

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：高中組

作品名稱：台東市區垃圾車最佳路徑之探討

關 鍵 詞：旅行銷售員問題、最短路徑

編 號：

摘要

目前台東市區採行沿路清運垃圾的方式，而垃圾清運的方法有很多種，本研究想找出收取垃圾之最佳路徑，規劃出一條更具經濟效益且更有效率的路線。

現行許多大都市都以節點清運為垃圾收取之辦法，垃圾車的路線規劃大多會考量許多不同現實的因素，而本研究僅將節點和最短距離納為考量之條件，首先我們以 2×2 模擬方格路網找尋解法，之後又研究了清潔隊現有的垃圾車路線，綜合以上因素我們選取了台東市區中共 25 個節點作規劃。

節點之線性規劃有許多數學模式能夠解決，而其中較接近本研究之方法為「旅行銷售員問題(TSP)」，本研究將 TSP 之公式經修改後用於節點的計算上，並以「窮舉法」列表計算出各種路徑之成本，經比較後得到了一條最經濟的清運路徑。

壹、 研究動機

在每個城市中，垃圾車扮演著重要的角色，必須要走遍大街小巷收完所有的垃圾，所以我們認為垃圾車的路線一定有特別的規劃、有其數學的道理在其中，於是便著手研究和探討，找出其中的邏輯。

貳、 研究目的

- 一、 設置一 2×2 模擬方格路網並研究其起點至終點之最短路徑，並驗證其可行性
- 二、 規劃台東市區街道最少成本之清運路線

參、 研究設備

紙、筆、GeoGebra 軟體、Google Map、Ur Map

肆、 研究方法和過程

此問題為路線和節點間的探討，假設路段為線，路口為節點，形成一個路網，即為一個節點路線的問題，而在節點路線問題中，最具代表性的則為旅行銷售員問題(Traveling Salesman Problem)。

- 一、 何謂旅行銷售員問題(Traveling Salesman Problem)？

旅行銷售員問題(又稱 TSP)，是一個多局部最優的最優化問題：假設有 n 個城市，一個銷售員要從其中某一個城市出發，每一個城市僅通過一次，最後再回到原來的城市，使旅行過程中的距離或成本最小，其數學模式如下：

設總旅行成本最小為 Z

$$\text{Min. } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

c_{ij} : 城市 i 到城市 j 的旅行成本

x_{ij} : 決策變數 = 0, 上述不成立

= 1, 城市 i 到城市 j 之旅程納入

限制式

(一) 每個節點最多只能離開一次

$$\sum_j^n x_{ij} = 1$$

(二) 每個節點最多只能進入一次

$$\sum_i^n x_{ij} = 1$$

(三) x_{ij} 的規定:

$$x_{ij} = 1 \vee 0$$

而 TSP 的求解可分為最佳求解法和近似速解法，近似速解法無法求出最正確的解且較艱深，所以我們採取的方法是最佳求解法中的窮舉法，我們先將 TSP 的數學式子修改成我們所需的架構之後，先套入一個簡單的模擬方格路網，驗證其可行性後再套入一個實際的市區路線。

二、 模擬方格路網的建立

我們先設置了一模擬方格路網，如圖 1-1 為一 2×2 的簡單方格路網，網格中有 9 個點，每個點即為一個路口，節點之間連接的線段即為連接兩路口之道路，清運的起點為左上角的點(點 1)，此一節點只有兩條路徑可以出去且出發之後就不再回到起點；而終點為右下角的點(點 9)，此點只有兩條路徑可以進入，且一但進入終點後清運任務即中止；而網格中間的中間節點(點 5)為連結各節點之交會點，而其中所有的節點都要經過一次且只能經過一次，當垃圾車由其中一條路徑進入節點之後必不能由原路出去，而須由另一條路徑走出節點至另一節點，原則上垃圾車節點路徑考量的因素除了道路長短之外，還需考量了時間、垃圾量、車次、耗油量等，而我們在此研究中以最短距離(最少成本)為主要條件，所以先以一輛車走完全程，其他因素皆先不考量。

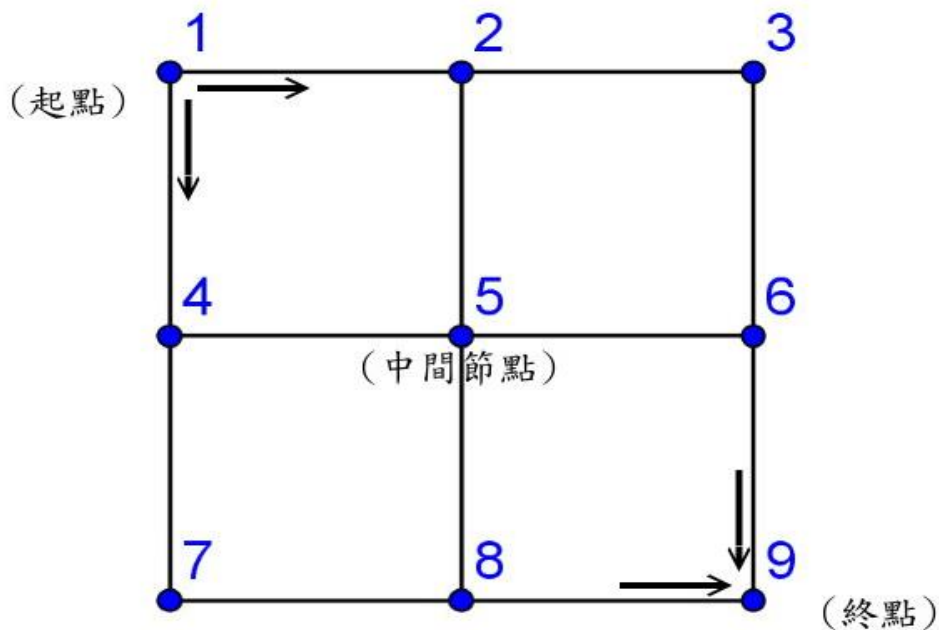


圖 1-1 模擬方格路網

繪出此模擬路網圖之後，我們以 TSP 的公式為基礎，列出了一下的公式來計算路線的走法：

目標函數 Z

$$\text{Min. } Z = \sum_i^n \sum_j^n C_{ij} X_{ij} \quad (i \neq j) \quad (\text{公式 1})$$

限制式：

(一)每個節點最多只能離開一次: (公式 2)

$$\begin{aligned} X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + \dots + X_{1n} &= 1 \\ X_{21} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + \dots + X_{2n} &= 1 \\ X_{31} + X_{32} + X_{34} + X_{35} + \dots + X_{3n} &= 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + X_{n4} + \dots + X_{n,n-1} &= 0 \text{ (終點)} \end{aligned}$$

(二)每個節點最多只能進入一次: (公式 3)

$$\begin{aligned} X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + \dots + X_{n1} &= 0 \text{ (起點)} \\ X_{12} + X_{32} + X_{42} + X_{52} + \dots + X_{n2} &= 1 \\ X_{13} + X_{23} + X_{43} + X_{53} + \dots + X_{n3} &= 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + X_{4n} + \dots + X_{n-1,n} &= 1 \end{aligned}$$

(三)每個節點進入和離開只能擇一: (公式 4)

$$X_{ij} + X_{ji} \leq 1$$

(四)每條路線只有走過和不走兩種選擇：

$$X_{ij} = 0 \vee 1 \quad (\text{公式 5})$$

三、 模擬路網之最佳路徑

圖 1-2 為加入成本後的模擬路網，而求出此模擬方格之最佳路徑還有一種解稱為「最近鄰點法」，此種方法是自起點開始，找尋與其最近的節點做為下一個目的地，以此類推直到走完全程，但是經過測試之後我們發現此種方法會產生迴圈，無法走完全程。

