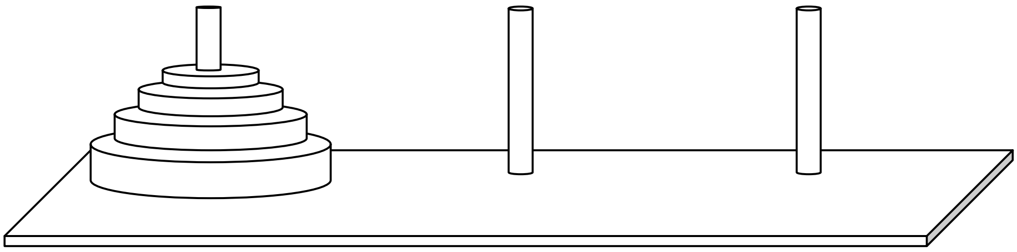
河內塔之深入研究

國立楊梅高中數學科教師　許技江

壹、　河內塔的起源

1883 年，一位法國的數學家 *Edouard Lucas* 教授在歐洲的一份雜誌上介紹了一個遊戲。這個遊戲名爲河內塔（*Tower of Hanoi*），它源自古印度神廟中的一段故事（也有一說是在越南河內）。傳說在古老的印度，有一座神廟。在廟宇內正中央的一個平台上有三根細柱，另外有六十四張大小不同的平圓盤套在這三根細柱的其中一根上。據古代的傳聞，移動這六十四張圓盤有個規定：大盤不可放在小盤上；一次只能拿起一張圓盤，套在另一根細柱後才可以移動下一張圓盤。若將這六十四張圓盤自一根細柱全部移動到另一根細柱，而且不違反規定，則佛祖及眾神將再度降臨人世，天下太平。

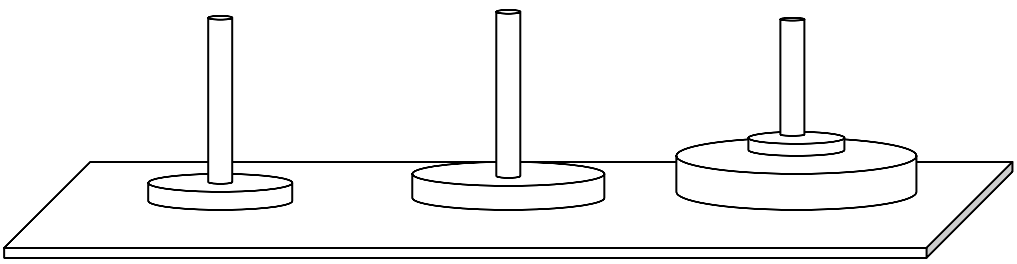


貳、 移動河內塔之規則

基本河內塔，有三根柱子。遊戲的開始，是在第一根柱子上，由上到下疊著由小到大的圓盤。每個圓盤大小都不一樣。

遊戲的玩法是，一次移動一張圓盤，拿起某一根柱子上的最上面的圓盤，放在別的柱子上。但是限制條件是，大圓盤不可放在小圓盤上，小圓盤可以放在大圓盤上。放好手上的圓盤後，才能拿起另一張圓盤。

遊戲的最終目標是，把所有的圓盤，都移到與開始不同的另一根柱子上（全部圓盤都在同一柱），就算結束。



參、 河內塔移動方式之研究方向

依照遞迴數列之概念，可以計算出，有 n 層圓盤時，「最少」需要(2^n-1)次移動才能完成。以下提出簡易證明：

證明：設數列< a_n >，a_n 表示移動 n 層完畢時所需的最少步數。

明顯知道，移動一層僅需一步，故 $a_1 = 1$。

總共有 n 層時，若要移動第 n 層，則需先將上面的 $(n-1)$ 層全部先移動到另外的第二根柱子（需 a_{n-1} 步），然後移動第 n 層到第三根柱子（1 步），再把第二根柱子的 $(n-1)$ 層全部移動到第三根柱子的第 n 層上面（需 a_{n-1} 步）。這樣就完成了。

可知 $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$，得 $a_n = 2\,a_{n-1} + 1$。

我們來處理這個式子：由 $a_n = 2\,a_{n-1} + 1$，得 $a_n + 1 = 2\,(a_{n-1} + 1)$

故 $a_n + 1 = 2\,(a_{n-1} + 1) = 2^2\,(a_{n-2} + 1) = \ldots = 2^{n-1}\,(a_1 + 1) = 2^n$

所以 $a_n = 2^n - 1$，即移動 n 層最少需要 $(2^n - 1)$ 步。

但是，這裡要強調的是「最少」。因爲如果沒有一套移動模式，可能在移動過程中，發現與預期不符，而會做復原前幾步的動作，就增加了步數。當然，所有的移動，都是符合河內塔的兩大規則：（一）一次移動一層；（二）小圓盤不能放在大圓盤之上。

