§3–3 數學歸納法與遞迴數列

(甲)數學歸納法

(1)歸納法：

研究一個科學問題時，歸納法是很常用的方法，而歸納法常常從觀察開始。一個生物學家會觀察鳥類、昆蟲的生活，一個晶體學家會觀察晶體的形狀，當然一個對數論感興趣的數學家會觀察整數的一些性質。

從幾個例子說起：

例子：對於每個自然數 n，$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots n)^2$ 成立嗎？

例子：對於每個自然數 n，n^2-n+41 都是質數？

例子：任何一個既不是質數也不是質數平方的偶數，是二個奇質數的和嗎？

從這幾個例子，可知經由觀察歸納得到的結果，只是一種猜想，不一定是對的，可是觀察歸納是自然科學中一個重要的手段，因爲這是許多偉大發明的起步。另一方面，即使每一個自然數代入檢查都正確，我們也還不能說這個命題對於所有的自然數都成立，因爲我們不可能將自然數逐一檢查。於是，接下來我們介紹一種方法—**數學歸納法**，可以證明某些性質，對於所有自然數都成立，雖然我們沒有一個一個去檢查。

(2)數學歸納法：

根據文獻記載，最早使用數學歸納法的作品是十六世紀的數學家<u>F.Maurolico</u>(1494~1575)。在 Arithmeticorum Libri Duo 一書中，他首先用數學歸納法來證明下面的例子猜測的結果是正確的。

例子：

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=$？根據觀察 $n=1$，$n=2$，$n=3$ 的結果，我們可能猜測答案是 n^2。但由前面的說明可知在沒有妥善的求證之前，不可遽下定論。

而 F.Maurolico 的方法如下：

設 S_n 表示前 n 個奇數的和，

則 $S_1=1^2$， $S_2=2^2$，$S_3=3^2$，….假設 $S_k=k^2$ 成立，

則 $S_{k+1}=1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=S_k+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$
因此，由 S_1 可推得 S_2，再由 S_2 可推得 S_3，仿此過程我們就可以逐次推得對任何一個正整數 n 恆有 $S_n=n^2$。上面所引用的程序去證明一個推測的結果的方法就稱爲**數學歸納法**。

(3)數學歸納法的形式：

若要用數學歸納法證明「一個與自然數有關的命題 $P(n)$」是真的，有下列的形式：

第一步驟：證明 $P(1)$是真的。

第二步驟：假設 $P(k)$是真的，去證明 $P(k+1)$是真的。

注意：

(a)有時候不一定從 $n=1$ 開始，如果 $P(n)$是 $n\geq m$ 才會是真的，這時候將第一步驟改爲證明 $P(m)$是真的。

(b)不管用哪一個數學歸納法的形式，每一個步驟都缺一不可，我們用兩個例子來說明。

例子：
證明「對於所有非負的整數 n，$n=n+1998$」的過程：
假設 $n=k$ 時上述成立，即 $k=k+1998$。
當 $n=k+1$ 時，$n=k+1=(k+1996)+1=(k+1)+1996=n+1996$。
請問這個證明是否完成了數學歸納法的步驟，問題出在哪裡

例子：
證明：「**對於每一個自然數 n，$F_n=$** $2^{2^n}+1$**均爲質數？**」的過程中，
當 $n=1,2,3,4$ 時，$F_n=2^{2^n}+1$均爲質數，但 $n=5$ 時，$F_5=4294967297=641\times6700417$ 不爲質數。

[例題1] 設 $n\in\mathbf{N}$

(1)利用歸納法求$(1+\frac{3}{1})(1+\frac{5}{4})(1+\frac{7}{9})\ldots(1+\frac{2n+1}{n^2})=$？