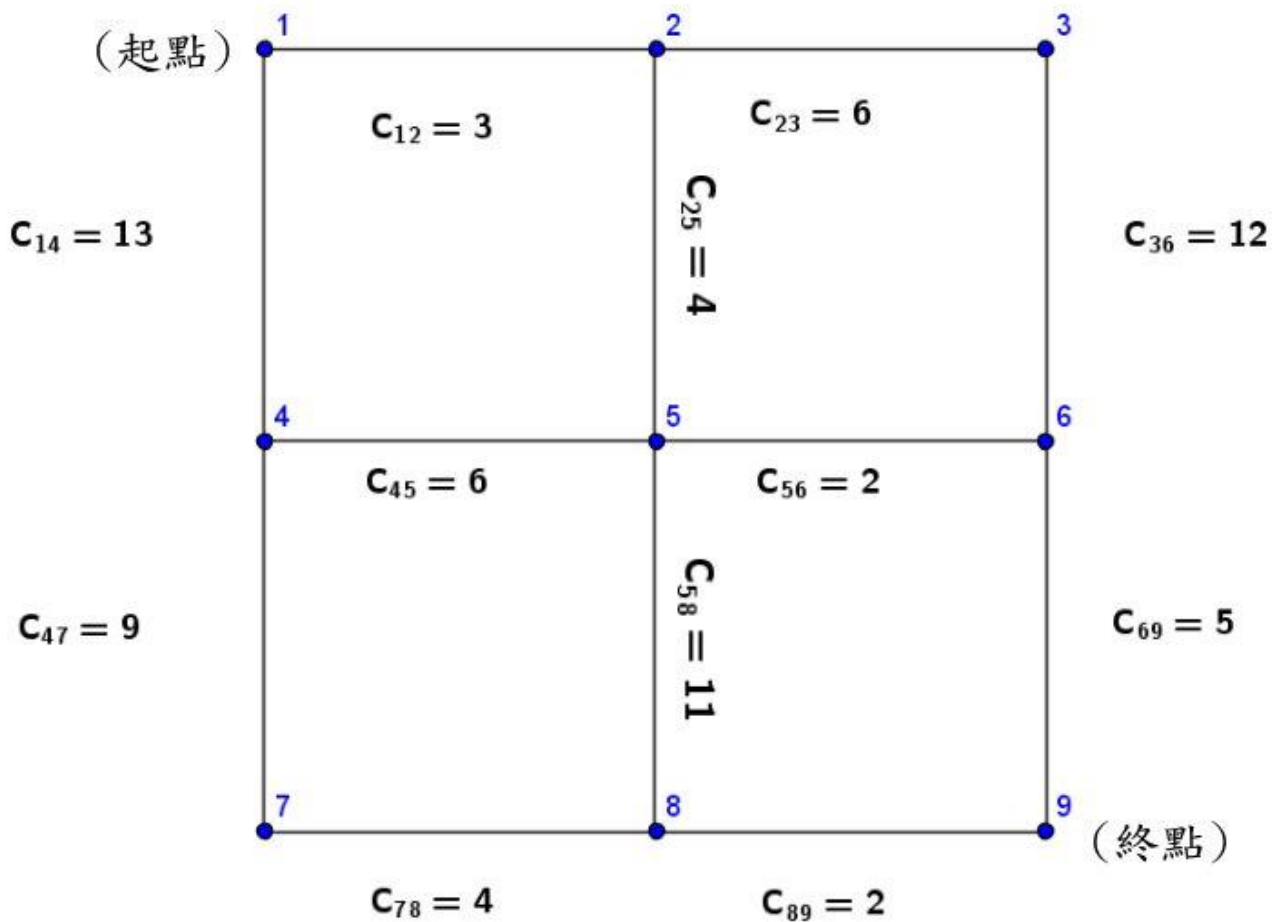


圖 1-2 模擬方格路網(成本)

如下圖 1-3 所示，自點 1(起點) → 點 2 → 點 5 → 點 6 → 點 9(終點)，過程皆依最近鄰點法的步驟，而當其走到終點時，卻還有點 3、4、7、8 沒走到，且在點 4、7、8 間形成了一個迴圈，無法將所有節點都走完，由於道路的長度(成本)常為隨機分布，所以我們認為這種方法不適用於我們的路網中。於是我們使用窮舉法來解決這個問題，我們先將其鄰近和非鄰近節點間的距離列表做計算，再將每一條路線列出比較成本。

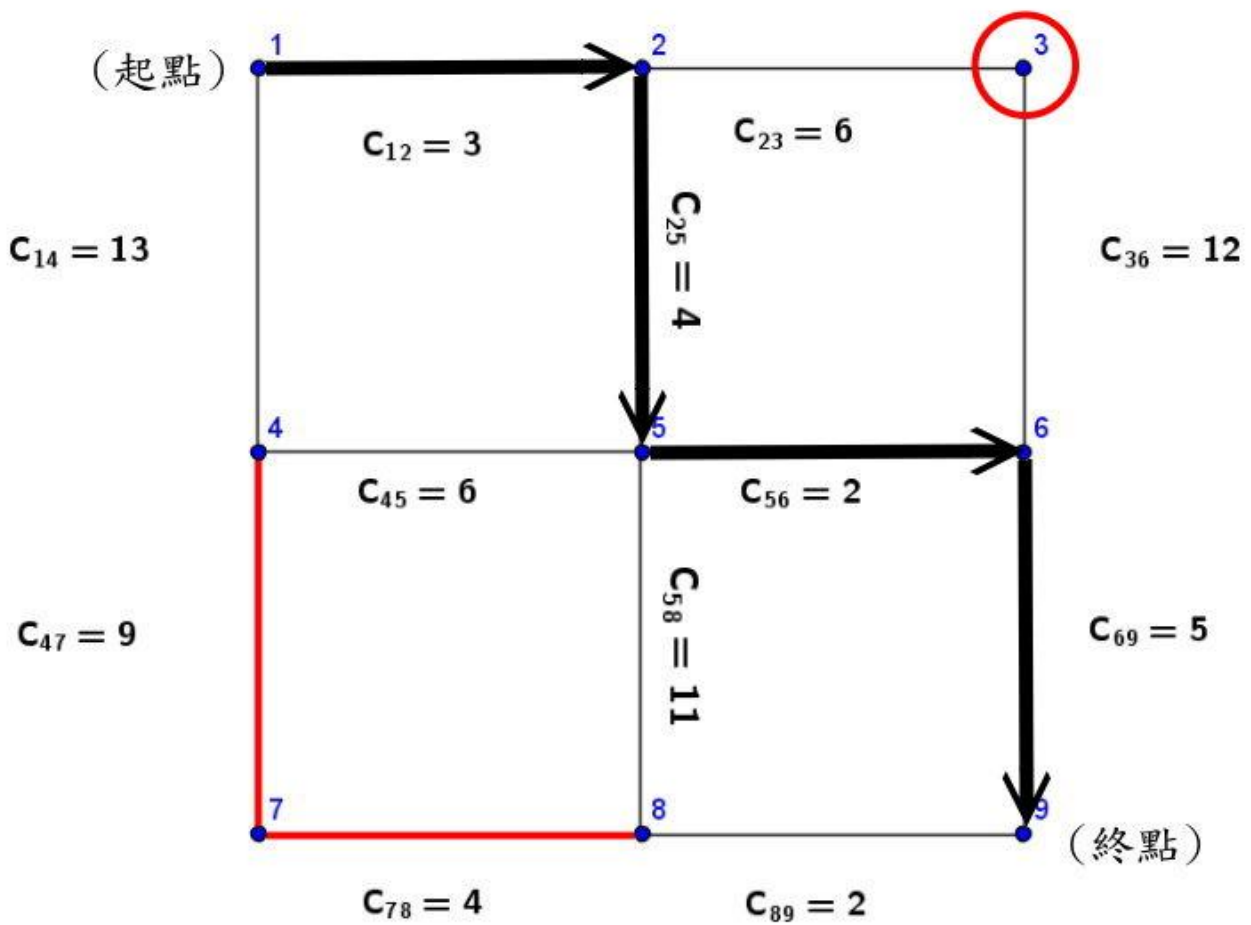


圖 1-3 最近鄰點法

表 1-1 模擬方格鄰近節點間之最短距離

In 單位:100m

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2	3								
3		6							
4	13								
5		4		6					
6			12		2				
7				9					
8					11		4		
9						5		2	

表 1-2 模擬方格非鄰近節點間之最短距離

In 單位:100m

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3	9								
4		10	16						
5	7		10						
6	9	6		8					
7	22	19	25		15	17			
8	18	15	21	13		13			
9	14	11	17	13	7		6		

在得到上表的結果之後，我們以點 1 為起點開始一個點接著一個點歸納，算出每種由起點到終點的組合，並且算出其成本總合後再去比較出最少成本，求出最佳路徑；而經過我們計算後，得到兩種走法：