我們的研究重點有幾項：

一、如何能符合規則，又能以最少的步數完成？

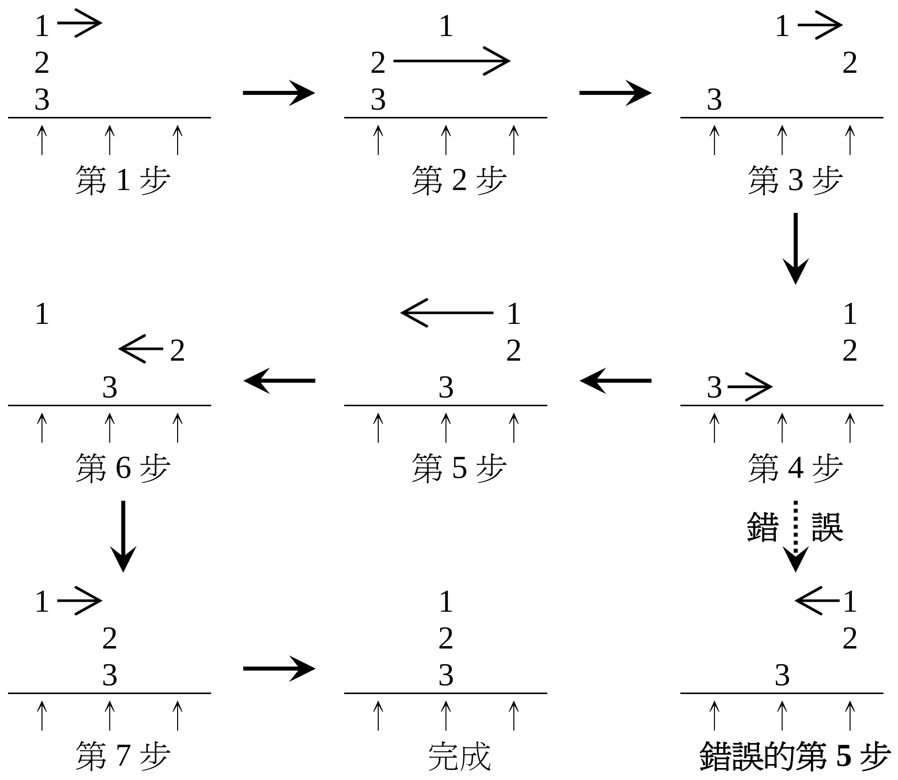
二、如果已經進行到一半，由其他人接手繼續，但移動者不知道之前是如何移動的。如何判斷下一步該移動哪一個？能否把剩下的部分，最少步數預先算出？

三、如何綜合所有的想法，實際應用在操作上面？

此處研究的範圍，鎖定在最簡單、最基本的河內塔。若增加爲四柱以上，或使用兩種顏色以上的圓盤，或增加新的規則，則不在本文的研究範圍。

肆、 歸納研究基礎成果

範例 1：三層河內塔的移動情形：以數字表示，較小者表示小圓盤。各數字維持同一高度（不像實際圓盤放在柱底），以利觀察。



一、　奇數偶數規則

請注意觀察範例 1 的每一步移動的第幾層號碼，及該層會放在哪一層上面。第一步是第 1 層放在第二柱（空柱），第二步是第 2 層放在第三柱（空柱），第三步是第 1 層放在第三柱的第 2 層上面，第四步是第 3 層放在第二柱（空柱），…。

仔細觀察，會發現幾個規則：

1.一層不會連續移動兩次。因為連續移動兩次的結果跟移動一次的效果是一樣的。移動兩次只是增加步數而已。所以要判斷正確，不要作虛工。

2.一開始一定是移動第 1 層。至於要把第 1 層移動到哪一根柱子，則依照總層數來決定：總層數為奇數層，則第 1 層先移動到第二柱；總層數為偶數層，則第 1 層先移動到第三柱。這裡的前提是：一開始所有層都在第一柱，最後全部要移動到第二柱。如果前提不同，則請依照本文後面「伍、進階移動法」之「一、判斷開始法」來決定。

3.自開始第 1 層移動後，就只有在結束時，才會有兩個空柱。所以中間過程最多只有一個空柱，最少是沒有空柱。仔細觀察第 1 層，當它移動後，接下來必定是除了第 1 層所在的柱子之外，剩下兩柱之間移動，而且是把小層移到大層上，或把小層移到空柱上。而接著三柱個別的最高層中，最大層不可能壓在其他柱的小層上，除了第 1 層之外的小層剛剛移動過了，也不會立即再動，如果是空柱也沒有東西搬動，所以必定是輪到第 1 層移動。也就是說，**每兩次就有一次移動第 1 層**。