(2)利用數學歸納法證明(1)的結果。　Ans：(1)n^2

[例題2] (1)請歸納 $1^3+2^3+\ldots+n^3$ 的結果。

(2)用數學歸納法證明你的結果。

[例題3] 試證：不論 n 是任何的正整數，$10^n+3\cdot 4^n+5$ 都可被 9 整除。

[例題4] 試證：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$

[例題5] 證明：對於任意大於 3 的自然數 n 而言，$2^n \geq n^2$ 恆成立。

(練習1) 試證明：任何 n 個人都一樣高。

(1°)當 $n=1$ 時，命題變爲”任何一個人都一樣高”此結論顯然成立。

(2°)若設 $n=k$ 時，結論成立，即”任何 k 個人都一樣高”

則當 $n=k+1$ 時，將 $k+1$ 個人記爲 A_1、A_2、…、A_{k+1}，由歸納假設，

A_1、A_2、…、A_k 都一樣高，而 A_2、A_2、…、A_k 也都一樣高，

故 A_1、A_2、…、A_{k+1} 都一樣高。

由$(1^\circ)(2^\circ)$根據數學歸納法原理，任何 n 個人都一樣高。

這個例子顯然有誤，但問題出在那裡呢？

(練習2) 試證明：$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+n\cdot(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

(練習3) 設 $n\in\mathrm{N}$，$n\geq 2$

(1)求$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=$？ Ans：$\frac{n+1}{2n}$

(2)利用數學歸納法證明(1)的結果。

(練習4) 根據例題 4 證明：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}$。

(練習5) 當 n 爲自然數時，證明：$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1=n^2$。

(練習6) 試證明：不論 n 是任何的正整數，$10^{2n}+5\cdot 12^n-6$ 都可被 22 整除。

(練習7) 試證對於自然數 n，其中 $n>2$，試證 $5^n>2^n+3^n$。

(乙)遞迴數列

(1)遞迴數列：

某些與自然數有關的問題，往往隱含固定的規律，
處理這一類的問題通常分成三個步驟：
(a)依據題設條件構造一個數列$\{a_n\}$。
(b)建立相鄰幾項之間的遞迴關係式(亦稱遞迴方程式)。
(c)解遞迴方程，求出一般項 a_n。
以上這種處理問題的方法稱爲**遞迴方法**。
簡而言之，遞迴方法就是一種構造遞推式的解題法。

[例題6] 河內塔問題

相傳在創世紀時代，河內(Hanoi)的一座寺廟中豎立著三根銀棒，有 64 個大小都不同的金盤(金盤正中央有一個小孔)「大盤在下，小盤在上」依序套在同一根銀棒上。造物主命僧侶把 64 個金盤全部移到另外一根銀棒上，並且規定：每一次只能移動一個金盤，在移動過程中，較大的金盤不可套在較小的金盤上。當金盤全數搬完，世界末日將降臨，忠誠者得到好報，不忠者受到懲罰。試問搬完 64 個金盤最少需多少次？

[解答]：

(1)構造數列$\{a_n\}$：

設 a_n 代表搬完 n 個金盤所需的最少次數，列表計算，仔細 觀察、歸納：

金盤數 n									…
次數 a_n									

(2)建立遞迴關係式：

[例題7] 兔子問題

假定養兔場中一開始有一對成年的兔子，一個月後生了一對小兔子，而這對小兔子經過一個月就長大成大兔子，此後每對大兔子每月生一對小兔子，而每對小兔子經過一個月就長成大兔子，如果不發生死亡，請問第 n 個月，養兔場中有多少對兔子？