第一種：

最少成本： $Z_1 = 64$

最短路徑走法：點 1→點 4→點 7→點 8→點 5→點 2→點 3→點 6→點 9

第二種：

最少成本： $Z_2 = 44$

最短路徑走法：點 1→點 2→點 3→點 6→點 5→點 4→點 7→點 8→點 9

由上述結果可知，最短路徑為第二種，而以此方法也能將路線清楚求出，我們將模擬方格的最短路徑結果整理為圖 1-4。

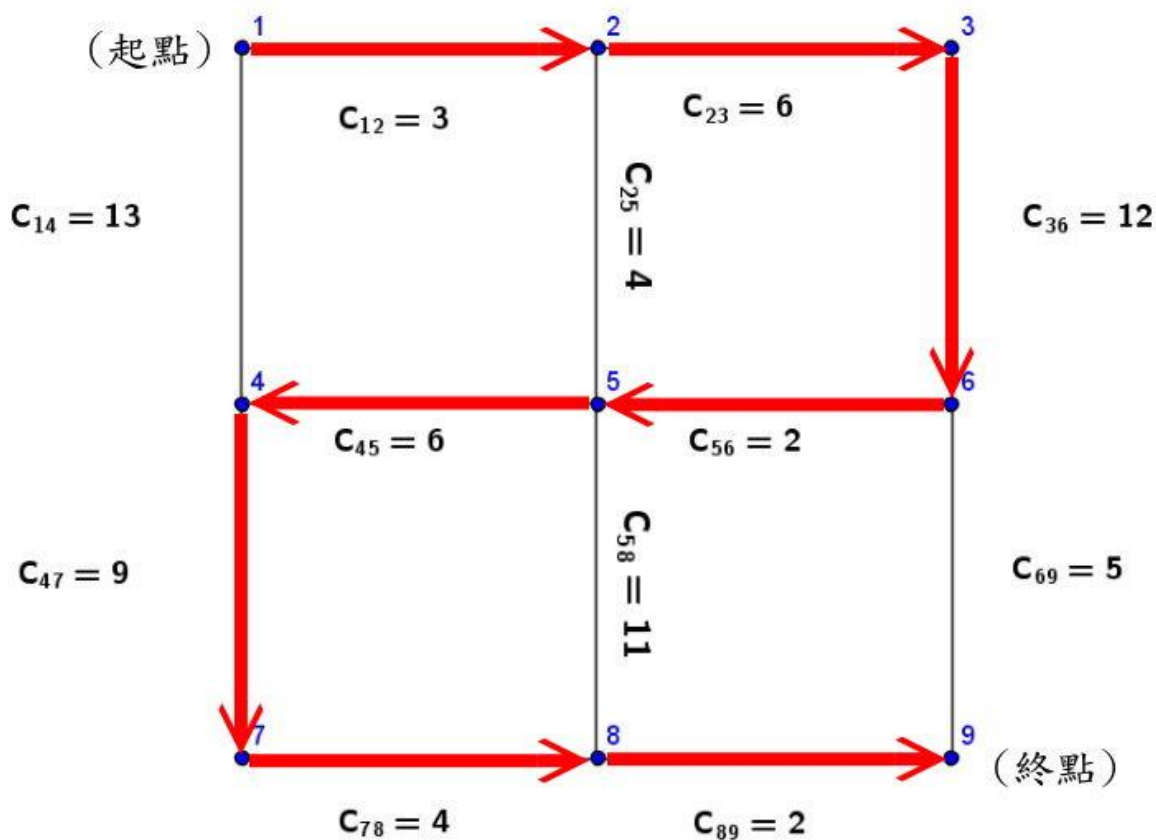


圖 1-4 模擬路網路線圖

四、 實際街道路線建立

在經過模擬方格路網的測試之後，我們證實此種窮舉法的確能夠實際應用在現實的街道上，所以我們以台東市區的街道圖作為實際應用的地區，而本研究的目的在於減少清運過程的成本，所以在路線規劃時考量到兩個部份：

(一)、收集垃圾節點的設置

(二)、清運距離的最小值

目前台東市區清運垃圾的方法多為沿路清運，不同於其他大都市是以點為收集垃圾的單位，節點清運垃圾的好處在於清運垃圾時較不會紊亂無章，且收取的時間可以有較好的掌控，還有最重要的一點是對於用路的安全能有所提升，所以我們打算在多處設置節點，然後在每日固定的時間由垃圾車到各點清運垃圾，亦即民眾只須於特定時間至特定路口到垃圾，進而求出垃圾車走完各節點的最短距離；而對於節點的設置，我們篩選了許多條件之後，決定考量以下的條件來作為節點設置的依據：

(一)、市區的主要道路之路口

(二)、商家集中和精華地段

(三)、人口密集區(非郊區之住宅區)

(四)、連結各區域間必經路段

(五)、現行垃圾車清運路線

為了研究台東市區現行垃圾車清運路線，我們查詢清潔隊的垃圾車時刻表，並以紙本地圖的方式將各車的路線手繪成路線圖，製成路線圖後，我們研究其主要道路之垃圾清運路線，仿造其部分路線並將其改成節點加入我們所規劃的路線中。(現行市區路徑圖如下)-

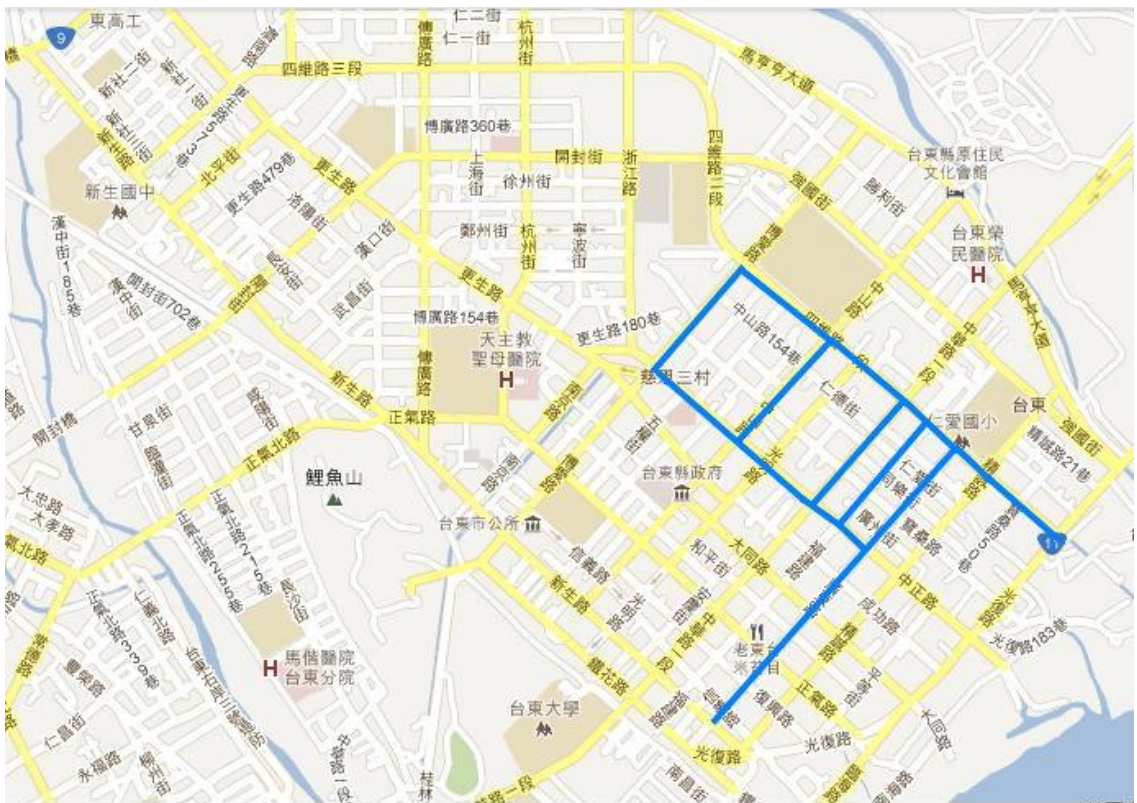
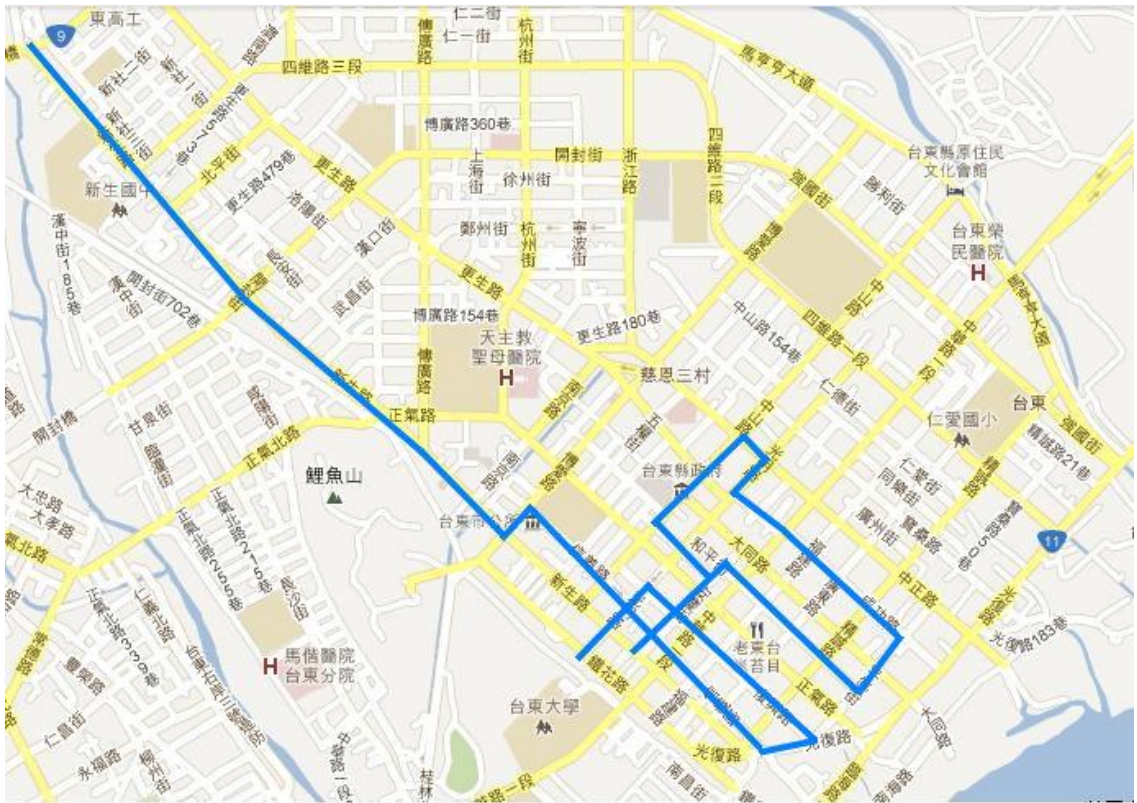