4.留意一下最少次數的移動情形，發現若現在不是移動第 1 層，則只有小層移到

大層上，或小層移到空柱上兩種可能。這兩種都不可能出錯誤，因爲限制選擇。唯一可能會有多種選擇的，就只有在移動第 1 層的時候，因爲它最小，所以可以放在任何柱上。如何判斷第 1 層的移動呢？除了前述第一步判斷第 1 層移動到哪一個空柱的原則之外，在中間的過程中，第 1 層必定放在偶數層上，或空柱上！看一下範例 1 即可明瞭。第一層是不能放在第 3 層上面的，因爲這樣是錯誤步，會增加步數。

5.最後歸納結論：奇數層會放在偶數層上（或空柱上），偶數層會放在奇數層上（或空柱上）。如果發現偶數層下面一層也是偶數，或奇數層下面也是奇數層，那就代表前面移錯了！每兩次就有一次移動第 1 層。而不論是第 1 層還是其他層，記得奇數層會放在偶數層上（或空柱上），偶數層會放在奇數層上（或空柱上）的原則，就會簡單地以最少步數完成。

這像俗稱的「同性相斥，異性相吸」的道理。

	1	
		2
3		
	4	
		5
		6
	7	
↑	↑	↑

正確的一種狀況

	1	
		2
3		
	4	
		5
		6
7		
↑	↑	↑

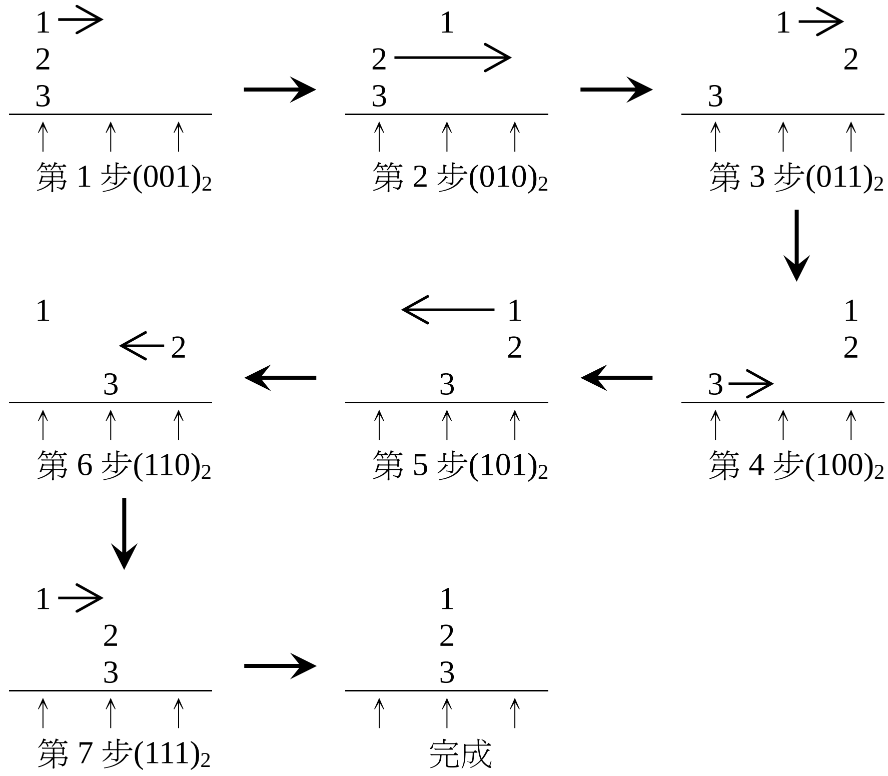
錯誤的一種狀況

從上到下，奇數偶數應該交錯排列。即奇數的下面是偶數，偶數的下面是奇數。

二、　二進位對照步數法

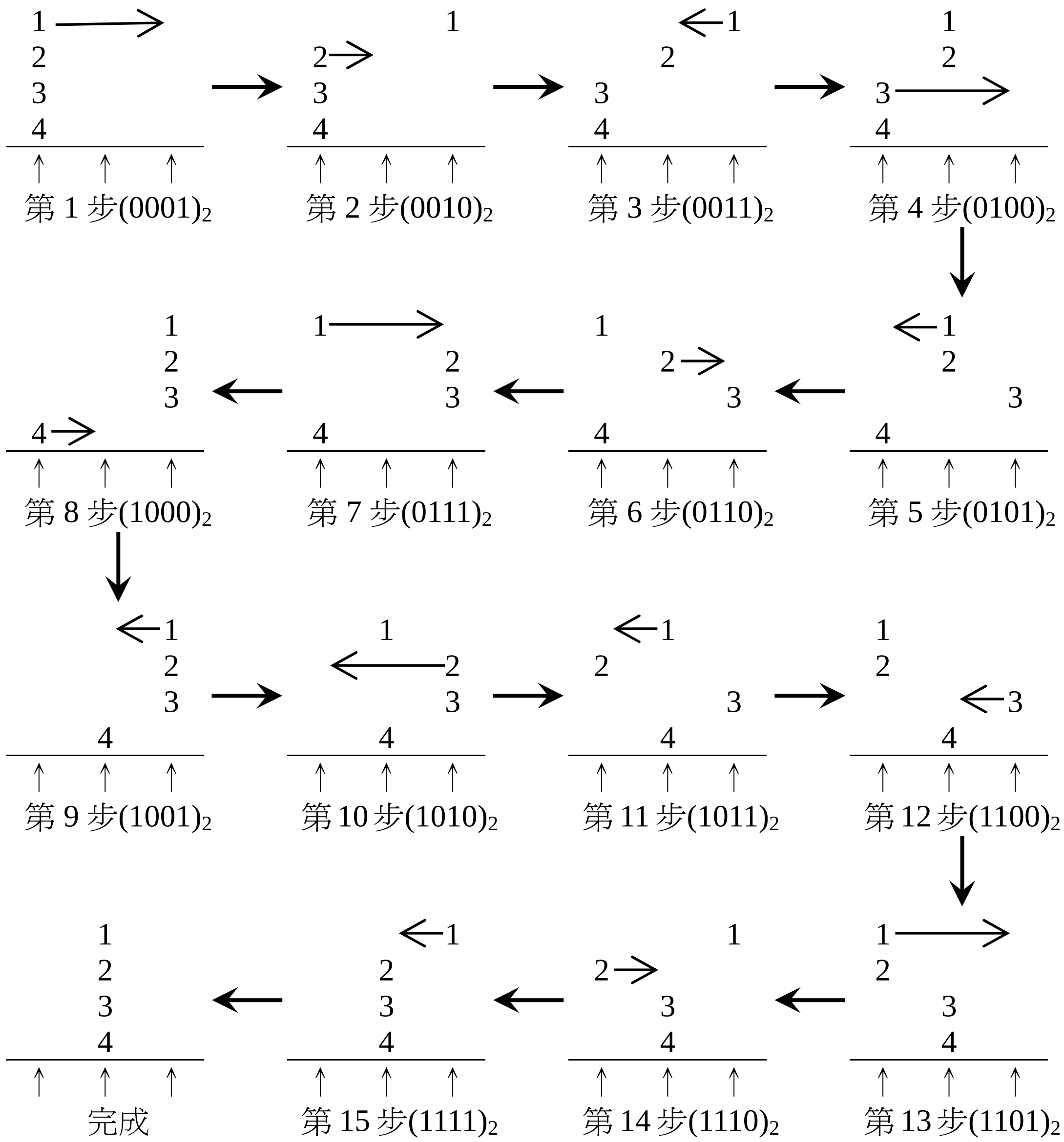
請再看一下範例 1，這次加入了步數的二進位表示法：（範例 2）

範例 2：三層河內塔的移動情形（步數轉換成二進位表示法）



