篇名

七橋問題與一筆畫研究

作者
薛馥昇。萬芳高中。一年九班

壹●前言

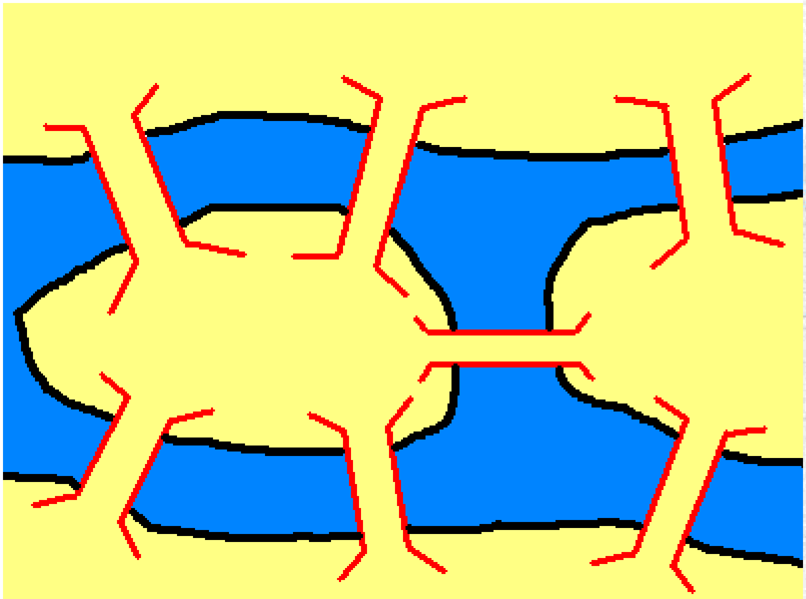
在國中的某一次的數學課上面，老師上課提到了七橋問題，並且要求我們試著把這個問題解出來。但是試了很久都沒有辦法如願的想出解答，最後所得到的答案是無解。「為什麼這個題目無解」這個疑問一直在心中盤旋著，以這次的機會來試著研究七橋問題以其相關議題。

貳●正文

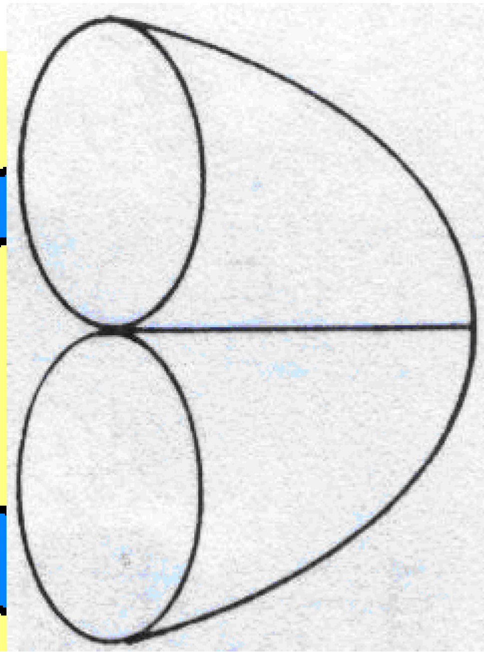
一、有關七橋問題

01.題目

所謂的七橋問題是指十八世紀初在普魯士柯尼斯堡鎮（今蘇聯加里寧格勒）流傳一個問題。這問題是城內一條河的兩支流繞過一個島，有七座橋橫跨這兩支流。問一個散步者能否走過每一座橋，而每座橋卻只走過一次。（註一）如圖一所示：



圖一



圖二

02.題目解答

歐拉在 1736 年圓滿地解決了這一問題，證明這種方法並不存在。他在聖彼得堡科學院發表了圖論史上第一篇重要文獻。歐拉把實際的抽象問題簡化為平面上的點與線組合，每一座橋視為一條線，橋所連接的地區視為點。這樣若從某點出發後最後再回到這點，則這一點的線數必須是偶數（註一），如圖二所示。

歐拉最後給出任意一種河━━橋圖能否全部走一次的判定法則。如果通奇數座橋的地方不止兩個，那麼滿足要求的路線便不存在了。如果只有兩個地方通奇數座橋，則可從其中任何一地

出發找到所要求的路線。若沒有一個地方通奇數座橋，則從任何一地出發，所求的路線都能實現，他還說明了怎樣快速找到所要求的路線。(註一)