圖 1-5、1-6 現行路線圖

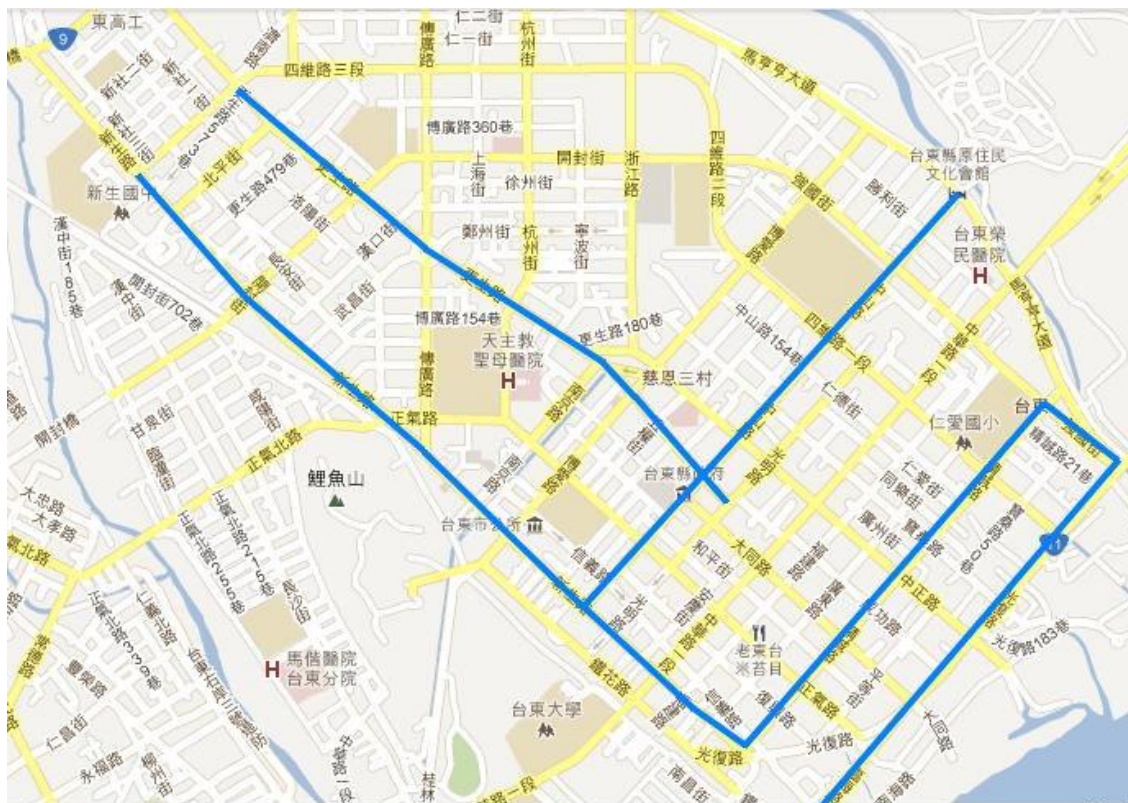


圖 1-7、1-8 現行路線圖

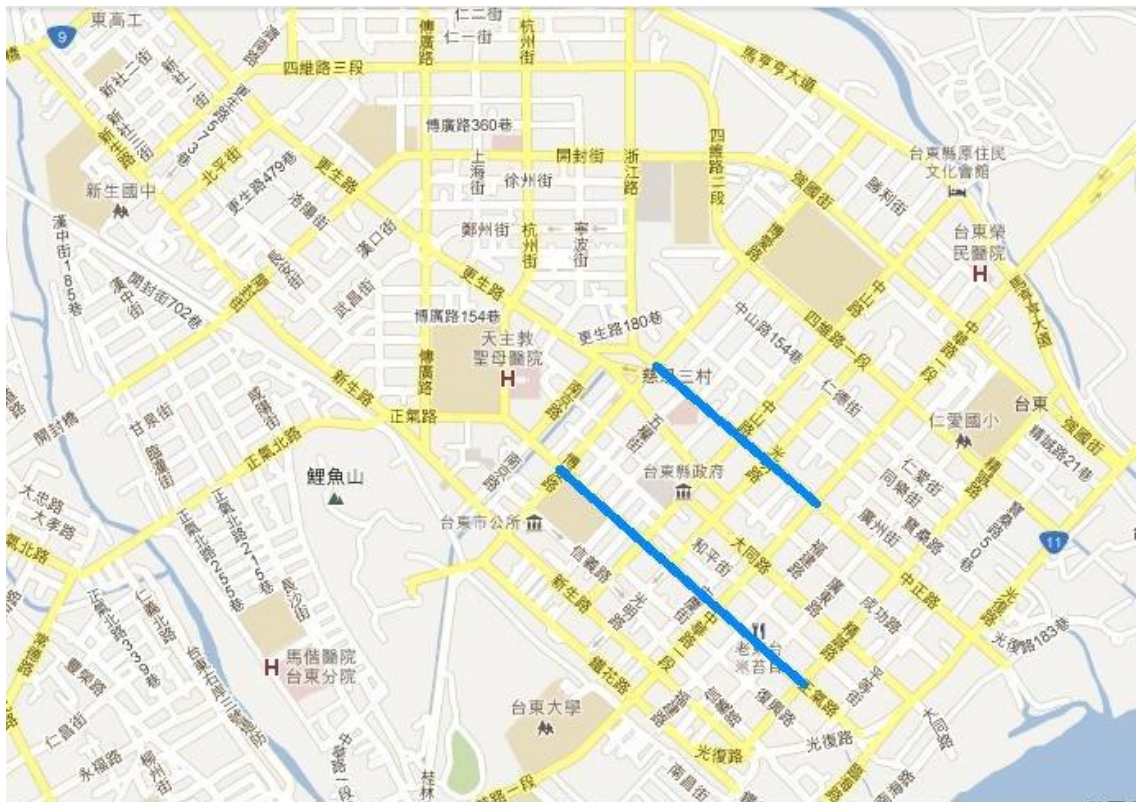


圖 1-9 現行路線圖

我們綜合上述各種條件，並以圖 1-10 的台東市地圖作為節點選取的邊界，選取出總共 25 個節點作為清運的停靠站。而目前的研究僅取 25 個節點作分析，有關於其間的小路和其他路段尚未考量進去，找出節點後，我們將各節點連線、簡化後標示於圖 1-11 上。