注意觀察步數二進位表示法，例如第二步$(010)_2$變成第三步$(011)_2$，二進位從 010 變成 011，變動的是最後一位。若我們以最後一位表示第 1 層，中間位表示第 2 層，第一位表示第 3 層，則最前面變動的位數，代表要移動這一層！例如第二步$(010)_2$變成第三步$(011)_2$，就是第 3 步要移動第 1 層。例如第三步$(011)_2$變成第四步$(100)_2$，則是第 4 步要移動第 3 層（變動的最前面一位代表的層數）。請看範例 3。

範例 3：四層河內塔的移動情形（步數轉換成二進位表示法）



請同時對照奇數偶數規則，及步數二進位表示法對照移動層數，看看是否符合規則？

前一個介紹的「奇數偶數規則」，好處是知道如何移動是正確的，缺點是移動到一半時，若思緒中斷，會不知到如何移動是正確的。而二進位對照步數法的好處是知道該移動的是哪一層，缺點是不知道如何移動是正確的。所以兩法合併運用，可以互補缺點。

三、 12、13、23 移動規則

這是我所發現最簡單的移動規則。每一步的共通點是，受觀察的兩柱，最上面的較小的層移到較大層的那一柱去。

先決定好一開始的第 1 層要移到哪一柱去。在範例的三層中，第一步爲第 1 層要從第一柱移到第二柱去，標示爲 12（第一柱與第二柱）。第二步爲第 2 層從第一柱移到第三柱去，標示爲 13（第一柱與第三柱）。第三步爲第 1 層要從第二柱移到第三柱去，標示爲 23（第二柱與第三柱）。第四步爲第 3 層要從第一柱移到第二柱去，標示爲 12（第一柱與第二柱）。第五步爲第 1 層從第三柱移到第一柱去，標示爲 13（第一柱與第三柱）。……所以從頭開始，剛好標示的順序爲 12、13、23、12、13、23、…循環，只要保持小層到大層的原則，不需管奇數偶數，不需管步數，相當容易。

