及通用公式

（二）找出九連環遊戲的移動規律及通用公式

（三）找出兩地點間最短路線的走法，並發現移動規律及通用公式

三、研究架構

移動的規律
- 數學歸納法及遞迴關係的運用
- 河內塔的原理與移動策略
- 九連環的原理與移動策略
- 最短路線的走法與移動策略
- 結論

四、研究方法

（一）文獻探討法:本研究查閱教科書及數學參考書籍、網站，取得數學歸納法及規律性的相關資訊，及河內塔與九連環等遊戲的起源與玩法，充份研讀並了解其中的原理與應用技巧，並加以整理歸納分析。

（二）行動研究法：本研究透過實際操作及模擬推演，逐步分析各標的之移動規律性及數學模式，來幫助建立數學通式，再進行歸納分析。

貳●正文

一、數學歸納法及遞迴關係的運用

(一) 以數學歸納法證明假設或推論成立的步驟

「1. **先證明n＝1時假設或推論成立；**
2. **假設n＝k (n∈N)的時候亦成立；**
3. **證明在n＝k＋1時也成立。」 (徐道寧**，2004)

(二) 遞迴關係

遞迴關係指：**「是一種遞迴地定義一個序列的方程式，序列的每一項目定義爲前面項的函數」**(張福春・莊淨惠，2009)。

若數列中各項之排列或順序有固定的規律，且前、後項間有遞推性，次一項即可由前一項定義或推導。當我們分析各項間之對應關係，找出數列

之遞迴關係後，可進一步將遞迴關係解開以得到數列之通式(一般式)，再以數學歸納法證明其正確性。

二、河內塔的原理與移動策略

(一) 河內塔的起源與遊戲的玩法

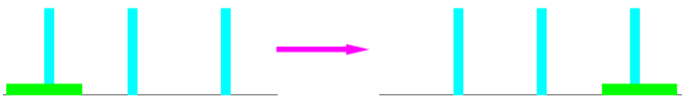
河內塔問題是法國科學家 Edouard Lucas 於 1883 年提出的謎題(張福春・莊淨惠，2009)，相傳在古印度有一座神廟，廟裏面放了一塊插著三根長柱的木板，其中一根長柱上，套了 64 個大小不同的金屬環，金屬環從上到下由小至大依序排列。若有人能依下列規則將金屬環由原先的長柱上，全部移動到另一根長柱時，大千世界將毀於一旦。

遊戲規則及玩法：將 64 個圓環由原先的長柱上，全部移動到另一根長柱。規定每次移動只能搬移一個圓環，並且於過程中在每一根長柱上，都是直徑較小的圓環被放在較上層，必須保持圓環由上到下是由小到大的次序。