圖 1-10 台東市街道圖

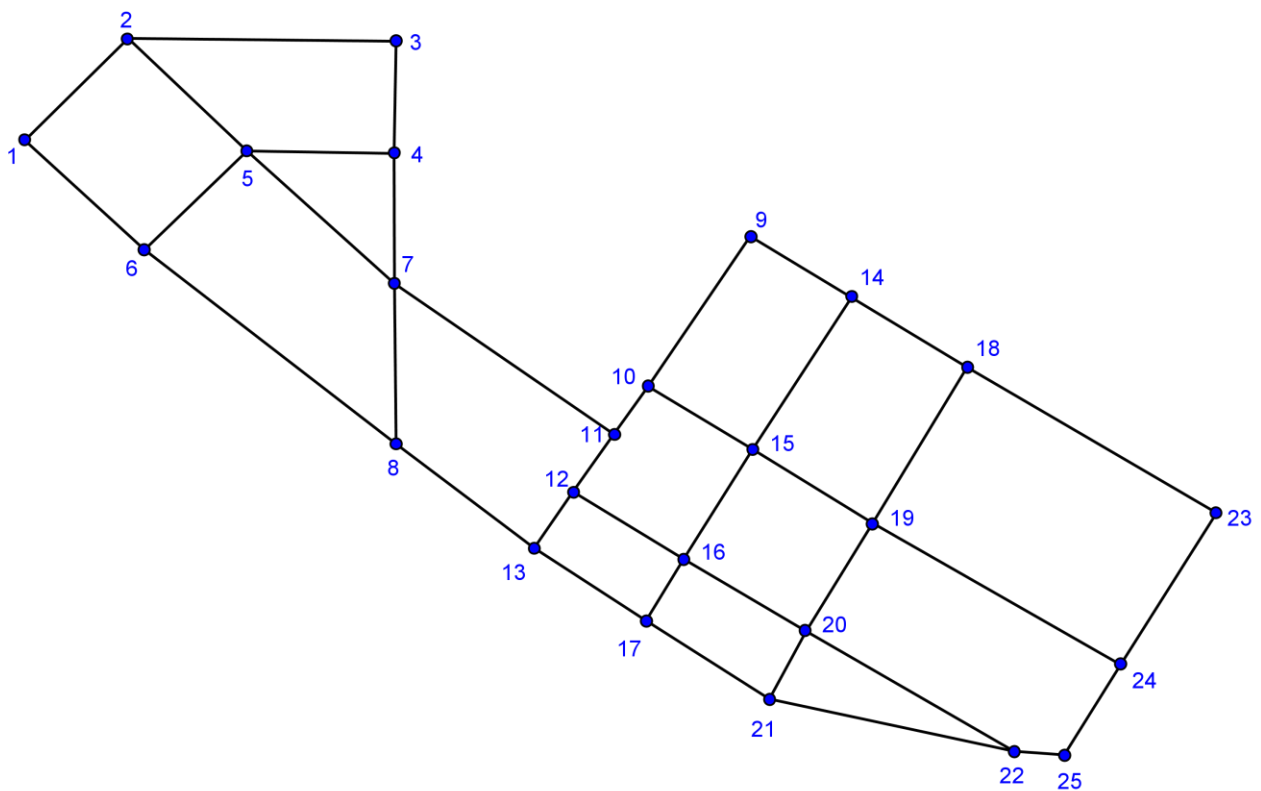


圖 1-11 實際路網示意圖

得到圖 1-11 的實際路網示意圖之後，我們以 Ur-Map 為工具，測量出各節點間的距離，並繪製成圖 1-12。

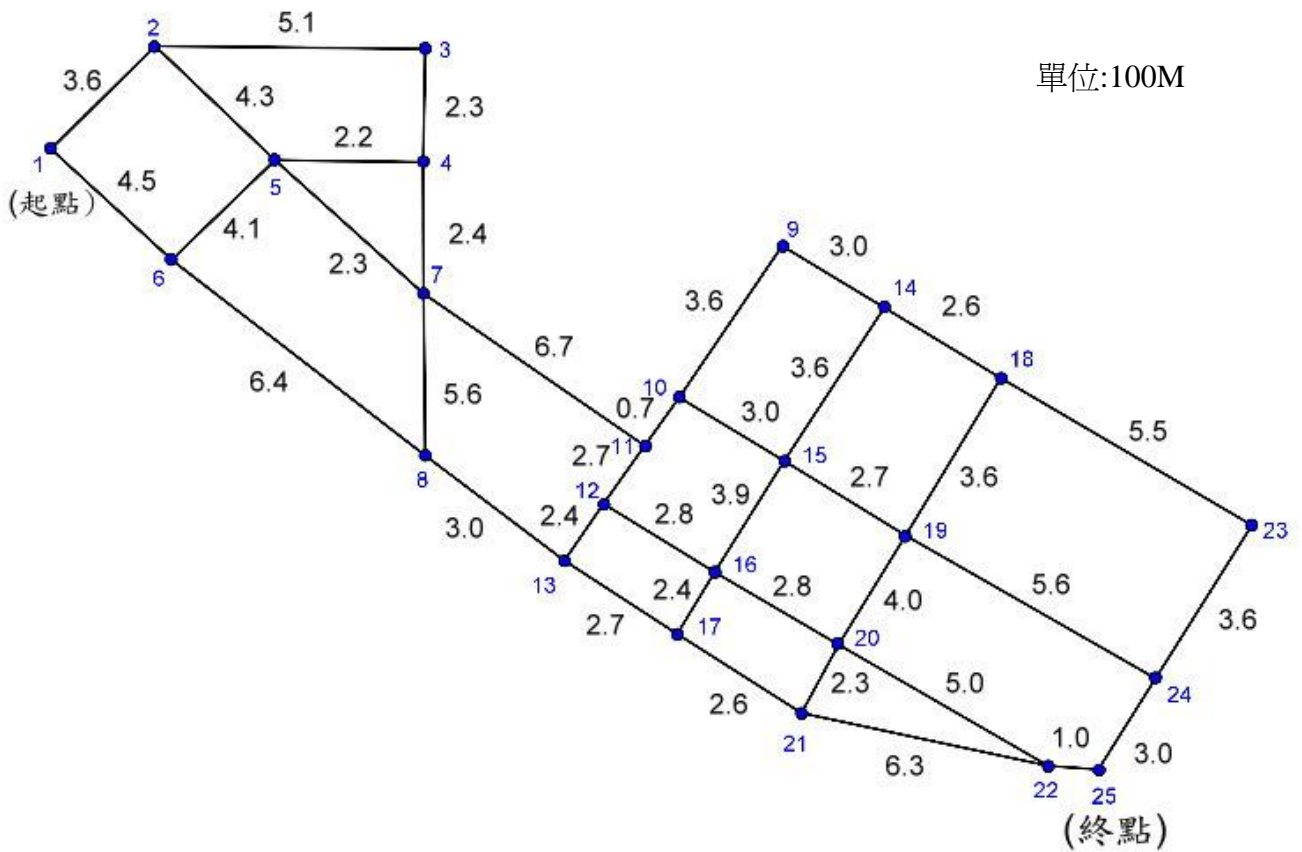


圖 1-12 實際街道示意圖(成本)

五、 實際街道之最佳路徑

同模擬方格路網的研究方法，我們將各點的鄰近點間最少成本和非鄰近點間的最少成本算出，並列在表 1-3、表 1-4。

表 1-3 實際街道鄰近節點之最短距離 C(i,j)

單位：100m

	In																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1																									
2	3.6																								
3		5.1																							
4			2.3																						
5				2.2																					
6	4.5				4.1																				
7				2.4	2.3																				
8						6.4	5.6																		
9																									
10																									
11							6.7																		
12																									
13								3.0																	
14									3.0																
15										3.0															
16																									
17																									
18																									
19																									
20																									
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									

表 1-4 實際街道非鄰近節點之最短距離 C(i,j)

單位：100m

Out	In																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1																									
2																									
3	8.7																								
4	10.1	6.5																							
5	7.9		4.5																						
6		8.4	8.6	6.3																					
7	10.2	6.6	4.7			6.4																			
8	10.9	12.2	10.3	8.0	7.9																				
9	21.2	17.6	15.7	13.4	13.3	17.4	11.0	12.4																	
10	17.6	14.0	12.1	9.8	9.7	13.8	7.4	8.8																	
11	16.9	13.3	11.4	9.1	9.0	13.1		8.1	4.3																
12	16.3	16.0	14.1	11.8	11.7	11.8	9.4	5.4	7.0	3.4															
13	13.9	15.2	13.3	11.0	10.9	9.4	8.6		9.4	5.8	5.1														
14	24.2	20.6	18.7	16.4	16.3	20.4	14.0	15.4		6.6	7.3	10.0	12.4												
15	20.6	17.0	15.1	12.8	12.7	16.8	10.4	11.8	6.6		3.7	6.4	8.8												
16	19.0	18.8	16.9	14.6	14.5	14.5	12.2	8.1	9.8	6.2	5.5		5.1	7.5											
17	16.6	17.9	16.0	13.7	13.6	12.1	11.3	5.7	12.1	8.5	7.8	5.1		6.3											
18	26.8	23.2	21.3	19.0	18.9	23.0	16.6	18.0	5.6	9.2	9.9	12.6	15.0		6.2	10.1	12.5								
19	23.3	19.7	17.8	15.5	15.4	19.5	13.1	14.5	9.2	5.7	6.4	9.1	11.5	6.2		6.6	8.9								
20	21.5	22.8	19.7	17.4	17.3	17.0	15.0	10.6	12.6	9.0	8.3	5.6	7.6	10.2	6.7		7.6								
21	19.2	20.5	18.6	16.3	16.2	14.7	13.7	8.3	14.7	11.1	10.4	7.7	5.3	12.5	8.9	5.0		9.9	6.3						
22	25.5	26.6	24.7	22.4	22.3	21.0	20.0	14.6	17.6	14.0	13.3	10.6	11.6	15.2	11.7	7.8	8.9		9.0	5.0	6.3				
23	32.3	28.7	26.8	24.5	24.4	28.5	22.1	23.5	11.1	14.7	15.4	18.1	20.5	8.7	11.7	15.6	18.0	5.5		13.1	15.4				
24	28.9	25.3	23.4	21.1	21.0	25.1	18.7	20.1	14.7	11.3	12.0	14.7	17.1	11.7	8.3	12.2	14.5	9.1	5.6			14.6	3.6		
25	26.5	27.6	25.7	23.4	23.3	22.0	21.0	15.6	17.7	14.3	14.3	11.6	12.6	14.7	11.3	8.8	9.9	12.1	8.6	6.0	7.3	1.0			

在求出鄰近點和非鄰近點的最少成本的過程中，也間接的算出了其所有的走法，所以我們得到的不只有最少的成本，還有路徑；而點與點之間的最短路徑走法對我們算出全程的最短路徑有很大的幫助，所以我們利用表 1-5 ~1-9 的數據，以窮舉法的方式自起點開始將每個節點帶入計算，最後走到終點完畢。