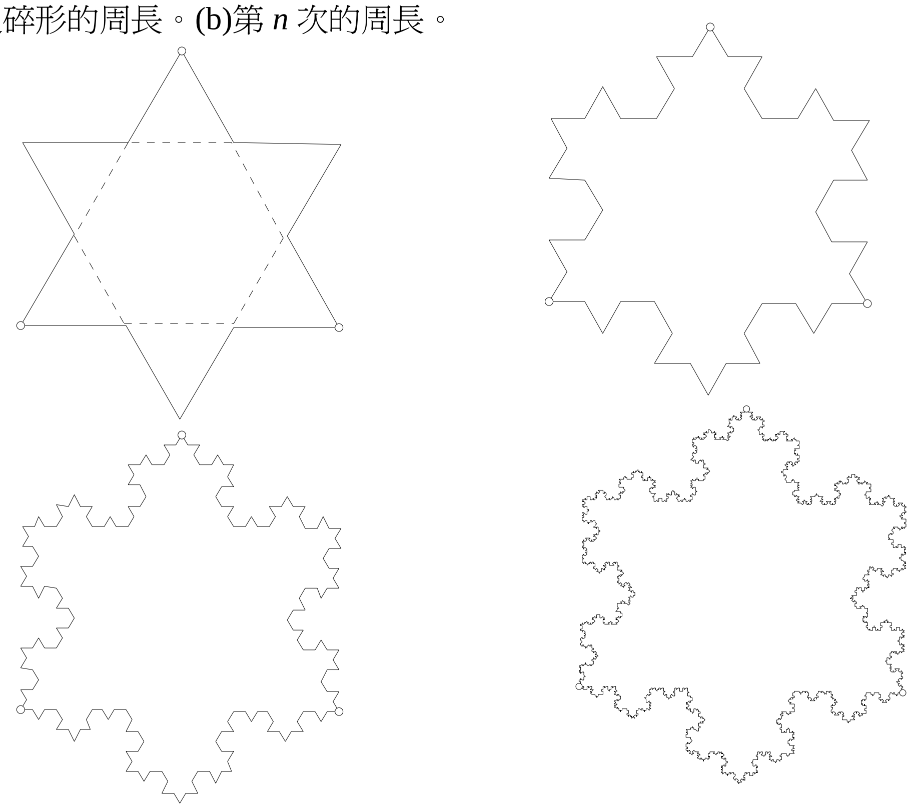
[解答]：

(1)構造數列$\{a_n\}$：設請問第 n 個月，養兔場中有 a_n 對兔子

第 n 個月									…
兔子數 a_n									

(2)建立遞迴關係式：

[例題8] 設ΔABC 是邊長為 1 的正三角形。將三邊分別三等份，取中間段為一邊向外側作一個正三角形，並且將中間這一段擦去，其次將剩下的每一邊再三等份，取中間段為一邊向外作正三角形，再將中間這一段擦去。依此程序繼續下去，得到一系列的圖形，這種自我複製的圖形，稱為**碎形**。試求(a)第 6 次之碎形的周長。(b)第 n 次的周長。



[解答]：

(1)構造數列$\{a_n\}$：設 a_n 代表第 n 個碎形的周長，列表計算，
仔細觀察、歸納：

第 n 個碎形					…
周長 a_n					

(2)建立遞迴關係式：

在上述三個例題中，我們發現數列$\{a_n\}$前後項之間，均有一些關係，我們稱數列$\{a_n\}$爲遞歸數列。

(練習8) 平面上 n 條直線，任兩條都不互相平行，而且任三條都不共點，試問這 n 條直線把平面分割成多少個互不重疊的區域。

(1)構造數列$\{a_n\}$：設 n 條直線將平面分割成 a_n 個互不重疊的區域，列表計算，仔細觀察、歸納：

n 條直線					…
分隔區域 a_n					

(2)建立關係式：

Ans：(2)關係式：$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

(練習9) 給定數列$\{a_n\}$：1,3,6,10,15,21,…，找出 a_n 前後項之間的關係。
Ans：$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

(2)求遞迴數列 a_n 的一般式

(a) $a_{n+1}=a_n+f(n)$ ⇒遞迴相加求 a_n

$a_{n+1}=f(n)\times a_n$ ⇒遞迴相乘求 a_n

(b)$a_{n+1}=\alpha\, a_n+k \Rightarrow$ 設計β,使得 $a_{n+1}-\beta=\alpha\times(a_n-\beta)$