同樣的觀察範例 3 的四層中，第一步標示爲 13，第二步標示爲 12，第三步標示爲 23，…。則爲 13、12、23、13、12、23、…的循環。

所以第 1 層第一次是移動到第二柱，則爲 12、13、23、…循環。第 1 層第一次是移動到第三柱，則爲 13、12、23、…循環。

這個方法相當簡單。從一開始只要心中默數現在是哪兩柱在比較，就能用機械式移動而不需要判斷及花費太多思考。

伍、 進階移動法

這裡與前面「肆、歸納研究基礎成果」的最大差別是：「歸納研究基礎成果」所介紹的，是從一開始所有層都在同一柱上，要將全部層移動到另一根柱子上。而「進階移動法」是開始之前已經移動過幾步了，而且可能有「犯錯」，會多增加幾步；我們要如何接手，繼續把所有層都移動到同一柱上呢？而且若可以選擇最後要移動到那一根柱子，那麼該如何決定第一步？同時在移動之前，希望可以預先把剩下的最少步數算出來。如果移動到一半忘記了，可以馬上判斷要如何繼續爲最少步驟方法。當然這裡的方法也可以從所有層都在第一柱的標準開始時就使用。

一、判斷開始法

如果是移動到一半才接手，而且指定要到第三柱，或是回到第一柱，那該如何判斷接著要走哪一步呢？

首先，我們來看幾點移動時的想法：（暫時忽略上面的 $1 \sim (n-1)$層）

(1)

n
$n+1$
↑ ↑ ↑
一 二 三

第 $(n+1)$ 層如果要移動到第二柱，則必須先將第 n 層移動到第三柱。同理，若第 $(n+1)$ 層要移動到第三柱，則必須先將第 n 層移動到第二柱。

(2)

n
n+1
↑ ↑ ↑
一 二 三

第 $(n+1)$ 層如果要移動到第二柱，則必須先將第 n 層移動到第三柱。同理，若第 $(n+1)$ 層要移動到第三柱，則第 n 層必須維持不動在第二柱。

(3)

n
n+1
↑ ↑ ↑
一 二 三

第 $(n+1)$ 層如果維持不動，則第 n 層也維持不動。

(4)

n
n+1
↑ ↑ ↑
一 二 三

第 $(n+1)$ 層如果維持不動，則第 n 層要移動到第一柱第 $(n+1)$ 層上面。

這四個原則，很像成語「趨吉避凶」。如果第 $(n+1)$ 層要移動，則第 n 層要避開第 $(n+1)$ 層移動之出發柱和目標柱的兩根柱子（避凶）。如果第 $(n+1)$ 層不移動，則第 n 層要移動到（或維持在）第 $(n+1)$ 層的上面（同一柱子）。（趨吉）

關於上述 (3)、(4) 的理由爲：

第 $(n+1)$ 層不移動的原因，是有比第 $(n+1)$ 層更大的層，要在第二柱與第三柱之間移動（非第 $(n+1)$ 層所在之柱）。所以第 $(n+1)$ 層要避開第二柱與第三柱，這樣第 n 層也要避開第二柱與第三柱，故移動到（或維持在）第 $(n+1)$ 層的上面。