節點起始	路徑走法	成本(百米)	節點起始	路徑走法	成本(百米)
1 → 2	1→2	3.6	2 → 15	2→5→7→11→10→15	17.0
1 → 3	1→2→3	8.7	2 → 16	2→5→7→11→12→16	18.8
1 → 4	1→2→5→4	10.1	2 → 17	2→5→7→8→13→17	17.9
1 → 5	1→2→5	7.9	2 → 18	2→5→7→11→10→15→14→18	23.2
1 → 6	1→6	4.5	2 → 19	2→5→7→11→10→15→19	19.7
1 → 7	1→2→5→7	10.2	2 → 20	2→5→7→8→13→17→21→20	22.8
1 → 8	1→6→8	10.9	2 → 21	2→5→7→8→13→17→21	20.5
1 → 9	1→2→5→7→11→10→9	21.2	2 → 22	2→5→7→11→12→16→20→22	26.6
1 → 10	1→2→5→7→11→10	17.6	2 → 23	2→5→7→11→10→15→14→18→23	28.7
1 → 11	1→2→5→7→11	16.9	2 → 24	2→5→7→11→10→15→19→24	25.3
1 → 12	1→6→8→13→12	16.3	2 → 25	2→5→7→11→12→16→20→22→25	27.6
1 → 13	1→6→8→13	13.9			
1 → 14	1→2→5→7→11→10→9、15→14	24.2			
1 → 15	1→2→5→7→11→10→15	20.6	3 → 4	3→4	2.3
1 → 16	1→6→8→13→17→16	19.0	3 → 5	3→4→5	4.5
1 → 17	1→6→8→13→17	16.6	3 → 6	3→4→5→6	8.6
1 → 18	1→2→5→7→11→10→15→14→18	26.8	3 → 7	3→4→7	4.7
1 → 19	1→2→5→7→11→10→15→19	23.3	3 → 8	3→4→7→8	10.3
1 → 20	1→6→8→13→17→21→20	21.5	3 → 9	3→4→7→11→10→19	15.7
1 → 21	1→6→8→13→17→21	19.2	3 → 10	3→4→7→11→10	12.1
1 → 22	1→6→8→13→17→21→22	25.5	3 → 11	3→4→7→11	11.4
1 → 23	1→2→5→7→11→10→9、15→14→18→23	32.3	3 → 12	3→4→7→11→12	14.1
1 → 24	1→2→5→7→11→10→15→19→24	28.9	3 → 13	3→4→7→8→13	13.3
1 → 25	1→6→8→13→17→21→22→25	26.5	3 → 14	3→4→7→11→10→9、15→14	18.7
			3 → 15	3→4→7→11→10→15	15.1
			3 → 16	3→4→7→11→12→16	16.9
2 → 3	2→3	5.1	3 → 17	3→4→7→8→13→17	16.0
2 → 4	2→5→4	6.5	3 → 18	3→4→7→11→10→9、15→14→18	21.3
2 → 5	2→5	4.3	3 → 19	3→4→7→11→10→15→19	17.8
2 → 6	2→5→6	8.4	3 → 20	3→4→7→11→12→16→20	19.7
2 → 7	2→5→7	6.6	3 → 21	3→4→7→8→13→17→21	18.6
2 → 8	2→5→7→8	12.2	3 → 22	3→4→7→11→12→16→20→22	24.7
2 → 9	2→5→7→11→10→9	17.6	3 → 23	3→4→7→11→10→9→14→18→23	26.8
2 → 10	2→5→7→11→10	14.0	3 → 24	3→4→7→11→10→15→19→24	23.4
2 → 11	2→5→7→11	13.3	3 → 25	3→4→7→11→12→16→20→22→25	25.7
2 → 12	2→5→7→11→12	16.0			
2 → 13	2→5→7→8→13	15.2			
2 → 14	2→5→7→11→10→9、15→14	20.6			

表 1-5 各節點間最短路徑走法

節點起始	路徑走法	成本(百米)	節點起始	路徑走法	成本(百米)
4 → 5	4→5	2.2	5 → 21	5→7→8→13→17→21	16.2
4 → 6	4→5→6	6.3	5 → 22	5→7→11→12→16→20→22	22.3
4 → 7	4→7	2.4	5 → 23	5→7→11→10→9、15→14→18→23	24.4
4 → 8	4→7→8	8.0	5 → 24	5→7→11→10→15→19→24	21.0
4 → 9	4→7→11→10→9	13.4	5 → 25	5→7→11→12→16→20→22→25	23.3
4 → 10	4→7→11→10	9.8			
4 → 11	4→7→11	9.1			
4 → 12	4→7→11→12	11.8	6 → 7	6→5→7	6.4
4 → 13	4→7→8→13	11.0	6 → 8	6→8	6.4
4 → 14	4→7→11→10→9、15→14	16.4	6 → 9	6→5→7→11→10→9	17.4
4 → 15	4→7→11→10→15	12.8	6 → 10	6→5→7→11→10	13.8
4 → 16	4→7→11→12→16	14.6	6 → 11	6→5→7→11	13.1
4 → 17	4→7→8→13→17	13.7	6 → 12	6→8→13→12	11.8
4 → 18	4→7→11→10→9、14→18	19.0	6 → 13	6→8→13	9.4
4 → 19	4→7→11→10→15→19	15.5	6 → 14	6→5→7→11→10→9、15→14	20.4
4 → 20	4→7→11→12→16→20	17.4	6 → 15	6→5→7→11→10→15	16.8
4 → 21	4→7→8→13→17→21	16.3	6 → 16	6→8→13→17→16	14.5
4 → 22	4→7→11→12→16→20→22	22.4	6 → 17	6→8→13→17	12.1
4 → 23	4→7→11→10→9、15→14→18→23	24.5	6 → 18	6→5→7→11→10→9、15→14→18	23.0
4 → 24	4→7→11→10→15→19→24	21.1	6 → 19	6→5→7→11→10→15→19	19.5
4 → 25	4→7→11→12→16→20→22→25	23.4	6 → 20	6→8→13→17→21→20	17.0
			6 → 21	6→8→13→17→21	14.7
			6 → 22	6→8→13→17→21→22	21.0
5 → 6	5→6	4.1	6 → 23	6→5→7→11→10→9、15→14→18→23	28.5
5 → 7	5→7	2.3	6 → 24	6→5→7→11→10→15→19→24	25.1
5 → 8	5→7→8	7.9	6 → 25	6→8→13→17→21→22→25	22.0
5 → 9	5→7→11→10→9	13.3			
5 → 10	5→7→11→10	9.7			
5 → 11	5→7→11	9.0	7→8	7→8	5.6
5 → 12	5→7→11→12	11.7	7→9	7→11→10→9	11.0
5 → 13	5→7→8→13	10.9	7→10	7→11→10	7.4
5 → 14	5→7→11→10→9、15→14	16.3	7→11	7→11	6.7
5 → 15	5→7→11→10→15	12.7	7→12	7→11→12	9.4
5 → 16	5→7→11→12→16	14.5	7→13	7→8→13	8.6
5 → 17	5→7→8→13→17	13.6	7→14	7→11→10→1、15→14	14.0
5 → 18	5→7→11→10→9、15→14→18	18.9	7→15	7→11→10→15	10.4
5 → 19	5→7→11→10→15→19	15.4	7→16	7→11→12→16	12.2
5 → 20	5→7→11→12→16→20	17.3	7→17	7→8→13→17	11.3