[例題9] 設 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+3n^2$，求 $a_n=$？ Ans：$\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+2)$

[例題10] 設 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=3a_n+1$，求 $a_n=$？ Ans：$\frac{1}{2}(3^n-1)$

[例題11] 一數列$\langle a_n\rangle$定義如下：$a_1=3$，$a_{n+1}=5a_n+4$，n 為自然數，試求 a_n 的一般項，並用數學歸納法加以證明。 Ans：$a_n=4\cdot5^{n-1}-1$

(練習10) (1)有一階差數列 1,5,12,22,35,51,…，

設 $a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=22$，$a_5=35$，$a_6=51$，

考慮 $a_2-a_1=4$，$a_3-a_2=7$，$a_4-a_3=10$，$a_5-a_4=13$，$a_6-a_5=16$，請寫出這個數列的遞迴關係。

(2)求出此階差數列的第 30 項。

(3)求出此階差數列的第 n 項。

Ans：(1)$a_{n+1}-a_n=3n+1$(2)1335(3)$\frac{1}{2}(3n^2-n)$

(練習11) 例題 6 中的和內塔問題中，根據找出的遞迴式：$a_{n+1}=2a_n+1$，

請求出 a_n 的一般項，並用數學歸納法證明。 Ans：2^n-1

(練習12) 給定一個遞迴數列$\langle a_n\rangle$：$a_1=\sqrt{2}$ ，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ (n 為自然數)

(1)寫出 a_2、a_3、a_4。

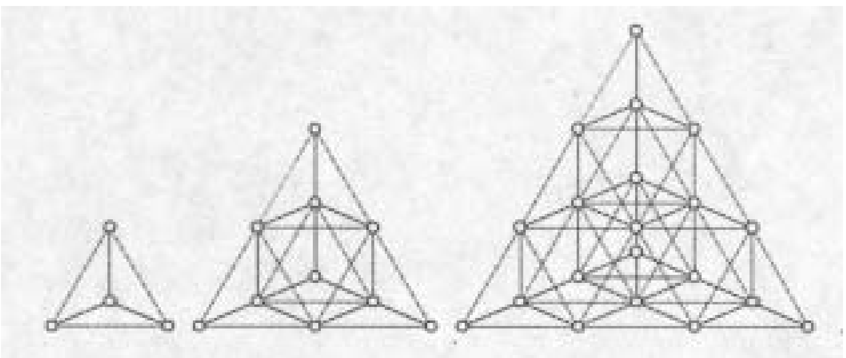
(2)用數學歸納法證明：$a_n<2$ 對一切自然數 n 都成立。

Ans：(1)$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ，$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

綜合練習

(1) 若數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=\frac{1}{7}$，$a_2=\frac{3}{7}$及$a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$ $(n\geq 1)$，則 $a_{101}-a_{100}=$？(92 指定乙)

(2) 用單位長的不鏽鋼焊條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的小圓圈「°」表示焊接點，圖 E_1 有兩層共 4 個焊接點，圖 E_2 有三層共 10 個焊接點，圖 E_3 有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，推算圖 E_5 有六層共有________個焊接點。(91 指定乙)



(3) 試證：$1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+\ldots+n^2\cdot 2^n=(n^2-2n+3)\cdot 2^{n+1}-6$

(4) 證明對於所有的自然數 n

$$\frac{1\cdot 2^1}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 2^3}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$$。

(5) 試化簡$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的值，

並用數學歸納法證明這個結果。Ans：$1-\frac{1}{2n+1}$

(6) 證明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\geq\frac{2n}{n+1}$ ，(n 為正整數)。