(二) 研究方法與結果

1. 實際操作河內塔，採循序漸進方式，由 1 個圓環開始分析河內塔移動的策略，然後增加圓環數，進而推展至 N 個圓環，找出其規則性。

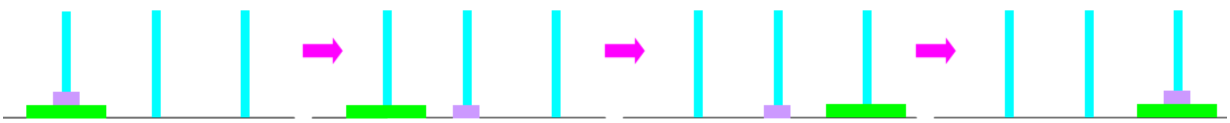
1 個圓環時



觀察重點：

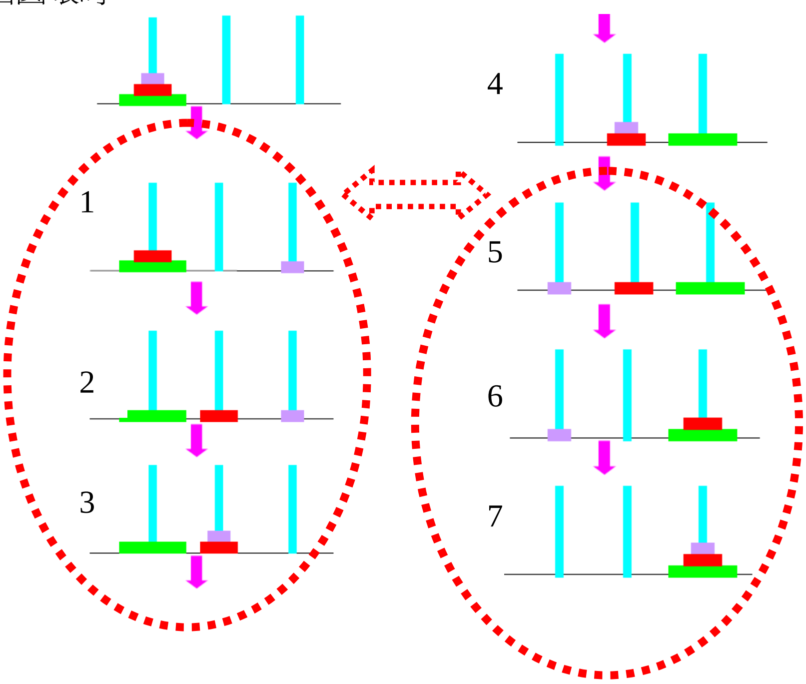
1 個圓環時，只須 1 步即將所有圓環移到右柱上。

2 個圓環時



2 個圓環觀察重點：只須 3 步即可將所有圓環移到右柱上。

3 個圓環時



3 個圓環觀察重點：

1.步驟 1-3 與「2 環河內塔」之動作一致。

2.步驟 4 將左柱剩下的圓環移到右柱上。

3.步驟 5-7 與「2 環河內塔」之動作一致。

4.3 個圓環時，共需 7 步以將所有圓環將所有圓環移到右柱上。

2. 由「一環」至「三環」乃至「四環」的圓環套到長柱上之操作步驟，發現每增加一圓環時，操作步驟乃由低圓環數之步數累加而成，我們可類推至「五環」，仍是由重覆「四環」之動作完成，再上推至「六環」．．．．，也符合此一規則，我們觀察到下表的規則性。

河內塔左柱上的圓環數	所有圓環由左柱移到右柱上所需之步驟	操作步驟與連環個數之關係	以數學式表示(遞迴關係)
一環	1	1=1 個圓環由左柱移到右柱需要的步數	$S_1=1$
二環	3	3=2 個圓環由左柱移到右柱需要的步數	$S_2=3$
三環	7	7=3 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =2 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_3= S_2\times2+1=7$
四環	15	15=4 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =3 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_4= S_3\times2+1=15$
五環	31	31=5 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =4 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_5= S_4\times2+1=31$
六環	63	63=6 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =5 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_6= S_5\times2+1=63$
七環	127	127=7 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =6 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_7= S_6\times2+1=127$
八環	255	255=8 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =7 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_8= S_7\times2+1=255$
9 環	511	511=9 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 =8 個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_9= S_8\times2+1=511$
N 環	S_N	S_N=N 個圓環由左柱移到右柱需要的步數 = (N-1)個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)	$S_N= S_{N-1}\times2+1= 2^N-1$

得到遞迴關係 S_N=(N-1)個圓環的步數×2＋1(左柱上最下層的圓環移到右柱上)= $S_{N-1}\times2+1$

3. 由 1-9 圓環數所需之步驟 1、3、7、15、31、63、127…所形成的數列，我們發現該數列具有遞迴關係，經觀察可得:
1、3、7、15、31、63、127… 於各項加 1 後數列成爲 2、4、8、16、32、64、128…各項變成 2 的次方關係 2^1、2^2、2^3、2^4、2^5、2^6、2^7、……….可推導出數列具 2^N-1 的數學式關係，我們再以數學歸納法證明看看是否正確!
(1) n＝1時，$S_1=2^N-1 = 2^1-1 = 1$ 正確；
(2) n＝K 時，命題成立 ⇒ $S_K=2^K-1$ ；
(3) n＝K+1 時，$S_{K+1}= S_K\times2+1=2\times(2^K-1)+1=2\times2^K-2+1=2^{K+1}-1$ 正確！
由以上證明發現數學歸納法之三要項均成立。故 $S_N= 2^N-1$ 之公式成立。