表 1-6 各節點間最短路徑走法

節點起始	路徑走法	成本(百米)	節點起始	路徑走法	成本(百米)
7→18	7→11→10→9、15→14→18	16.6	9 → 19	9→14→18→19	9.2
7→19	7→11→10→15→19	13.1	9 → 20	9→10→11→12→16→20	12.6
7→20	7→11→12→16→20	15.0	9 → 21	9→10→11→12→13→17→21	14.7
7→21	7→8→13→17→21	13.9	9 → 22	9→10→11→12→16→20→22	17.6
7→22	7→11→12→16→20→22	20.0	9 → 23	9→14→18→23	11.1
7→23	7→11→10→9、15→14→18→23	22.1	9 → 24	9→14→18→23→24	14.7
7→24	7→11→10→15→19→24	18.7	9 → 25	9→14→18→23→24→25	17.7
7→25	7→11→12→16→20→22→25	21.0			
			10→11	10→11	0.7
8 → 9	8→13→12→11→10→9	12.4	10→12	10→11→12	3.4
8 → 10	8→13→12→11→10	8.8	10→13	10→11→12→13	5.8
8 → 11	8→13→12→11	8.1	10→14	10→9、15→14	6.6
8 → 12	8→13→12	5.4	10→15	10→15	3.0
8 → 13	8→13	3.0	10→16	10→11→12→16	6.2
8 → 14	8→13→12→11→12→9、15→14	15.4	10→17	10→11→12→13→17	8.5
8 → 15	8→13→12→11→10→15	11.8	10→18	10→9、15→14→18	9.2
8 → 16	8→13→17→16	8.1	10→19	10→15→19	5.7
8 → 17	8→13→17	5.7	10→20	10→11→12→16→20	9.0
8 → 18	8→13→12→11→10→9→14→18	18.0	10→21	10→11→12→13→17→21	11.1
8 → 19	8→13→12→11→10→15→19	14.5	10→22	10→11→12→16→20→22	14.0
8 → 20	8→13→17→21→20	10.6	10→23	10→9、15→14→18→23	14.7
8 → 21	8→13→17→21	8.3	10→24	10→15→19→24	11.3
8 → 22	8→13→17→21→22	14.6	10→25	10→15→19→24→25	14.3
8 → 23	8→13→12→11→10→9、15→14→18→23	23.5			
8 → 24	8→13→12→11→10→15→19→24	20.1			
8 → 25	8→13→17→21→22→25	15.6	11→12	11→12	2.7
			11→13	11→12→13	5.1
			11→14	11→10→9、15→14	7.3
9 → 10	9→10	3.6	11→15	11→10→15	3.7
9 → 11	9→10→11	4.3	11→16	11→12→16	5.5
9 → 12	9→10→11→12	7.0	11→17	11→12→13→17	7.8
9 → 13	9→10→11→12→13	9.4	11→18	11→10→9、15→14→18	9.9
9 → 14	9→14	3.0	11→19	11→10→15→19	6.4
9 → 15	9→14→9、10→15	6.6	11→20	11→12→16→20	8.3
9 → 16	9→10→11→12→16	9.8	11→21	11→12→13→17→21	10.4
9 → 17	9→10→11→12→13→17	12.1	11→22	11→12→16→20→22	13.3
9 → 18	9→14→18	5.6	11→23	11→10→9、15→14→18→23	15.4

表 1-7 各節點間最短路徑走法

節點起始	路徑走法	成本(百米)	節點起始	路徑走法	成本(百米)
11→24	11→10→15→19→24	12.0	14→21	14→15→16→17→21	12.5
11→25	11→12→16→20→22→25	14.3	14→22	14→18→19→20→22	15.2
			14→23	14→18→23	8.1
			14→24	14→18→23→24	11.7
12→13	12→13	2.4	14→25	14→18→23→24→25	14.7
12→14	12→11→10→9、15→14	10.0			
12→15	12→11→10→15	6.4			
12→16	12→16	2.8	15→16	15→16	3.9
12→17	12→13→17	5.1	15→17	15→16→17	6.3
12→18	12→11→10→9、15→14→18	12.6	15→18	15→14→18	6.2
12→19	12→11→10→15→19	9.1	15→19	15→19	2.7
12→20	12→16→20	5.6	15→20	15→16、19→20	6.7
12→21	12→13→17→21	7.7	15→21	15→16→17→21	8.9
12→22	12→16→20→22	10.6	15→22	15→16、19→20→22	11.7
12→23	12→11→10→9、15→14→18→23	18.1	15→23	15→14→18→23	11.7
12→24	12→11→10→15→19→24	14.7	15→24	15→19→24	8.3
12→25	12→16→20→22→25	11.6	15→25	15→19→24→25	11.3
13→14	13→12→11→10→9、15→14	12.4	16→17	16→17	2.4
13→15	13→12→11→10→15	8.8	16→18	16→15→14→18	10.1
13→16	13→17→16	5.1	16→19	16→15→19	6.6
13→17	13→17	2.7	16→20	16→20	2.8
13→18	13→12→11→10→9、15→14→18	15.0	16→21	16→17→21	5.0
13→19	13→12→11→10→15→19	11.5	16→22	16→20→22	7.8
13→20	13→17→21→20	7.6	16→23	16→15→14→18→23	15.6
13→21	13→17→21	5.3	16→24	16→15→19→24	12.2
13→22	13→17→21→22	11.6	16→25	16→20→22→25	8.8
13→23	13→12→11→10→9、15→14→18→23	20.5			
13→24	13→12→11→10→15→19→24	17.1			
13→25	13→17→21→22→25	12.6	17→18	17→16→15→14→18	12.5
			17→19	17→21→20→19	8.9
			17→20	17→21→20	4.9
14→15	14→15	3.6	17→21	17→21	2.6
14→16	14→15→16	7.5	17→22	17→21→22	8.9
14→17	14→15→16→17	9.9	17→23	17→16→15→14→18→23	18.0
14→18	14→18	2.6	17→24	17→21→20→19→24	14.5
14→19	14→18→19	6.2	17→25	17→21→22→25	9.9
14→20	14→18→19→20	10.2			

表 1-8 各節點間最短路徑走法

節點起始	路徑走法	成本(百米)			
18→19	18→19	3.6			
18→20	18→19→20	7.6			
18→21	18→19→20→21	9.9			
18→22	18→19→20→22	12.6			
18→23	18→23	5.5			
18→24	18→23→24	9.1			
18→25	18→23→24→25	12.1			
19→20	19→20	4.0			
19→21	19→20→21	6.3			
19→22	19→20→22	9.0			
19→23	19→18→23	9.1			
19→24	19→24	5.6			
19→25	19→24→25	8.6			
20→21	20→21	2.3			
20→22	20→22	5.0			
20→23	20→19→18→23	13.1			
20→24	20→19→24	9.6			
20→25	20→22→25	6.0			
21→22	21→22	6.3			
21→23	21→20→19→18→23	15.4			
21→24	21→20→19→24	11.9			
21→25	21→22→25	7.3			
22→23	22→20→19→18→23	18.1			
22→24	22→20→19→24	14.6			
22→25	22→25	1.0			
23→24	23→24	3.6			
23→25	23→24→25	6.6			
24→25	24→25	3.0			

表 1-9 各節點間最短路徑走法

經由我們的觀察發現節點 11 和節點 13 扮演著重要的角色，因為可以用節點 11 和節點 13 將整個道路系統分為上下兩個部份，把兩部分分開獨立計算，如此一來便可簡化問題，讓計算更有效率，而後將上下組合比較，以求出整個系統的最佳路徑，(圖 1-13)。

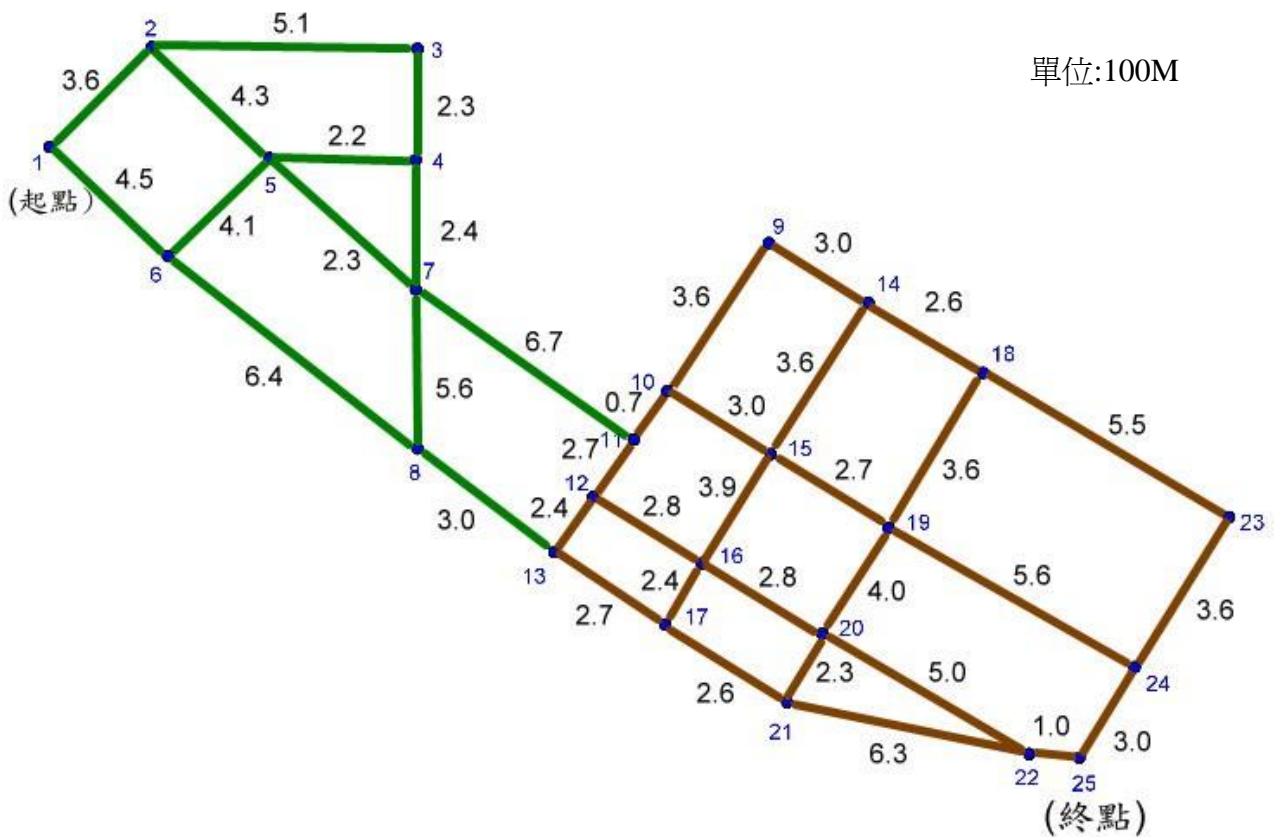


圖 1-13 分區街道圖

分別求出從節點 1 到節點 11 之間和節點 1 到 13 之間能走遍上方區域所有節點的路線，以及從節點 11 到節點 25 之間和節點 13 到 25 之間能走遍下方區域所有節點的路線，算出其各自成本，並互相比較，選出最低成本的路線。

