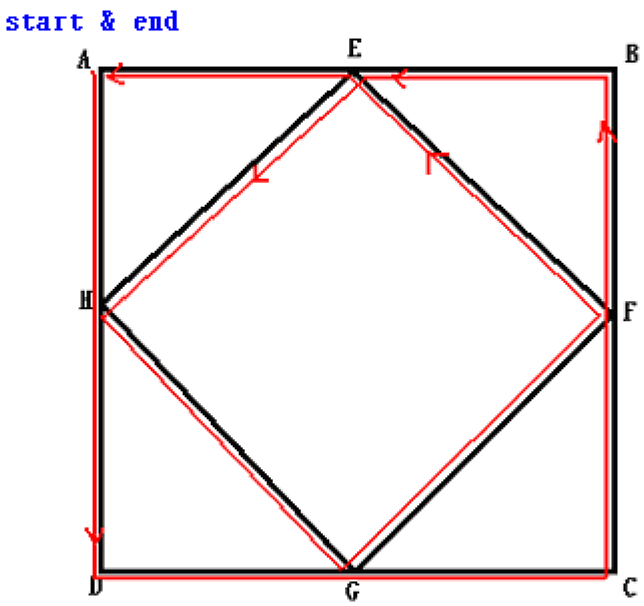
數學報告之---
沒有數字的數學

前言：由於這次暑假有必須閱讀暑假課外讀物並寫報告的機緣，使我有機會接觸一些平時連想都不會想去拿來看的書，更別說是積極的去研究它了！因此，我格外注重這次所讀的課外書籍－雖然只是粗淺的研究，但卻使我受益良多！我想，礙於時間及剛考完試的輕鬆，我也不算是花很多時間在此之上；並且自慚才疏學淺，對於書上內容仍並不能挺完整的了解，以致仍有待努力，還望繼續鑽研。

～～一筆描繪問題——歐拉圈～～

歐拉圈？這是本書所傳授我們的第一個觀念。它是什麼意思呢？簡單來說，即是給定一個圖形，要以一筆畫的方式將此圖描繪完成，一筆畫成此圖，而我們又稱此類圖形叫做”歐拉圖”。歐拉圖分基本三種：