(7) 證明不等式：$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，對所有的自然數 n 都成立。

(8) (a)k 是自然數，而且個位數字是 6，請用一個等式表示 k。

(b)請用數學歸納法證明對於任意自然數 n，$2^{4n+1}-6^n$ 的個位數字恆為 6。

(9) 對自然數 n，$3^{2n+1}+2^{n+2}$ 是某一個質數 p 的倍數，試求出 p

並用數學歸納法加以證明。

(10) 設 a 是固定的正數，觀察下列式子：

$(1+a)^1=1+a$，$(1+a)^2=1+2a+a^2\geq1+2a$，$(1+a)^3=1+3a+3a^2+a^3\geq1+3a$，…

試問：對於任意自然數 n，不等式$(1+a)^n\geq1+na$ 是否恆成立？

如果不成立，舉一反例；如果成立，請給出證明。

(11) 有一個數列$\langle a_n\rangle$滿足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+5(n-1)$，試求此數列的第 n 項 a_n。

(12) 一個邊長為 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 a_n 根火柴。

(a)利用歸納法求 $a_{n+1}-a_n$=？

(b)用(a)的結果，求 a_n=？

(c)利用數學歸納法去驗證(a)的結果。

(13) 有一種細胞，每隔一小時死亡 2 個，剩下的每個分別分裂成 2 個，設最初有 7 個細胞，n 小時後細胞有 a_n 個，

(a)請找出 a_n 與 a_{n+1} 的關係。(b)a_n 的一般項。

(c)幾個小時後細胞數目會超過 1000 個。

(14) 平面上 n 條直線，任兩條都不互相平行，而且任三條都不共點，設這 n 條直線把平面分割成 a_n 個互不重疊的區域。

(a)請找出 a_n 的遞迴式。

(b)求 a_n 的一般式。

(c)請用數學歸納法證明(b)的結果。

(15) 設 $a_1=1$，$a_n=(1-\frac{1}{n^2})a_{n-1}$，$n\geq2$，求 a_n=？

(16) 若 $a_1=3$，$5a_{n+1}=3a_n+2$，則 a_n=？ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$=？

(17) 設有一數列$\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$a_{n-1}-a_n=n\cdot a_n\cdot a_{n-1}$ ($n\geq2$)，試求

(a)a_{10}=？ (b)a_n 之一般式 (c)設 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ ，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$=？

進階問題

(18) 求階差數列 1,3,7,15,31,….的第 n 項。

(19) 已知對於任意的 $n\in$N，$a_n>0$，且 $\sum_{j=1}^{n} a_j^3=(\sum_{j=1}^{n} a_j)^2$，求證：$a_n=n$。

(20) 證明：$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2=-n(2n+1)$，$n$ 為正整數。

(21) 觀察下列等式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 1 & = & 1 \\ & & & & 1 & - & 4 & = & -(1+2) \\ & & 1 & + & 4 & + & 9 & = & 1+2+3 \\ 1 & - & 4 & + & 9 & - & 16 & = & -(1+2+3+4) \\ & & \vdots & & & & & & \vdots \end{array}$$

(a)設 n 為自然數，試求 $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2$ 的值。
(b)請用數學歸納法證明(1)的結果。

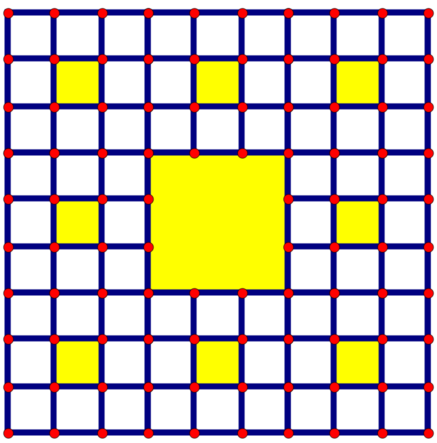
(22) 設數列$\{a_n\}$滿足關係：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_1+a_2+\ldots+a_n=n^2a_n$，$(n\geq1)$。試證：數列 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$。

(23) (a)平面上經過一個定點的 n 個圓最多能將平面分成 a_n 個部分，請問 $a_{n+1}-a_n=$？
(b)請求出 $a_n=$？
(c)請用數學歸納法證明(b)的結果。