路徑走法	成本(百米)
1→2→3→4→5→6→8→7→11	36
1→2→3→4→7→5→6→8→13	29.2
1→6→5→2→3→4→7→8→13	31.3

11→10→9→14→18→23→24→19→15→16→12→13→17→21→20→22→25	49
11→10→9→14→15→16→12→13→17→21→22→20→19→18→23→24→25	56.3
11→12→13→17→16→15→10→9→14→18→23→24→19→20→21→22→25	54.6
13→12→11→10→9→14→15→16→17→21→22→20→19→18→23→24→25	55.9
13→12→11→10→9→14→18→23→24→19→15→16→17→21→20→22→25	48.6
13→17→21→22→20→16→12→11→10→9→14→15→19→18→23→24→25	54.2
13→17→21→22→20→19→15→16→12→11→10→9→14→18→23→24→25	54.7

表 1-10

由表 1-10 可得到一條最佳路徑：1→2→3→4→7→5→6→8→13→12→11→10→9→14→18→23→24→19→15→16→17→21→20→22→25，其最少成本為 77.8，我們並將此路徑走法製成圖 1-14。

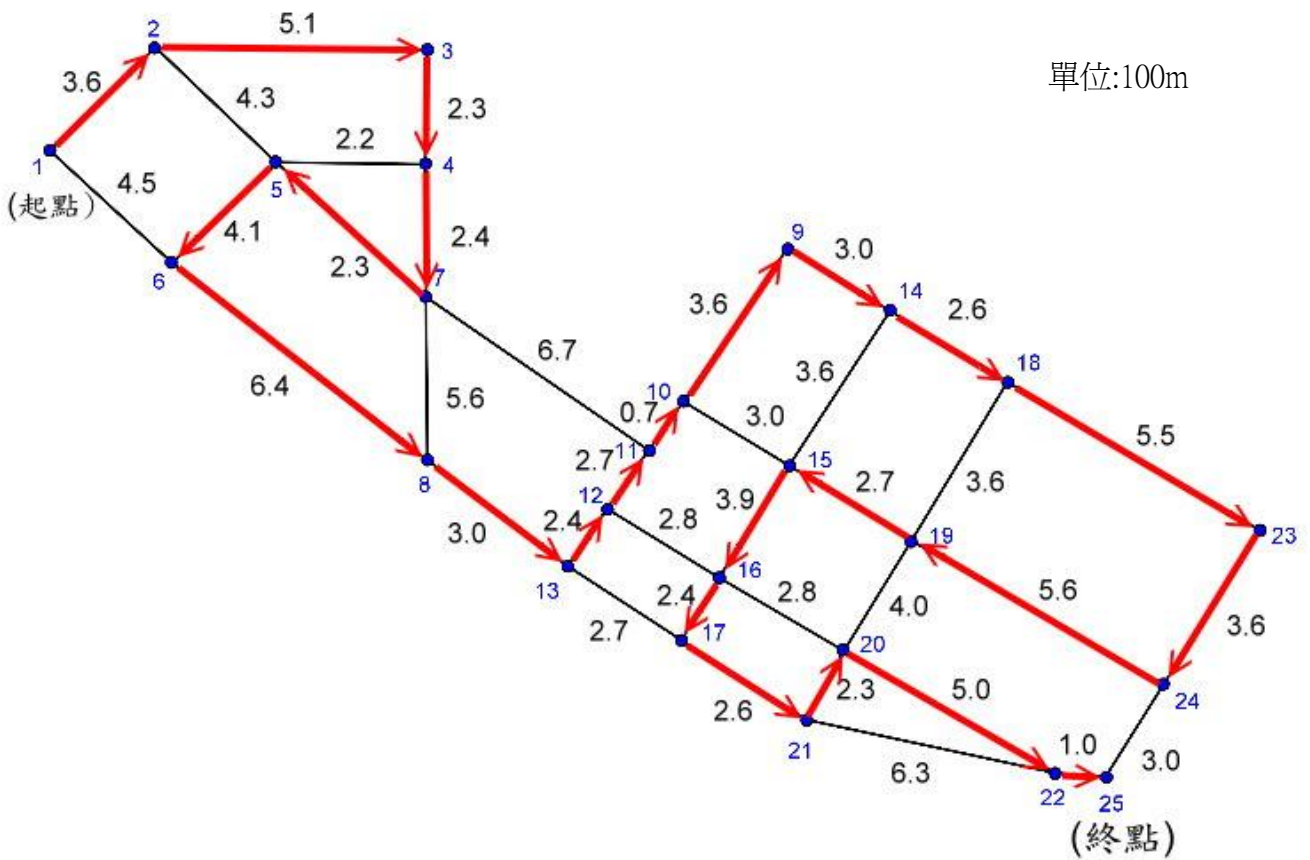


圖 1-14 實際街道之最佳路徑

伍、 研究結果

一、 模擬方格路網經計算後得到：點 1→點 2→點 3→點 6→點 5→點 4→點 7→點 8→點 9，最少成本為 37，此路徑為模擬方格路網自起點至終點之最佳路徑。

二、 實際的街道路線規畫經計算後，得到最後的結果為：點 1→點 2→點 3→點 4→點 7→點 5→點 6→點 8→點 13→點 12→點 11→點 10→點 9→點 14→點 18→點 23→點 24→點 19→點 15→點 16→點 17→點 21→點 20→點 22→點 25，最少成本為 77.8(100m)，此路徑為垃圾車清運之最佳路徑。

陸、 討論

一開始我們先研究台東市區現行的垃圾車清運路線，將各路線製成圖，想藉此找出其規律，經過多方考量後，我們決定以節點進行垃圾清運；而有關此種節點路線規劃最相關的解法莫過於 TSP，而 TSP 本身就是一個困難問題，目前的解法有遺傳演算法、局部搜索等方法，但由於上述之解都過於艱深晦澀，而最近鄰點法又無法幫助我們得到最佳解，所以我們使用最普通的方法「窮舉法」；對小範圍而言，窮舉法是個最適合我們的方法，經過我們多次計算後證實，在模擬方格路網中，窮舉法是可行的；但當換到了實際街道上，節點增加為 25 個，組合數瞬間增加為許多倍，將每種組合的成本算出花了很大的功夫，所以我們算出之後將表格系統式的整理，幫助我們方便整理其路徑走法和找出最佳路徑。

柒、 結論

雖然 TSP 有許多限制式讓問題的範圍縮小，但是窮舉法仍包含了許多繁複的計算，而我們從上述的研究結果中我們發現，將節點繪製成示意圖和把各點間的成本製成表格是個能簡化問題的步驟，因為我們從中發現在節點系統中，只要找出特定節點，如實際街道中的點 11 和點 13，把系統分成兩個部份，將問題簡化，如此一來便能更精確的算出最後的結果。而在此研究中我們僅針對節點作為清運垃圾的條件，但目前台東現行的方法是沿路清運，因此我們希望未來能以其他不同的條件做研究，例如：考量垃圾量、耗油量、工作時數、清運時間等，再將各種不同的研究結果做比較，找出真正符合台東市區且最節省成本的清運方法。

捌、 參考資料

- 一、 維基百科—旅行銷售員問題(Travel Salesman Problem) ，
<http://zh.wikipedia.org/wiki/TSP>
- 二、 台東市公所清潔隊，<http://zh.wikipedia.org/wiki/TSP>
- 三、 徐力行 (2011) 動物園裡的數學：網路時代一定要懂的圖形理論。天下文化
- 四、 諸明嘉 (1979) 郵遞問題與奇偶點圖上作業法，人間文化
- 五、 黃士哲、羅永光 (1984) 「垃圾運輸收集路線及清運效率改善之研究」，台大環境工程研討會
- 六、 王招錦 (2004) 家戶垃圾清運規劃及收費之研究—以屏東縣九如鄉為例，屏東科技大學環境工程與科學系，碩士論文
- 七、 黃文正 (2007) 以垃圾不落地之原則規劃理論最佳清運路線之研究-以台南縣新營市為例，國立高雄第一科技大學環境與安全衛生工程所，碩士論文