還有一種可能，是最後第 $(n+1)$ 層及更大層已經完成（都已在最後目標柱上），則第 n 層要移動到（或維持在）第 $(n+1)$ 層的上面，以完成最後階段。

所以綜合(1)、(2)、(3)、(4)的原則，歸納出兩個想法：

(1)若第 $(n+1)$ 層要移動，則第 n 層要避開。

(2)若第 $(n+1)$ 層不移動，則第 n 層要移到第 $(n+1)$ 層上面。

我們利用這個想法來判斷下面例子的第一步。從最大層開始，接著判斷第二大層、第三大層、……，一直到第 1 層。

範例 4：一開始狀態如右圖。

依照奇數偶數原則，可知從一開始移動到右圖的情形，是有移動錯誤的狀況。但是我們不需要知道那裡錯了，只要依照目前的狀況來判斷即可。

1
2
3
4
5
↑ ↑ ↑
一 二 三

(一)如果全部要移動到第二柱，則：

(1)第 5 層要移動到第二柱（最後目的地）。

(2)第 4 層要避開第 5 層，所以留在第三柱不動。

1
←2
3→
4
5→
↑ ↑ ↑
一 二 三

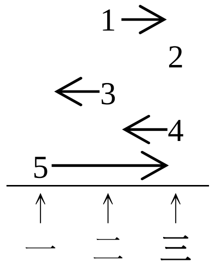
(3)第 3 層要移動到第三柱第 4 層上面（因第 4 層不動）。

(4)第 2 層要避開第 3 層，所以要移動到第一柱。

(5)第 1 層要避開第 2 層，所以留在第二柱不動。

所以第一步，是把第 2 層移動到第一柱。

(二)如果全部要移動到第三柱，則：



(1)第 5 層要移動到第三柱（最後目的地）。

(2)第 4 層要避開第 5 層，所以要移動到第二柱。

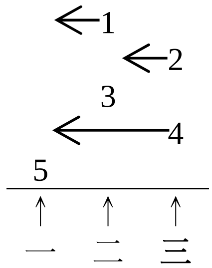
(3)第 3 層要避開第 4 層，所以要移動到第一柱。

(4)第 2 層要避開第 3 層，所以留在第三柱不動。

(5)第 1 層要移動到第三柱第 2 層上面（因第 2 層不動）。

所以第一步，是把第 1 層移動到第三柱。

(三)如果全部要移回到第一柱，則：



(1)第 5 層留在第一柱不動（最後目的地）。

(2)第 4 層要移動到第一柱第 5 層上面（因第 5 層不動）。

(3)第 3 層要避開第 4 層，所以留在第二柱不動。

(4)第 2 層要移動到第二柱第 3 層上面（因第 3 層不動）。

(5)第 1 層要避開第 2 層，所以要移動到第一柱。

所以第一步，是把第 1 層移動到第一柱。

可以發現，一開始的選擇只有三種：

(1)第 1 層不動，第 2 層移到第一柱。

(2)第 1 層移動到第三柱。

(3)第 1 層移動到第一柱。

剛好每一種分別都達到最後移動到三個不同柱子的結果。所以決定好第一步，接著就順著做下去即可。這樣必定是最少步數完成。

要特別注意一點：因爲之前可能有發生錯誤，所以，**奇數偶數規則**在此種情形的移動過程中，**並不適用！**

如果繼續做下去，到一半又忘記了，或是懷疑是否正確時，只要再判斷一次，就可以決定下一步。當然，並不需要每一步都判斷。比較可能出錯的，大概是移動第 1 層的時候，因爲它可以放在任何一層上面。其他層因爲受到第 1 層的限制（不能放在第 1 層上面），所以只能移到非第 1 層所在的另一根柱子。如果前面沒有錯誤移動，則這裡應該也不會出錯。

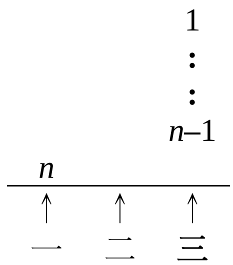
二、計算剩餘最少步數

前文提過，有 n 層圓盤時，「最少」需要(2^n-1)次移動才能完成。而如果已經移動幾步了，則不論對錯，已經移動了幾步，剩下到完成的步數，應該比

(2^{n}–1)少或相等，不可能更多。我們要如何在開始繼續移動之前，計算最少步數出來呢？

如同前面「一、判斷開始法」的方式，我們來思考第 1 到第 n 層：

如右圖，第 n 層要從第一柱移到第二柱，而第 1 至第 $(n-1)$ 層都已預先移至第三柱。

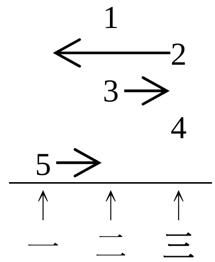


第 n 層移到第二柱為一步，再將第 1 至第 $(n-1)$ 層都移至第二柱第 n 層上面，需要(2^{n-1}–1)步。所以從輪到第 n 層移動後，到第 1 至第($n-1$)層都移至第 n 層上面，總共需要 2^{n-1} 步。

如果在右圖中，第 n 層不動，則我們只需繼續考慮第 $(n-1)$ 層。

請來看看範例 4 的情形，以上述的方法來判斷：

範例 5：如右圖，如果全部要移動到第二柱，則：



(1)第 5 層要移到第二柱，要先將第 1 到 4 層都移到第三柱（這部分的步數由(2)～(5)來計算）。第 5 層移到第二柱需一步，接著第 1 到 4 層從第三柱移到第二柱第 5 層的上面，需要 2^4–1 = 15 步。所以，從第 5 層開始移動，到第 5 層以上都移到與第 5 層同一柱（結束），共需 2^4 = 16 步。

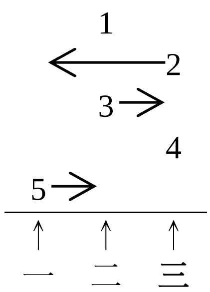
(2)為了要讓第 5 層移到第二柱，所以要先將第 1 到 4 層都移到第三柱。而第 4 層留在第三柱不動。所以這部分第 4 層沒有增加步數。

(3)第 3 層要移到第三柱第 4 層的上面，要先將第 1 到 2 層都移到第一柱（這部分的步數由(4)～(5)來計算）。第 3 層移到第三柱需一步，接著第 1 到 2 層從第一柱移到第三柱第 3 層的上面，需要 2^2–1 = 3 步。所以，從第 3 層開始移動，到第 3 層以上都移到與第 3 層同一柱，共需 2^2 = 4 步。