(24) 設 $a_1=1$，$a_2=2$ 且對於任意正整數 n 均滿足 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，證明：$a_n>(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n$。

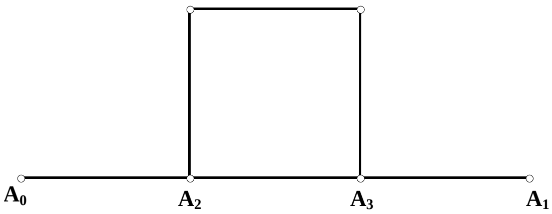
(25) 令 $F(n)=\frac{1}{2^n}(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+n)$，其中 n 為自然數，
(a)試求出 F(1)、F(2)、F(3)，並推測 F(n)的一般式。
(b)請問(a)的結果證明 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{F(k)}<\dfrac{3}{2}$。

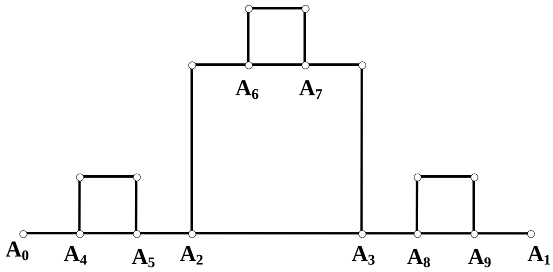
(26) 如圖，一單位長正方形，第一次將其平分成 9 塊(九格宮形)，然後挖去中間一塊。第二次再將剩餘各塊各平分成 9 塊，分別去掉中間各一塊。…
設第 n 次挖去之正方形面積總和為 a_n，請問：(a)$a_n=$？ (b)$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$



(27) 一線段長$\overline{A_0A_1}$ 長度為 1 公尺，第一次將$\overline{A_0A_1}$三等份，並將中間部分往垂直向上方向作一正方形，第二次則是將各水平方向線段(如線段 A_0A_2、A_2A_3 正方形上的邊、A_3A_1)皆如第一次的作法(如圖所示)，如此依序下去，設前 n 次所作的正方形面積總和為 a_n

(a)請用 n 來表示 a_n-a_{n-1}。(b)請用 n 表示 a_n，並求出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=？





(28) 令 $A_n=0.\underbrace{999\cdots9}_{n個9}$，請利用數學歸納法證明 $A_n<1$，對於任何的自然數 n。請問根據這個證明的結果是否推論出$0.\overline{9}<1$，請說明理由。

綜合練習解答

(1) $\frac{3}{7}$

[解法]：

依據遞迴式 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)\quad(n\geq 1)$ 真正去計算 $a_3,a_4,a_5,\ldots$

可得 $a_3=\frac{7}{2}a_2(1-a_2)=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times(1-\frac{3}{7})=\frac{6}{7}$

$a_4=\frac{7}{2}a_3(1-a_3)=\frac{7}{2}\times\frac{6}{7}\times(1-\frac{6}{7})=\frac{3}{7}$

$a_5=\frac{7}{2}a_4(1-a_4)=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times(1-\frac{3}{7})=\frac{6}{7}$，…

由上述操作可發現規律為：k 為奇數時，$a_k=\frac{6}{7}$；k 為偶數時，$a_k=\frac{3}{7}$，$(k>1)$

$\Rightarrow a_{101}-a_{100}=\frac{6}{7}-\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$

(2) 56

[解法]：

設圖 E_k 中共有 a_k 個焊接點，

則 $a_1=1+(1+2)$，$a_2=1+(1+2)+(1+2+3)$，$a_3=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$，…

依此規律可知 $a_5=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+5+6)$

$=1+3+6+10+15+21=56$

(3) 略

(4) 略

(5) 略

(6) 略

(7) 略

(8) (a)$k=10m+6$ (m 是非負整數) (b)設 $n=k$ 時，$2^{4k+1}-6^k=10m+6$，去證明當 $n=k+1$ 時，$2^{4k+5}-6^{k+1}=10m'+6$。