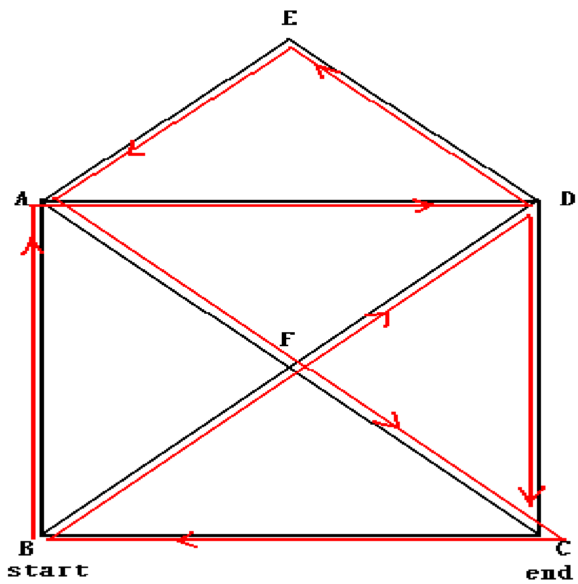
一、 起點和終點相同－也就是描繪完一個圖形，其開頭等於結尾，這裡舉個例子：



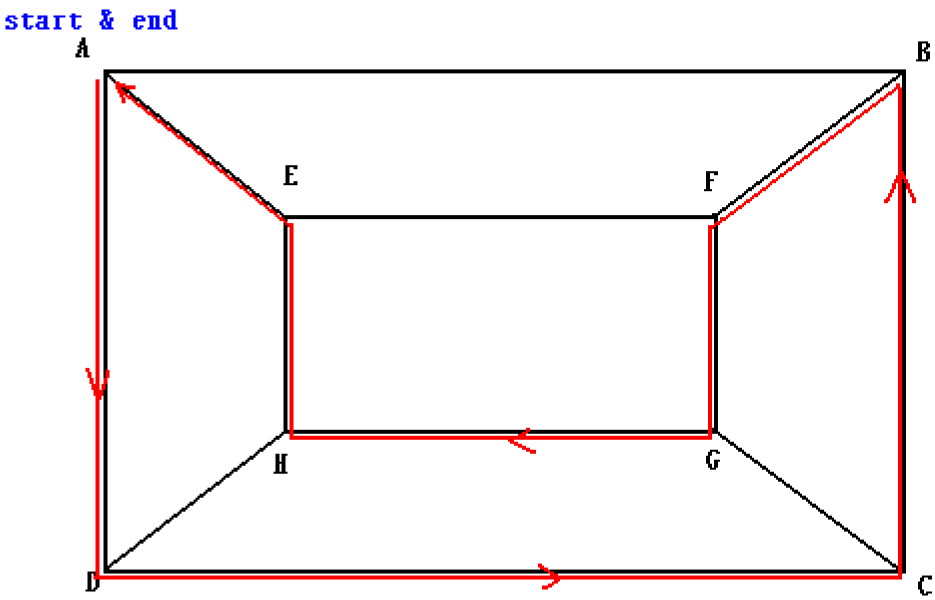
注意到了嗎？當然，這是有訣竅的－從圖中我們可看出，要經過線，必會經過點；而仔細一點的話，會發現每過一條線，其兩端點的通過數（如一進一出算兩個通過數）各會增加一，則若要起點等於終點，其起點通過數必為雙數（二的倍數），其餘各點也

是。如此一來，不論從哪點開始走，皆可一筆畫描繪而起點等於終點。

二、 但假如有人提出個疑問：若有個點的通過數是為單數呢？那便又是另外一個情況了。舉例來說，如下圖一



由上圖我們也可知，當有其中一點其頂點的出入數為單數時，則其必為起點或終點。換句話說，必還有一個點也為單數點，因為有進就有出，因此，這兩點必一個是起點，一個是終點。那是以只有兩個單數點的情況來說，若有三個以上的話，那便不能一筆描繪了。不過，數學家也想過這個問題—假如有個圖形真的是有三個以上的單數出入口頂點呢？再舉例如下：



發現了嗎？這個圖並不能夠一筆描繪，但換個角度去想，我們是不是一定要一筆描繪？或是二筆、三筆、四筆或更多…？有鑑

於此，數學家於是提出了最少描繪數的問題。由上圖我們再來分析，若奇數出入口的點有兩個，那沒有問題，一定一個是起點，一個是終點；假如有三個或四個呢？那又增加了一對起點及終點，因此，描繪數再加一，需兩筆描繪；假如有五個或六個呢？那便再增加了一對起點、終點，而描繪數便必須再加一，需三筆描繪…我們再用歸納法歸納此規則可得知以下公式：