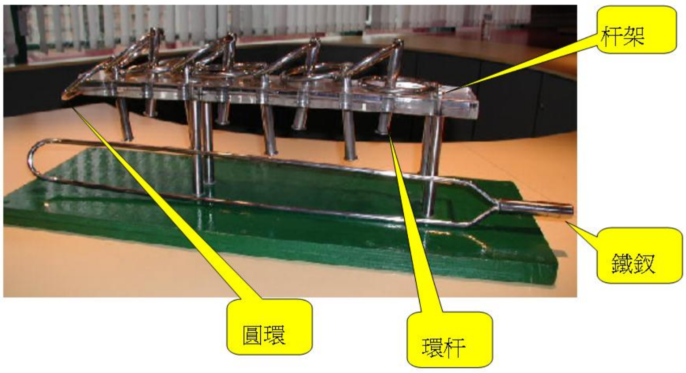
由上述之通式，若我們真的去移動 64 個金屬環，共需 2^{64}-1 個步驟，也就是大約 1.8×10^{19}，大概沒有人可以實際動手解得出來吧！

三、九連環的原理與移動策略

(一) 九連環的起源與遊戲的玩法

九連環於中國古代民間即開始流傳，是一種古老的中國傳統益智遊戲，連環數可變化不一定爲九環，因中國人以九爲尊，故以「九連環」爲其通稱。**「西方最早描述九連環的是義大利數學家 Luca Pacioli，他在 1500 年的論文"數的次冪"中描述了九連環。」**(張衛，2011)

圖片來源：於台北市科教館拍攝



九連環的構成:

每個圓環上都連著一根直桿，稱爲環杆，除最後一環外，每根環杆都從後一環內穿過，並有一個木製或塑膠製的杆架，每根環杆最後都穿過杆架固定。最後用一根長形的鐵釵，穿過所有圓環，即形成一個九連環的結構。

九連環的基本玩法，就是要將鐵釵由所有圓環上脫離，或將所有圓環套到鐵釵上，2 種玩法之程序互相相反；鐵釵於任一圓環上有兩種基本動作，即「上環」(將圓環套到鐵釵上)與「下環」(將圓環由鐵釵上脫離)，若以二進位表示，可類比爲" 0" (即上環)，與" 1" (即下環)。

(二) 研究方法與結果

1. 因將所有圓環脫離或套到鐵釵上之程序互相相反，我們只分析所有圓環套到鐵釵上；並採循序漸進方式，先於較簡單的「五連環」，由 1 個圓環開始分析圓環移動的策略，然後增加圓環數，「五連環」分析完成後，再以同樣方法分析「九連環」，進而推展至「N 連環」，以於過程中找出其規則性。

1 個圓環(一連環)時

觀察重點：

1 個圓環時，只須 1 步即將所有圓環套到鐵釵

若以二進位"0"(即上環)，與"1"(即下環) 表示，可將所有圓環套到鐵釵上之動作以下表呈現。

步驟	二進位表示	
1	0	(上環)

2 個圓環(二連環)時之步驟

1 

2 

若以二進位" 0" (即上環)，與" 1" (即下環) 表示，可將二連環所有圓環套到鐵釵上之動作以下表呈現。

步驟	二進位表示	
1	0 1	(上環)
2	0 0	

觀察重點：2 個圓環時，共需 2 步才能將所有圓環套到鐵釵上。

3 個圓環(三連環)時之步驟

1

2

3

4

5


步驟	二進位表示
1	0 1 1
2	0 0 1
3	1 0 1
4	1 0 0
5	0 0 0

二連環的步驟

一連環的步驟

觀察重點：3 個圓環時，共需 5 步以將所有圓環套到鐵釵上
1.步驟 1、2 與「二連環」之動作一致。
2.步驟 3、5 與「一連環」之動作一致。
3.步驟 4 將最右側的圓環套到鐵釵上。

2. 由以上「一連環」至「三連環」乃至「五連環」的圓環套到鐵釵上之操作步驟，發現每增加一圓環時，操作步驟乃由低圓環數之步數累加而成，我們可類推至「六連環」，仍是由重覆進行「五連環」及「四連環」之動作完成，再上推至「七連環」，也符合此一規則，我們觀察到下表的規則性。