(9) $p=7$

(10) 略

(11) $\frac{1}{2}(5n^2+5n-8)$

(12) (a)$4n+4$ (b)$2n^2+2n$

(13) (a)$a_{n+1}=3(a_n-2)$(b)$3\cdot 2^n+4$ (c)9 小時

(14) (a)$a_n-a_{n-1}=n$　(b)$a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

(15) $\dfrac{n+1}{2n}$

(16) $a_n=1+2(\frac{3}{5})^{n-1}$　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

(17) (a)$\dfrac{2}{10\times 11}$ (b)$\dfrac{2}{n(n+1)}$ (c)2

[提示：遞迴式可化成$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=n$，利用累加的方法，可得$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+2+3+\ldots+n$]

(18) 2^n-1

(19) 略

(20) [提示：當 n 變成 $n+1$ 時，$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2$ 會變成 $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2+(2n+1)^2-(2n+2)^2$]

(21) (a)$(-1)^{n+1}(1+2\ldots+n)=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

(22) 略

(23) (a)$n+1$(b)$1+\dfrac{n(n+1)}{2}$

(24) 設 $n=k-1$，k 時 $a_k>(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^k$ 且 $a_{k-1}>(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{k-1}$，再利用 $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$，

去證明 $a_{k+1}>(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{k+1}$。

(25) (a)$F(n)=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$

(b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F(k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1\cdot3\cdot3\cdots3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{k-1}}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$。

(26) (a)$a_n=\frac{1}{9}(\frac{8}{9})^{n-1}$ (b)1

[解法]：

(a)如圖，

第一次挖去正方形的$\frac{1}{9}$ $\Rightarrow a_1=\frac{1}{9}$。

第二次挖去剩下的$\frac{1}{9}$ $\Rightarrow a_2=\frac{1}{9}\times(1-a_1)=\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}$。

第三次挖去剩下的$\frac{1}{9}\Rightarrow a_3=\frac{1}{9}\times(1-a_1-a_2)=\frac{1}{9}\times(\frac{8}{9})^2$

…..

第 n 次挖去剩下的$\frac{1}{9}\Rightarrow a_n=\frac{1}{9}(\frac{8}{9})^{n-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1/9}{1-8/9}=1$

(27) (a)$3^{-(n+1)}$ (b)$a_n=\frac{1}{6}[1-(1/3)^n]$ ，$\lim_{n\to\infty}a_n=1/6$

[解法]：

(a) $a_1=(\frac{1}{3})^2=3^{-2}$ $a_2-a_1=3\times(\frac{1}{3})^4=3^{-3}$ $a_3-a_2=9\times(\frac{1}{3})^6=3^{-4}\ldots$ $a_n-a_{n-1}=3^{n-1}\times(\frac{1}{3})^{2n}=3^{-(n+1)}$

(b)因爲 $a_2-a_1=3^{-3}$ $a_3-a_2=3^{-4}$ $a_4-a_3=3^{-5}$

…… $a_n-a_{n-1}=3^{-(n+1)}$

累加以上各式可得 $a_n-a_1=3^{-3}+3^{-4}+\ldots\ldots+3^{-(n+1)}$

$\Rightarrow a_n=3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}+\ldots\ldots+3^{-(n+1)}$

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^n]$ 所以$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{6}$

(28) 利用數學歸納法證明應該很容易，但是證明了 $A_n<1$ 這個結果，只是表示對於任意的自然數$0.\underbrace{999\cdots9}_{n個9}<1$，這個結果是對的，但是$0.\overline{9}=\lim_{n\to\infty}A_n$，$A_n<1$， $\lim_{n\to\infty}A_n$ 不一定會小於 1 可能會相等。反例 $a_n=1-\frac{1}{n}<1$，但是$\lim_{n\to\infty}a_n=1$，因此這樣的推論不正確。