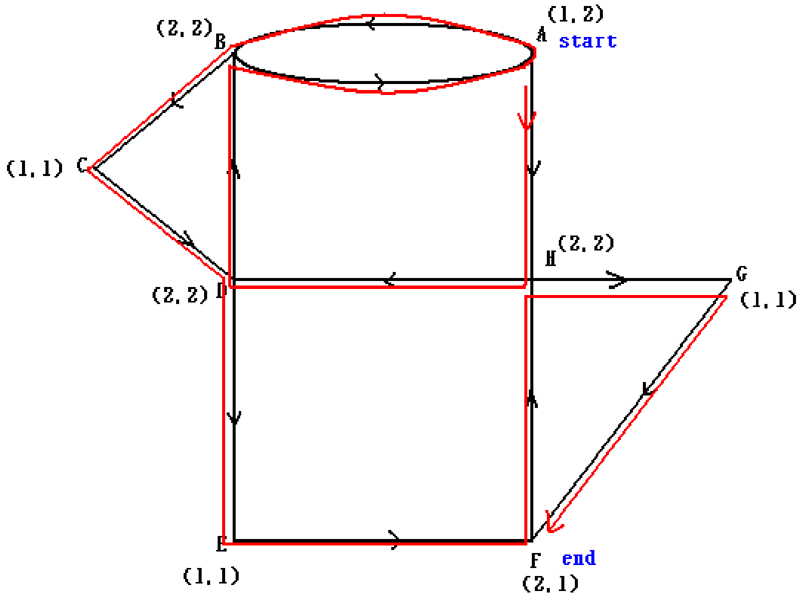
設單數出入口的頂點有ｋ個，則ｋ必為偶數，因此，我們可令

ｋ＝２ｒ

則若　　ｒ＝０　　則最少描繪數為１；

若　　ｒ＞０　　則最少描繪數為ｒ

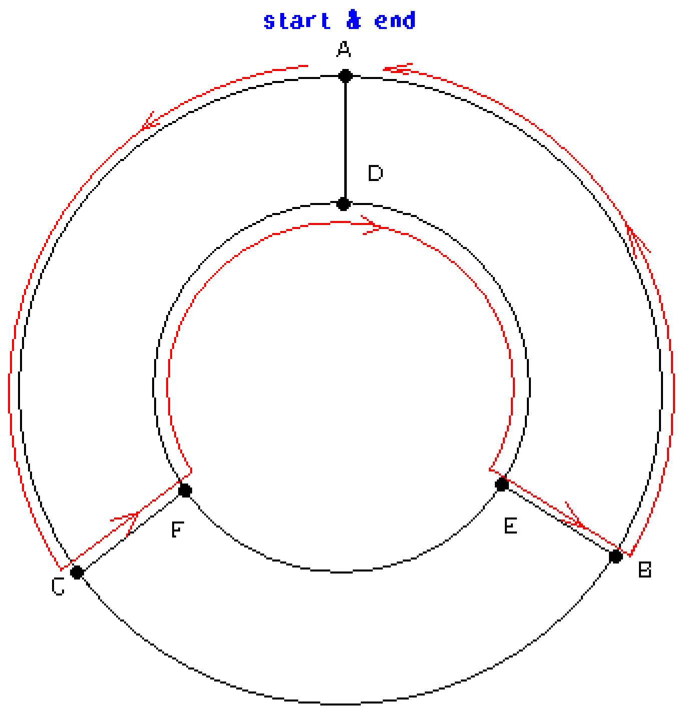
三、　而在某些歐拉圖中，不只有頂點數的問題，還有方向性，再舉個例子來說吧！如下圖：



以圖來看我們不難發現，假定每個箭頭所指入的頂點，算該頂點的一個入座標；而指出的即為出座標。我們也可以將其標示為（入座標，出座標）以利辨識。而有向圖依然是極重要的，在電腦網絡上，因有一定的傳遞路線，也就是說，電路圖是個有向圖。而以上圖來說，我們可發現其中有一個頂點其出座標數比入坐標數多一，則此座標是為”起點”；而有一個座標其入坐標數比出座標數多一，則此座標必為”終點”，找定起點和終點後，再配合些許運氣和技巧，相信是不難解的。

至於歐拉圖又有何用途呢？那是期待以後多加探討的。

在此，我們來談談一筆畫遊歷的問題。首先，我們得知道定義：什麼是漢米頓圖？所謂漢米頓，其實只是個人名。而當給定一個圖形中，能夠找到有一個路徑，經過圖形上的每個頂點，且每個頂點僅能走過一次，而最後再回到原點，構成一個圈型，這種圈，我們就稱之為”漢米頓圈”；而此類圖形，我們稱之為”漢米頓圖(Hamiltonian graph)”。讓我們再來舉個例子吧！如下：



大概掌握了意思了吧！

以此圖來看，我們會發現有趣的是，這種圖形每個出入口皆只有三個，而每當通過一個點，其必聯通連接此點的兩個邊，而第三邊則不會連接到。因此，依此性質，我們會發現有一種可供解題的方法（也是規則）：

一、 若有一個頂點，其出入口數（即連接此點的邊數）為二時，則這兩邊都必須畫到。

二、 在把所有的點都畫完之前，其路徑不能是一個封閉的圈。

三、 當一筆畫過某點時，其餘連結此頂點的各邊皆可刪去，換句話說，一個頂點所連接的邊數不論有多少，我們都只能畫兩條，即一條入、一條出。

舉個例子來說：

1、 現在給定了一個圖，要找出其漢米頓圈，我們有怎樣的做法呢？首先且也是最重要的步驟－先將各個頂點標上符號，以利辨識。假設從點 A 開始好了，接著有到 C、D 及 B 三種選擇，我們拿至 D 的路徑、而由 AB 線段為終線--來做個說明(以紅色表路徑)。