圓環數	所有圓環套到鐵釵上所需之步驟	操作步驟與連環個數之關係	以數學式表示(遞迴關係)
一連環	1	1=1 個圓環套到鐵釵上需要的步數	$S_1 = 1$
二連環	2	2=2 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =1 個圓環的步數×2	$S_2 = 2$ $=S_1\times 2$
三連環	5	5=3 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =2 個圓環的步數＋1 個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_3 = S_2 + S_1\times 2+1=5$ $= S_2\times 2+1$ 或 $S_1\times 4+1$
四連環	10	10=4 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =3 個圓環的步數＋2 個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_4 = S_3 + S_2\times 2+1=10$ $= S_3\times 2$ 或 $S_2\times 4+2$
五連環	21	21=5 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =4 個圓環的步數＋3 個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_5 = S_4 + S_3\times 2+1=21$ $= S_4\times 2+1$ 或 $S_3\times 4+1$
六連環	42	42=6 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =5 個圓環的步數＋4 個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_6= S_5+ S_4\times 2+1=42$ $= S_5\times 2$ 或 $S_4\times 4+2$
七連環	85	85=7 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =6 個圓環的步數＋5 個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_7 = S_6 + S_5\times 2+1=85$ $= S_6\times 2+1$ 或 $S_5\times 4+1$

八連環	170	170=8 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =7 個圓環的步數＋6 個圓環的步數×2 ＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_8= S_7+ S_6\times2+1=170$ $= S_7\times2$ 或 $S_6\times4+2$
九連環	341	341=9 個圓環套到鐵釵上需要的步數 =8 個圓環的步數＋7 個圓環的步數×2 ＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_9 = S_8 + S_7\times2+1=341$ $= S_8\times2+1$ 或 $S_7\times4+1$
N 連環 (N 為奇數)	S_N	S_N =N 個圓環(N 為奇數)需要的步數 =(N-1)個圓環的步數＋(N-2)個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_N = S_{N-1} + S_{N-2}\times2+1$ $= S_{N-1}\times2+1$ 或 $= S_{N-2}\times4+1$
N 連環 (N 為偶數)	S_N	S_N =N 個圓環(N 為偶數)需要的步數 =(N-1)個圓環的步數＋(N-2)個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵上的步數)	$S_N = S_{N-1} + S_{N-2}\times2+1$ $= S_{N-1}\times2$ 或 $= S_{N-2}\times4+2$

我們可由上表的規律性推導出任何圓環數的所需步驟

3. 歸納得到 N 連環的遞迴關係:
S=(N-1)個圓環的步數＋(N-2)個圓環的步數×2＋1(最右側的圓環套到鐵釵的步數)
若 N 為奇數時 $S_N = S_{N-1} + S_{N-2}\times2+1= S_{N-1}\times2+1$ 或 $S_{N-2}\times4+1$
若 N 為偶數時 $S_N = S_{N-1} + S_{N-2}\times2+1= S_{N-1}\times2$ 或 $S_{N-2}\times4+2$

由上表進一步觀察可發現不同圓環數所需步驟間具下列指數關係:

圓環數	操作步驟間之指數關係
一連環	$0+ S_1+1=2 =2^1$
二連環	$S_1 + S_2+1=4 =2^2$
三連環	$S_2 + S_3+1=8 =2^3$
四連環	$S_3 + S_4+1=16 =2^4$
五連環	$S_4 + S_5+1=32 =2^5$
六連環	$S_5 + S_6+1=64 =2^6$
七連環	$S_6 + S_7+1=128 =2^7$
八連環	$S_7 + S_8+1=256 =2^8$
九連環	$S_8+ S_9+1=512 =2^9$
N 連環	$S_{N-1}+ S_N+1 =2^N$

可推得 $S_N =2^N-1- S_{N-1}$

由前面 N 連環的遞迴關係可推導:

