

# 怎樣一筆畫？

## 初小組數學科第二名

新竹縣華興國民小學

作者：彭鍬穩、劉志龍

邱子惠、王黎葦

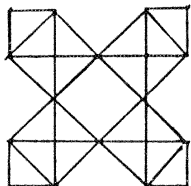
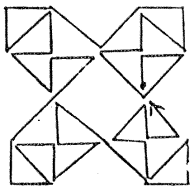
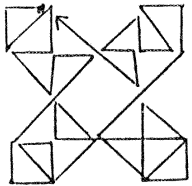
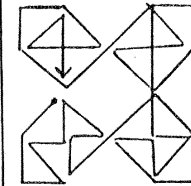
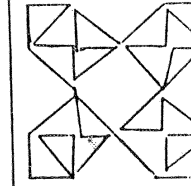
指導教師：陳智華、古富禎

### 一、研究動機

國語日報上有時候會刊載著一種由線段組成的圖形，要我們只用一筆畫，就把這個圖形畫好。每當看到這種題目，班上同學就比賽，看誰畫得對、畫得快。結果我們都能把那些圖形用一筆畫成，但是畫法不一定和報上公佈的「標準答案」完全相同，而且有很多種的畫法。

例如：74年9月12日的題目及我們的畫法如下表。

表一

題 目	我 們 的 畫 法			
				

報上每次刊出的圖形，我們都能用一筆畫成，這使我們產生了幾個疑問？

- (一)是不是任何圖形都可以一筆畫成？
- (二)可以一筆畫的圖形，有沒有秘訣可以很快的畫好？
- (三)那些圖形可以一筆畫好？那些不能？
- (四)不能以一筆畫好的圖形，至少需幾筆才能畫好？

在老師的指導下，我們對上面的問題分別做了研討。

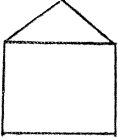
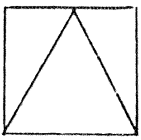
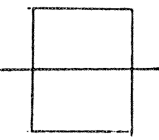
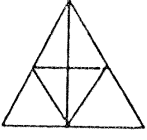
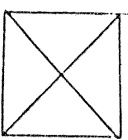
### 二、研究過程

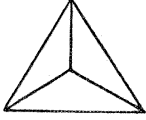
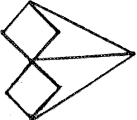
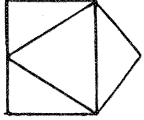

[問題一] 是不是任何圖形都可以一筆畫成?

(一) 首先試試幾個比較簡單的圖形。

下表是同學們提出的圖形 (如表二)

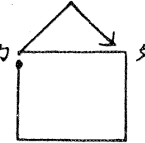
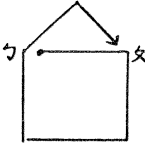
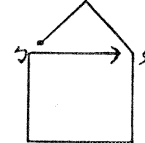
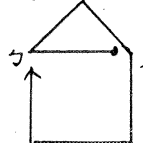
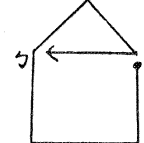
表二

編號	①	②	③	④	⑤
圖形					

編號	⑥	⑦	⑧	⑨
圖形				

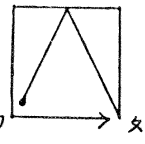
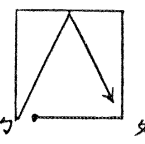
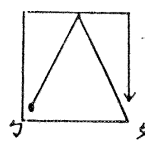
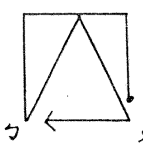
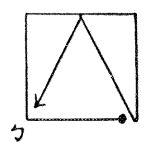
①號圖形經過大家的研討，至少有以下各種畫法 (如表三)

表三

類型	1	2	3	4	5	其他
畫法						省略

②號圖形也有許多種畫法 (如表四)

表四

類型	1	2	3	4	5	其他
畫法						省略

③號圖形的畫法 (如表五)

表五

類 型	1	2	3	4	其 他
畫 法					省 略

④號圖形的畫法（如表六）

表六

類 型	1	2	3	4	其 他
畫 法					省 略

⑧、⑨號圖形也可以一筆畫成。

而⑤⑥⑦三個圖形，不管用什麼方法，都無法一筆畫好。

(二)結果：在表二各圖中，有①②③④⑧⑨號的圖形能一筆畫好，而⑤⑥⑦三個圖形却無法一筆畫成。因此我們可以得到一個結論：「不是任何圖形都能用一筆畫好。」

[問題二]可以一筆畫的圖形，有沒有秘訣可以很快的畫好？

(一)研討一：以①②③④號圖為例

觀察（表三）（表四）（表五）（表六）所列出的各種畫法，可以發現以下特性：

- 1.假如以ㄅ點為起點，則終點是ㄆ點，若以ㄆ點為起點，則ㄅ點是終點。
- 2.各圖中，只有ㄅ、ㄆ兩點是由一條線（③圖）或三條線（①②圖）或五條線（④圖）所交接而成。（我們稱它為奇頂點）
- 3.其他各點由二條線或四條線交接而成（我們稱它為偶頂點）。
- 4.若是由偶頂點為起點，則無法一筆完成。