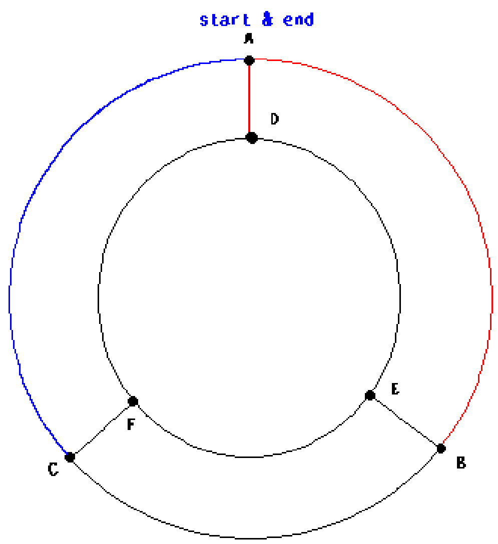
２、　現在依照規則三可知，AC 線段則可去除(以藍色表去除)。再依照規則一所示，則 CF 線段和 BC 線段必須連起來。

３、　依照規則三，BE 線段也必須去除掉。

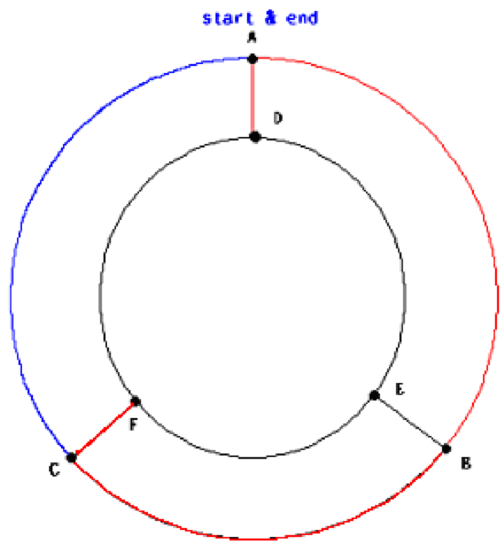
４、　再連上 DE、DF 線段，就完成了！

詳細圖解，請參照下圖：

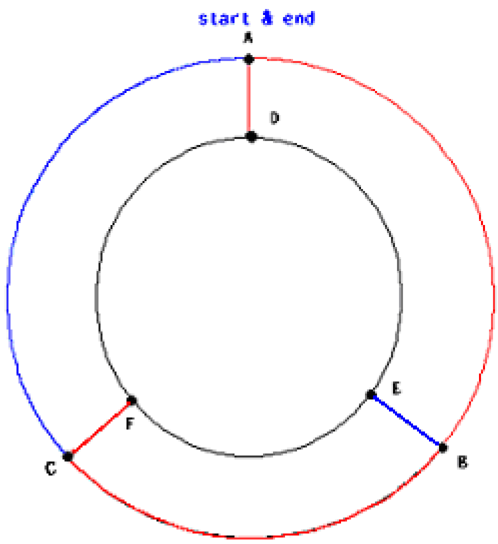
步驟 1



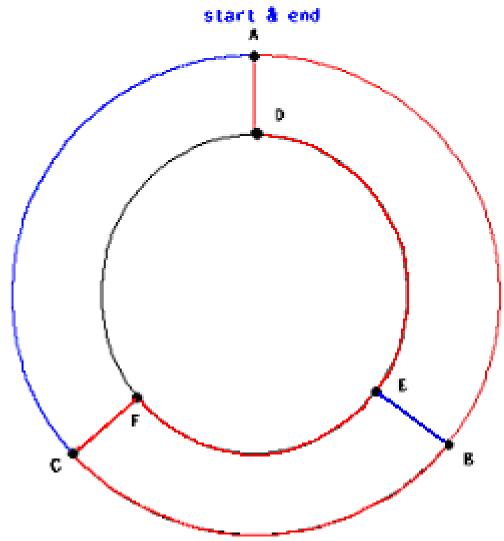
步驟 2



步驟 3



步驟 4



　　這只是一些基本的規則，當然，要畫成圖，以更複雜的圖來說，還是需要練習敏銳及熟練，及一錯再錯的勇氣，說句實話，在書後所附錄的一

些圖中，我也嘗試過去解它，雖然一再失誤，但始終是解出來了。以上所提到的，其各個頂點所連接的邊數皆只有三條，數學家又稱此種圖叫做「三正則圖」。至於有什麼好處，在之後我們會去研究它。