(1) 當 N 為奇數時

由 $S_N＝S_{N-1}\times2+1$ 及 $S_N =2^N -1- S_{N-1}$ 二式

可得 $2 S_N＝2(2^N－1－S_{N-1}) ＝2^{N+1}－2－2S_{N-1}$

$＝2^{N+1}－2－(S_N-1) ＝2^{N+1}－1－S_N$

$3 S_N＝2^{N+1}－1$

$$S_N＝\frac{2^{N+1}-1}{3}$$

（2）當 N 為偶數時

由 $S_N = S_{N-1}\times 2$ 及 $S_N = 2^N - 1 - S_{N-1}$ 二式

可得

$2S_N = 2(2^N - 1 - S_{N-1}) = 2^{N+1} - 2 - 2S_{N-1}$

$= 2^{N+1} - 2 - S_N = 2^{N+1} - 2 - S_N$

$3S_N = 2^{N+1} - 2$

$S_N = \dfrac{2^{N+1}-2}{3}$

得到通式

當 N 為奇數時: $S_N = \dfrac{2^{N+1}-1}{3}$

當 N 為偶數時: $S_N = \dfrac{2^{N+1}-2}{3}$

我們再以數學歸納法證明看看是否正確!

（1）當 N 為奇數時，設 $N = 2m-1$（$m \in N$）

(a)、當 $m=1$，$N=1$

$S_1 = \dfrac{2^{1+1}-1}{3} = \dfrac{2^2-1}{3} = \dfrac{4-1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$ 成立

(b)、假設 $m=k$，$N=2k-1$ 時，命題成立 $\Rightarrow S_{2k-1} = \dfrac{2^{2k+2}-1}{3}$

(c)、則當 $m=k+1$ 時，$N=2k+1$

$S_{2k+1} = 2S_{2k} + 1 = 2\times 2S_{2k-1} + 1$

$= 2^2\times\dfrac{2^{2k}-1}{3} + 1 = \dfrac{2^{2k+2}-4}{3} + 1 = \dfrac{2^{2k+2}-1}{3}$ 正確！

（2）當 N 為偶數時，設 $N = 2m$（$m \in N$）

(a)、當 $m=1$，$N=2$

$S_1 = \dfrac{2^{2+1}-2}{3} = \dfrac{2^3-2}{3} = \dfrac{8-2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ 成立

(b)、假設 $m=k$，$N=2k$ 時，命題成立 $\Rightarrow S_{2k} = \dfrac{2^{2k+1}-2}{3}$

(c)、則當 $m=k+1$ 時，$N=2k+2$

$S_{2k+2} = 2S_{2k+1} = 2\times(2S_{2k}+1) = 2^2\times S_{2k} + 2$

$= 2^2\times\dfrac{2^{2k+1}-2}{3} + 2 = \dfrac{2^{2k+3}-8}{3} + 2$

$= \dfrac{2^{2k+3}-2}{3}$ 正確！

由以上證明發現數學歸納法之三要項均成立。故 N 連環之通式成立。

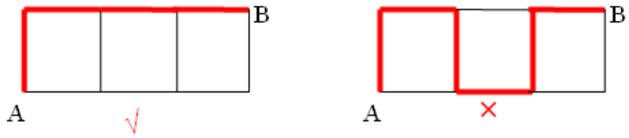
四、最短路線的走法與移動策略

(一) 最短路線的定義與走法

若兩點間有很多條縱、橫相連的線段，且假設每一線段的長度或距離都相等，兩

點間會有無數種到達對方的移動路線，這些路線中移動距離最短，或須移動路徑數最少的走法，即爲最短路線，我們希望找出複雜的圖形組合中，有幾個最短路線的走法。

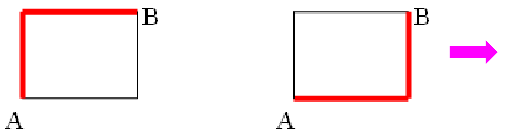
因每一線段的距離都相等，最短路線須沿著與兩點連線之順向的路線移動，不可沿著與兩點連線之逆向或反向的路線移動，如下圖所示。