(4)為了要讓第 3 層要移到第三柱，所以要先將第 1 到 2 層都移到第一柱。移動第 2 層需一步，然後第 1 層移到第一柱第 2 層的上面，需要 2^1–1 = 1 步。所以，從第 2 層開始移動，到第 2 層以上都移到與第 2 層同一柱，共需 2^1 = 2 步。

(5)第 1 層要避開第 2 層，所以留在第二柱不動。這裡沒有增加步數。

我們把上述的想法轉換成計算方式如下：



第 1 層不動：0 步	0	0
第 2 層以上移動完成：2^1 = 2 步	1	1
第 3 層以上移動完成：2^2 = 4 步	1	1
第 4 層不動：0 步	0	0
第 5 層以上移動完成：2^4 = 16 步	1	1

總共 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22 步

我們轉換成二進位的方法：從下往上（大層到小層），要動記爲 1，不動記爲 0。則上面的例子記爲二進位爲 $(10110)_2 = 22$ 步。此爲最少步數。

同樣的，如果

1→ 1
2 0
←3 1
←4 1
5⟶ 1
↑ ↑ ↑
一 二 三
全部要移動到第三柱，
則需 $(11101)_2 = 29$ 步

←1 1
←2 1
3 0
←—4 1
5 0
↑ ↑ ↑
一 二 三
全部要移回到第一柱，
則需 $(01011)_2 = 11$ 步

也許，一開始所有的 n 層並不是都在第一柱上。但是，如果判斷出來每一層都要動，則需要 $(111\ldots1)_2 = 2^n-1$ 次。所以任何情況，全部 n 層的移動不會超過 (2^n-1) 次。

三、綜合所有規則運用在實際操作上面

這裡把前面所介紹的方法作統一整理，在實際實物操作上來應用。

（一）我們來回顧一下前面「一、判斷開始法」所說的：

(1)若第 $(n+1)$ 層要移動，則第 n 層要避開。

(2)若第 $(n+1)$ 層不移動，則第 n 層要移到第 $(n+1)$ 層上面。

所以利用這兩點，可以判斷出第一次的移動，移動完後再用這兩點判斷下一步的移動。當然，每次都要判斷，是很辛苦的。所以，通常是移動到一半，懷疑是否有錯誤，想要確認時，或是不知道下一步該如何移動時，再來作判斷即可。

（二）還記得前面「肆、歸納研究基礎成果」所介紹的「奇數偶數規則」及「12、13、23 移動規則」嗎？若一開始時，所有層並不是都在同一柱子上，則這兩個規則無法使用，除非是標準狀態。所謂「**標準狀態**」，是指目前雖然並不在同一柱子上，但是各層的數字，符合奇數、偶數規則，也就是奇數層的上面是偶數層，偶數層的上面是奇數層，如此交錯排列。這種「標準狀態」，就可以使用「奇數偶數規則」及「12、13、23 移動規則」。

如右圖，暫時不管要移動到哪一柱子。從第 1 層開始以奇數偶數規則判斷，發現第 1 到 4 層均為標準狀態，但第 5 層為非標準狀態（因為第 5 層上面是第 3 層為奇數），第 5 層以下不需考慮，均視為非標準狀態。

一	二	三	
		1	←(1)標準狀態
2			←(2)標準狀態
	3		←(3)標準狀態
		4	←(4)標準狀態
	5		←(5)非標準狀態
	6		以下均非標準狀態
7			

所以在開始移動的時候，在第 5 層（非標準狀態）之前的第 1 到 4 層（標準狀態），均採用「12、13、23 移動規則」。到第 5 層時，採用判斷出來的修正移法，使之移動後成為標準狀態。這時第 1 到 5 層都算標準狀態，都可採用「12、13、23 移動規則」。同理到第 6 層修正移動後，也加入標準狀態。直到最後第 7 層都修正後成為標準狀態時，就可以使用「12、13、23 移動規則」移動到完成了。如果某層是不動的，而比此層小的層都已修正成標準狀態，則此層自動成為標準狀態。

這種方法，可能要記得從哪一層開始為非標準狀態，但是實際上不記得也沒關係。只要判斷好第一步，後面就可以順著走下去。下面介紹一種想法，隱含著前述的「標準狀態」及「奇數偶數規則」，會更容易判斷，更能快速來決定移動法。

（三）在前面「奇數偶數規則」中有提到：「**每兩次就有一次移動第 1 層**」，而且不論一開始是全部都在第一柱，還是分散各柱；也不論是否為標準狀態，只要後面是經過判斷無錯誤的移動，每兩次就有一次移動第 1 層。而其他層不能放在第 1 層上面，所以只能在除了第 1 層之外的兩柱間移動。如果之前沒有錯誤，那麼非第 1 層的移動，受到限制選擇，也不會有錯。唯一容易出錯的，就是移動第 1 層！請看下面範例 6：