03.七橋問題結論

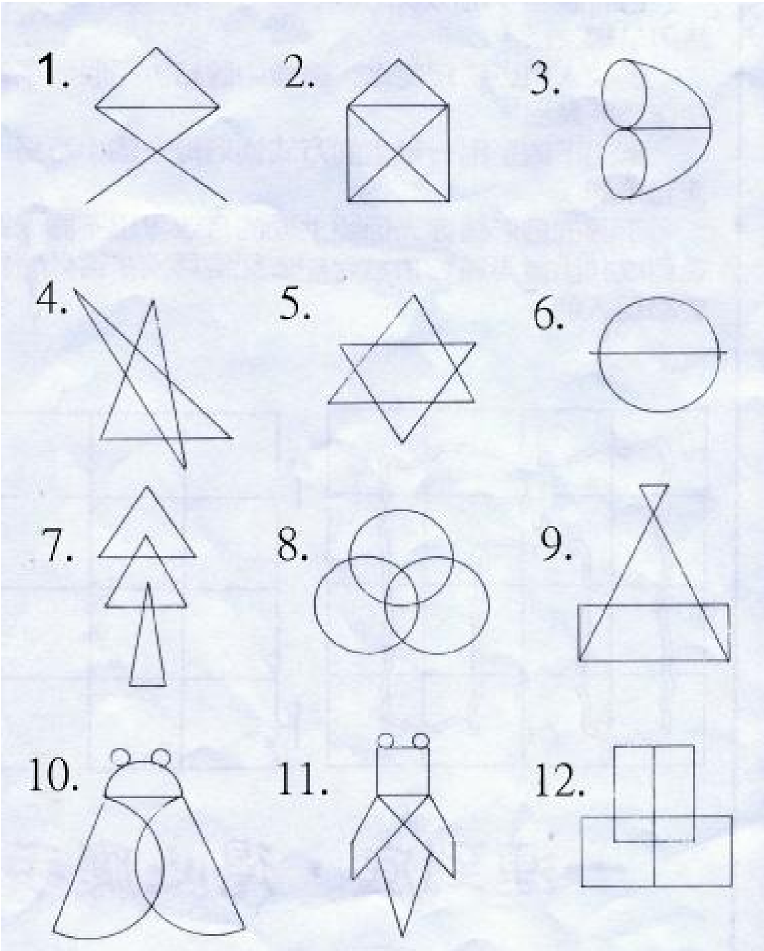
由以上的推論和結果可以用來證明七橋問題是無解的。並且由歐拉所提出的觀點來看，把圖形簡單化，變成容易了解的幾何圖形來解題目，這些方法可以想到平常在玩的「一筆畫問題」似乎有些關聯。接著就由一筆畫問題來更清楚的解釋歐拉的理論。