(二) 研究方法與結果

1. 我們採循序漸進方式，先分析較簡單的圖形組合的最短路線，進而推展至複雜圖形，以於過程中找出其規則性。

(1) 於下列縱、橫各 1 條線段(1×1)之簡易路線圖中，由 A 點到 B 點的最短移動路線，如紅色粗線所示：

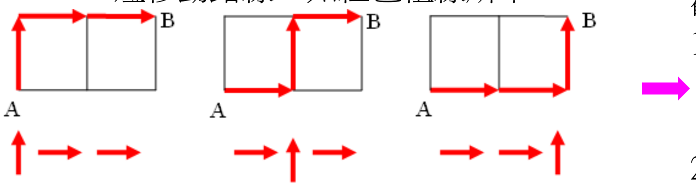


觀察重點：

1.由 A 點到 B 點的移動，最短路線須經過兩條線段，共有兩條最短路線。

2.縱向及橫向各線段都會有路線經過，且經過之順序必與 A、B 兩點之順向方向一致。

(2) 於下列縱向 1 條線段、橫向 2 條線段(2×1)之路線圖中，由 A 點到 B 點的最短移動路線，如紅色粗線所示：

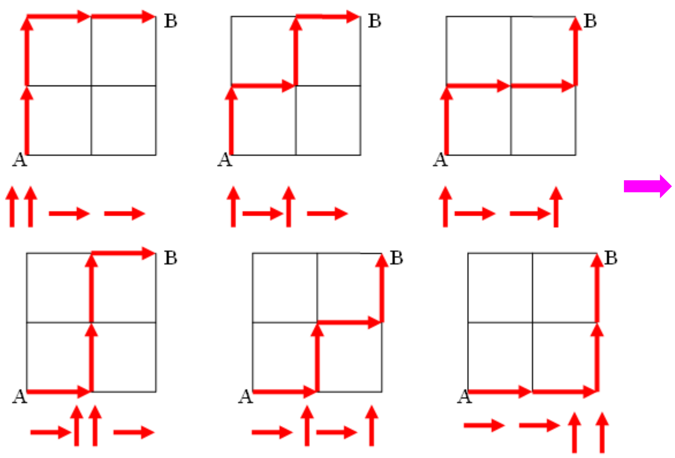


實際操作發現由 A 點到 B 點的移動，最短路線須經過 3 條線段，共有 3 條最短路線。

觀察重點：

1. 縱向及橫向各線段都會有路線經過，且經過之順序必與 A、B 兩點之順向方向一致。
2. 由圖示分析發現每一種路線均由 2 個→及 1 個↑所組成，組合方法有 $\frac{(1+2)!}{1!\times 2!}=\frac{3!}{2!}=3$種，與實際操作一致。

(3) 於下列縱向 2 條線段、橫向 2 條線段(2×2)之路線圖中，由 A 點到 B 點的最短移動路線，如紅色粗線所示：



觀察重點：

1. 縱向及橫向各線段都會有路線經過，且經過之順序必與 A、B 兩點之順向方向一致。
2. 由圖示分析發現每一種路線均由 2 個→及 2 個↑所組成，組合方法有 $\frac{(2+2)!}{2!\times 2!}=\frac{4!}{2!\times 2!}=6$種，與實際操作一致。

實際操作發現由 A 點到 B 點的移動，最短路線須經過 4 條線段，共有 6 條最短路線。

(4) 由以上之操作步驟，我們觀察到下表的規則性。

縱向線段的數目	橫向線段的數目	最短路線的走法
1	1	2
1	2	3
2	1	3
2	2	6
3	2	10
2	3	10
3	3	20
4	3	35
3	4	35
4	4	70

(5) 由以上縱向及橫向不同線段所構成的圖形中，發現由 A 點到 B 點的移動，最短路線會依兩點之順向一致的方向，行經各縱向及橫向線段；而最短路線經過之最少線段數，等於縱向單側之線段數，及橫向單側之線段數的總合。

(6) 由排列組合的觀念，我們知道若將物品分為兩組，各有 m 及 n 個，依各組的物品是否要按順序排列，有兩種計數的方式:

(a)、若將 m 及 n 個物品全部排列出來，兩次排列的物品一樣，但順序不同時，即視為 2 種不同的排列方法，則依據乘法原理可計算有幾種不同的排列方法。

(m+n)個物品排列方法$=(m+n)\times(m+n-1)\times(m+n-2)\times(m+n-3)\times(m+n-4)\cdots\cdots\times1$

$=(m+n)!$

(b)、另以同組內有(1、2、3)三個物品為例說明組合之情境，此時雖可列出(1、2、3)、(2、1、3)、(3、1、2)、(3、2、1)、(1、3、2)、(2、3、1)六種排列，但實際上只是(1、2、3)互換順序，仍只有一種物品組合而已。所以於 m 或 n 個物品排列時，不論同組內部的物品如何調整順序，都只能視為同 1 種組合方法，依據乘法原理可計算及分析有幾種不同的組合方法。