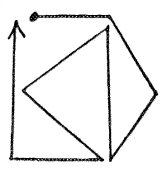
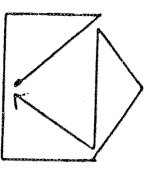
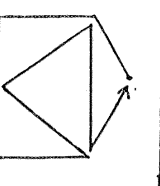
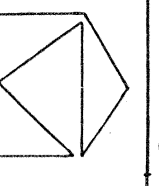
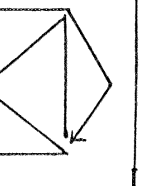
根據①、②、③、④號圖的觀察，我們可以得到一個結果：「一個可以一筆畫好的圖形，若只有二個奇頂點，則一定要以其中一

個奇頂點為起點，才能一筆畫好，並且以另一個奇頂點為終點」

(二) 研討二：





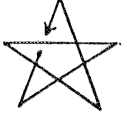
1. 看看⑧號圖形的畫法（表七）

表七

類 型	①	②	③	④	⑤	其 他
畫 法						省 略

2. ⑨號圖形的畫法至少有下列幾種（表八）

表八

類 型	①	②	③	④	⑤	其 他
畫 法						省 略

3. 觀察⑧⑨兩圖的畫法，我們發現有下列共同特性：

- (1) 無論以那個點為起點，都能一筆畫好，同時回到該點。
- (2) 再進一步觀察，發現每一個頂點都是由二條線或四條線交接而成（偶頂點），沒有奇數條線交接而成的頂點（奇頂點）。
- (3) 因此我們可以得到一個結論：「一個圖形，假如頂點都是偶頂點，則能以任一頂點為起點，很快的一筆畫好，並且回到該點」。
- (4) 9月12日國語日報上的圖形，就是這種情形，因此可以從任何一點開始，很快的一筆畫好，並且回到該點。

(三) 綜合討論

一個能以一筆畫完成的圖形，必須依下列規則去畫。

1. 若圖形各頂點都是偶頂點，則以任何一點開始都能很快的一筆畫好，並且以該點為終點。
2. 若圖形有兩個奇頂點，而其他都是偶頂點，則必須以其中一個

奇頂點為起點，而另一個奇頂點為終點，才能一筆畫好。

〔問題三〕那些圖形可以一筆畫好？那些不能？

(一)把表二中各圖形的頂點數（奇頂點或偶頂點）列入下表

類別	能一筆畫好						不能一筆畫好		
	①	②	③	④	⑧	⑨	⑤	⑥	⑦
奇頂點數	2	2	2	2	0	0	4	4	4
偶頂點數	3	3	6	5	6	10	1	0	0

(二)由上表可以發現奇頂點數都是 0 或偶數。

(三)奇頂點數若是 0 或 2，則可以一筆畫好。

(四)奇頂點數若超過 2（如 4、6、8）則不能一筆畫好。

〔問題四〕不能一筆畫好的圖形，至少需幾筆才能畫好？

(一)下面幾個圖形都無法一筆畫好：

圖形	ㄅ	ㄨ	ㄇ
畫法			
最少筆數	3	4	5

(二)ㄅ圖最少需 3 筆，ㄨ圖至少需 4 筆，ㄇ圖至少要 5 筆才能畫好。

(三)回頭看看圖⑤⑥⑦最少都要 2 筆才能畫好。

(四)進一步探討筆數和奇頂點數的關係（如下表）。

圖形	⑤	⑥	⑦	ㄅ	ㄨ	ㄇ
奇頂點數	4	4	4	6	8	10
最少筆數	2	2	2	3	4	5

(五)由上表可以發現，不能一筆畫好的圖形，其需要的最少筆數是它奇頂點數的一半。而且也必須以奇頂點為起點，才能以最少筆數

畫好。

### 三、結 論

綜合這些問題的研討，我們有下列的結論。

- (一)並不是任何圖形都能一筆畫好，要看它所包含的「奇頂點」數目而定。
- (二)如果奇頂點的數目是 0 或 2，則可以一筆畫好，且一定要以其中一個奇頂點為起點，而結束於另外一個奇頂點。
- (三)若頂點都是偶頂點，則可從任何一點開始而回到該點，很快的一筆畫好。
- (四)不能一筆畫好的圖形，所需要畫好的最少筆數是該圖所含奇頂點數的一半。且必須以其中一個奇頂點為起點，才能以最少筆數畫成。
- (五)「一筆畫原理」可應用在一個新社區的道路設計，各街道的交點是「奇頂點」的情形越少越好。則垃圾車繞行街道收集垃圾時，重覆走的路就越少。

### 四、參考資料

- (一)光復圖鑑。
- (二)數字遊戲大觀。

### 評 語

雖然這是已知的後果，但小孩子由遊戲中自己摸索，得到了判定的結果，對此結果有深入的瞭解。