二、一筆畫問題

01.何謂一筆畫問題

其實由字面上就可以知道，一筆畫問題就是一次把圖形畫完。或許會認爲這種東西小孩子也會，不過其實其中包含著許多推論和技巧的。

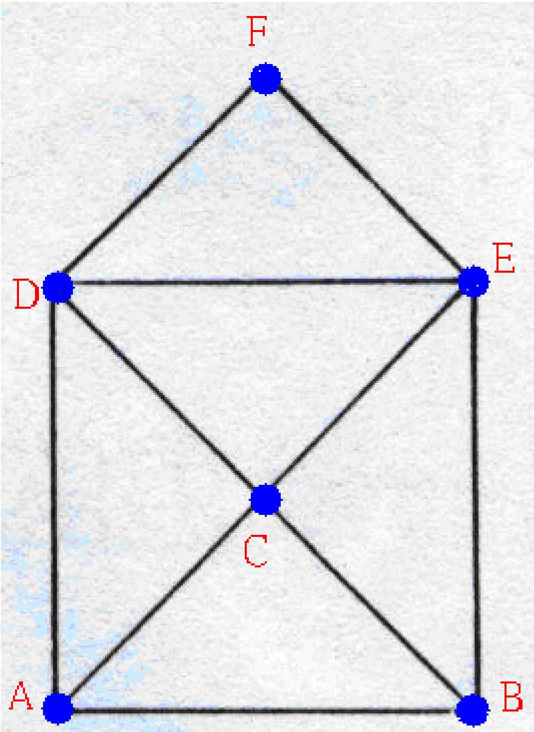
02.一筆畫問題舉例與解說



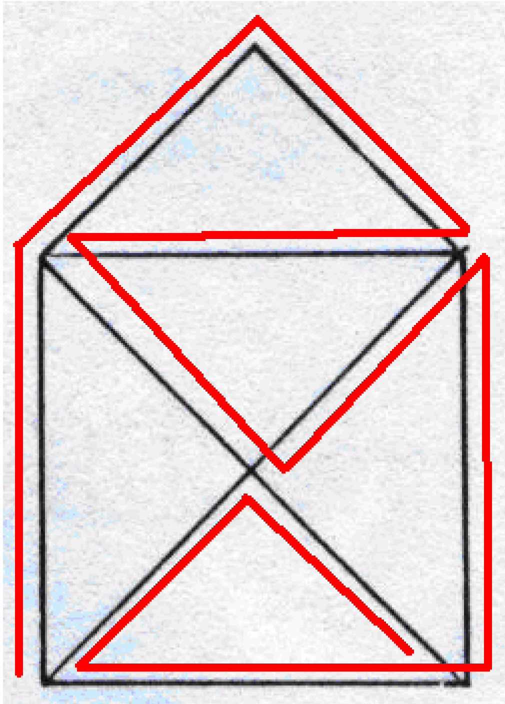
圖三

如圖三所示，上面共有十二種圖形。而其中不用一筆畫完成的是一號和三號圖形。至於能夠

一筆畫完成的圖形，讓我們用二號圖形來做解說：



圖四



圖五

爲了方便說明，在各點標上Ａ到Ｆ代號。由圖四觀察，Ａ點有三條交會；同理，Ｂ有三條，Ｃ有四條，Ｄ有四條，Ｅ有四條，Ｆ有兩條。由定義來看，Ａ和Ｂ稱爲「奇數點」，Ｃ、Ｄ、Ｅ、Ｆ爲「偶數點」。而由圖四和圖五可以發現，Ａ和Ｂ恰爲起點和終點。同樣的，我們也可以在一般的圖形中定義出奇數點和偶數點。如果某個圖形能夠一筆畫描繪出來，而且恰好有兩個奇數點，那麼這兩個奇數點必定一個是起點，另一個爲終點。理由很簡單，因爲起點或終點以外的任何一點，出入次數一定是偶數。（註二）

這個概念早在 1736 年，就由數學家歐拉提出來了。他的結論是這樣的：

1.每一個圖形的奇數點個數必定是偶數。

2.若一圖形能用一筆描繪，它必爲一個連通的圖形（也就是任何兩點之間有路徑可到）。

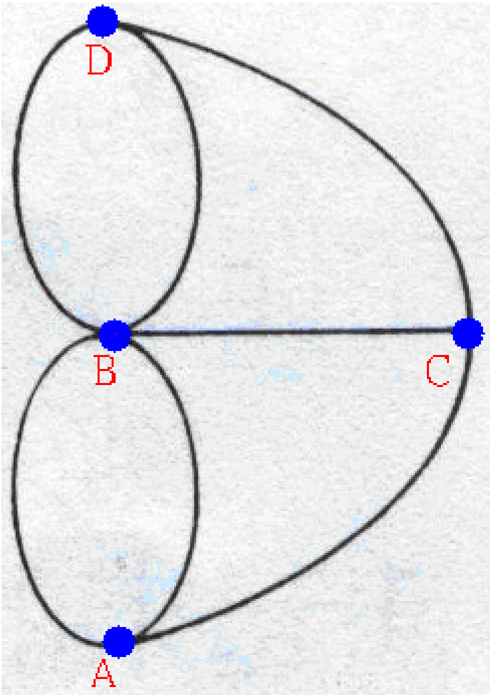
3.至多有兩個奇數點的圖形，必可以一筆描繪

4.若某一個圖形恰有兩個奇數點，則其一點爲起點，另一點爲終點

5.若無奇數點，則起點和終點爲同一點。

6.若某個圖形可一筆描繪，只要掌握起點，且未走完的圖形仍是連通圖形，這個圖就一定可以一筆描繪完成（以上皆爲註二）

用以上的結論來回頭看由七橋問題所延伸出來的圖形中，是否有沒有上述六點規則。



圖六

Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄ皆為奇數點，顯然的第一條規則就不符合了。所以簡單的來講，七橋問題就是一個無解的題目。

參●結論

雖然說七橋問題（一筆畫問題）在生活上似乎與生活沒什麼關聯，但是七橋問題引發了網絡理論之研究，被認為是拓撲學理論基本應用題，對解決最短郵路等問題很有幫助。(註一）或許我們可以更仔細的來思考：一筆畫問題對生活其實是用處不少的，而只是沒有去經過仔細的思考。

肆●引註資料

資料來源：

註一、柯尼斯堡七橋問題 http://pub.shs.edu.tw/pub_002/pub_002_005.htm
註二、《沒有數字的數學》p.18。徐力行著。天下文化。2003

圖片來源：

圖一、同註一

圖二至圖六、未命名文件 http://www.msps.tp.edu.tw/math/kids/p-12.htm

（圖二、圖四至圖六皆有修改）