範例 6：在圖中的狀態，目前輪到把第 3 層從第一柱移動到第二柱，由左圖變成右圖。請問，接著應該把第 1 層移動到第一柱第 5 層上面？還是第二柱第 3 層上面呢？

一	二	三
		1
		2
3→		
		4
5		

⟶

一	二	三
?←	?←	1
		2
	3	
		4
5		

前面有提到，只要經過「判斷開始法」判斷過後，移動的方法都是正確的。某一層也許一開始不是標準狀態，但是只要一移動，就是修正成標準狀態。所以在範例 6 中，移動第 3 層，已把第 3 層修正為標準狀態，所以根據奇數偶數原則來判斷，第 1 層是不能在第 3 層上面的（但未修正時，即第 3 層非標準狀態時，則不能以奇數偶數原則來判斷，例如範例 6 中的第 5 層）。所以，應該把第 1 層移到第一柱第 5 層的上面。

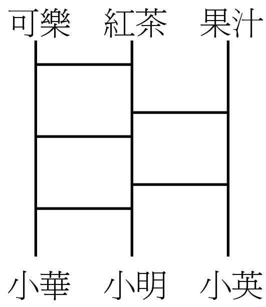
由前面分析可知，可能會出錯的大部分是在第 1 層。在第 n 層移動過後，接

著必定是移動第 1 層。而第 1 層的移動，由第 n 層來判斷：如果 n 是奇數，則第 1 層移動到非第 n 層的柱子；若 n 是偶數，則第 1 層移動到第 n 層的上面。這樣，應該很容易判斷吧！就是把移動的第 n 層視爲標準狀態（其實就是標準狀態）。所以判斷第 1 層，只要根據剛剛移動的第 n 層來判斷即可，不需理會標準狀態。

四、倒逆分析：終點在那一柱上？

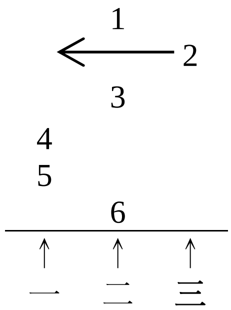
在範例 4 得分析中，會發現三種不同的開始，會得到三種不同的結果：移到第一柱、移到第二柱、移到第三柱。這有點像鬼腳圖。

在範例 7 中，如果一開始是將第 2 層移動到第一柱，則依上述原則沒有浪費步數的話，最後會移到哪一柱上？

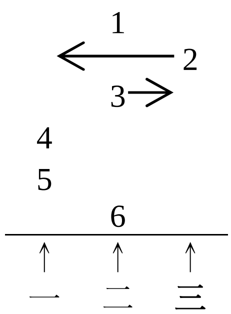


鬼腳圖

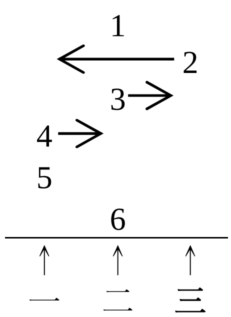
範例 7：一開始是將第 2 層移動到第一柱。



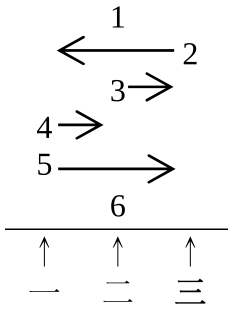
←(1)第 2 層要移到第一柱，表示第 2 層要避開第 3 層，故第 3 層要移到第三柱



←(2)第 3 層要移到第三柱，表示第 3 層要避開第 4 層，故第 4 層要移到第二柱



←(3)第 4 層要移到第二柱，表示第 4 層要避開第 5 層，故第 5 層要移到第三柱



←(4)第 5 層要移到第三柱，表示第 5 層要避開第 6 層，
故第 6 層要移到第一柱

最後所有層都要移到第一柱上。

倒逆分析容易與判斷開始法搞混，所以要釐清觀念：「倒逆分析」爲「判斷開始法」的逆向思考，兩者並不相同。

陸、　結論及心得

本文介紹了奇數偶數規則、二進位對照步數法、12、13、23 移動規則、判斷開始法、綜合所有規則運用在實際操作上面、倒逆分析等等規則。這些方法，都是基於最基本的河內塔。在開始研究時，應該從最基本的著手。有了具體結論之後，再來進行擴展。最後得到各項結論，能夠相輔相成，對實際操作時有幫助。

而從「最少步驟」的限制原則，即可在操作中觀察出一些規則，並進而推導移動模式及計算公式。這些都應該以實物操作，比較容易得到結論。有實物容易激發想像、尋找共同點，及歸納結果。如果沒有河內塔的道具可以操作，則可以用其他物品來模擬代替。

勿因爲覺得這項遊戲過於簡單，而忽略了其中的變化及奧妙。只要有心，有條理地研究，必能得到一番大道理。