(m+n)個物品排列方法$=(m+n)\times(m+n-1)\times(m+n-2)\times(m+n-3)\times(m+n-4)\cdot\cdot\cdot\times1$

$=(m+n)!$ --- (1)

m 個同組不同的物品排列方法$=(m)\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)\cdots\cdot\times1=m!$ ---- (2)

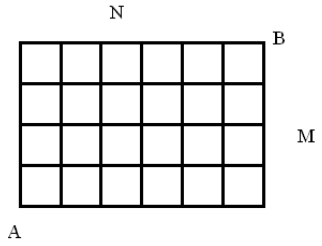
n 個同組不同的物品排列方法$=(n)\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\cdots\cdot\cdot\times1=n!$ ---- (3)

由前面說明可知， m 或 n 個同組的物品於組內不論如何調整順序，都只能視為同 1 種組合方法，故 m！或 n！種排列實際上是同一種方法，也就是說(m+n)個物品的總排列方法要除以 m！及 n！，才是實際的組合方法。

(m+n)個物品組合方法= $\dfrac{(m+n)!}{m!\times n!}$

(7)如下圖，於縱向有 n 條線段，及橫向有 m 條線段所構成的圖形中(m×n)，由A 點到 B 點的移動，其最短路線經過之最少線段數，等於 m+n，若將 m+n 條線段分爲兩組，即縱向組及橫向組，因行經各縱向及橫向線段的順序，須與兩點之順向的方向一致，故於縱向組之 n 條線段，只能以一特定的順向方式排列，於橫向組之 m 條線段也只有一種特定的順向方式排列，類似上述求解(m+n)個物品之組合方法。

因此 m×n 的圖形之最短路線的走法，類似於(m+n)個物品組合方法一樣，如下式。



m×n 的圖形之最短路線的走法= $\dfrac{(m+n)!}{m!\times n!}$

參●結論

一、研究成果

(一) 於具規律性的問題中，我們可經由循序漸進方式，由最小的數量開始分析，然後逐漸增加分析的數值，於過程中找出其規則性。最短路線的題型相當有變化，利用本次研究所得到的數學式，於各種複雜的應用時，可結合排列組合的運算技巧，演化出個人的解題策略。

(二) 由看似隨意排列的數列中找出其規律性並分析其性質，進而推論出通式的過程充滿挑戰性，可能還需要一些靈感及想像力，河內塔及九連環遊戲是訓練規律性思考的良好，在目前電腦科技不斷取代人類執行各類工作時，思考及創意領域還是電腦無法取代的部分，期望能如同費波那契發現費氏數列及黃金比率應用一樣，盡一己之力研究出有益於社會進步的新知及觀念，並應用於計算機等科學領域造福人群。

二、未來研究方向

遞迴分析及數學歸納法於推導規律性問題的一般式時，相當有效且實用，經由本次研究主題的腦力激盪，對未來進一步學習更高深的數學觀念與解題方法打下良好的基礎，希望能進一步研究其原理與應用技巧，除藉以熟悉各類數列問題之本質外，並進而培養觀察及解析能力，將看似隨意變化的科學實驗數據、或日常生活中如物價、人口、股市等資訊，轉化爲有意義且經過嚴格驗證的數學方程式，甚至發展出適用的數學模式，有助於科學研究或社會現象的分析。

肆●引註資料

一、引用資料

(一) 徐道寧(2004)。**數學歸納法**。新竹市:凡異出版社。

(二) 張福春‧莊淨惠(2009)。**線性遞迴關係之求解(上)**。數學傳播，33 卷 4 期，47-62。

(三) 張衛(2009)。**九連環-中國古代益智遊戲**。引自：
http://chinesepuzzles.org/hk/nine-linked-rings/

二、參考資料

(一) 吳新吉(2010)。透析高中數學(二)教學講義。台北縣:全華圖書股份有限公司。

(二) 溫榮夫(2009)。**高中分析數學 3-數列與級數**。台北縣:建宏出版社。

(三) 俞崇恩、張衛(2004)。**千變萬化的九連環**。台北市:九章出版社。

(四) 江銘輝(2010)。**遞迴分析與河內塔**。引自：
http://www.fivedream.com/page1.aspx?no=221249&step=1&newsno=26283