現在，我們了解漢米頓圖的定義及解題規則後－問題來了！

如今有個８×８的西洋棋盤，而我們要以西洋棋中「騎士」的走法，也就是走「日」形。簡單的說，就是象棋中「馬」走的方式。如今，以馬的位置（左上角）開始出發，經過棋盤上的每一個位置，且每個位置皆只能走過一遍，最後回到原出發點（如下頁圖）。

1	44	53	60	3	6	51	48
54	61	2	45	52	49	4	7
43	64	59	56	5	8	47	50
58	55	62	41	46	25	10	31
63	42	57	14	9	30	23	26
18	15	40	37	24	27	32	11
39	36	17	20	13	34	29	22
16	19	38	35	28	21	12	33

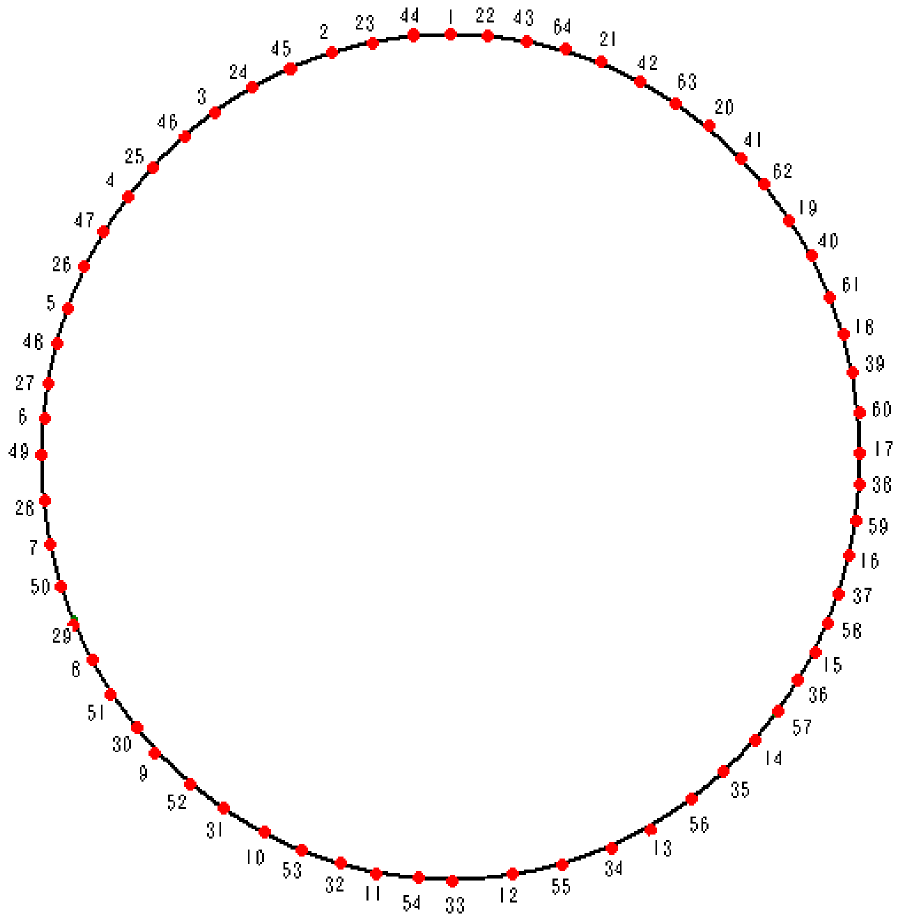
如上圖所示，依照數字的順序來走，就完成此題。而這僅只是解答，至於要大家自己試試看來解此題，乍看之下，好像大家的第一印象就是——走走看！其實也沒錯。只是當我們了解了漢米頓，就想想看－能不能夠用漢米頓圖的方法來解？

要用漢米頓圖的方法，就得先設計出個漢米頓圖的形式－於是我設計如下：先設計一個棋盤並依順序標上１～６４的數字－

圖 A

1	9	17	25	33	41	49	57
2	10	18	26	34	42	50	58
3	11	19	27	35	43	51	59
4	12	20	28	36	44	52	60
5	13	21	29	37	45	53	61
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63
8	16	24	32	40	48	56	64

再做一個圓，依逆時針方向做６４等分圓周點，並每隔兩格就標上一數，如下頁圖所示：



再分析圖 A 中各位置所能走的下一個點，並統計成表格，以利在製圖過程

中作為對照用。製成表格如下圖：

表一

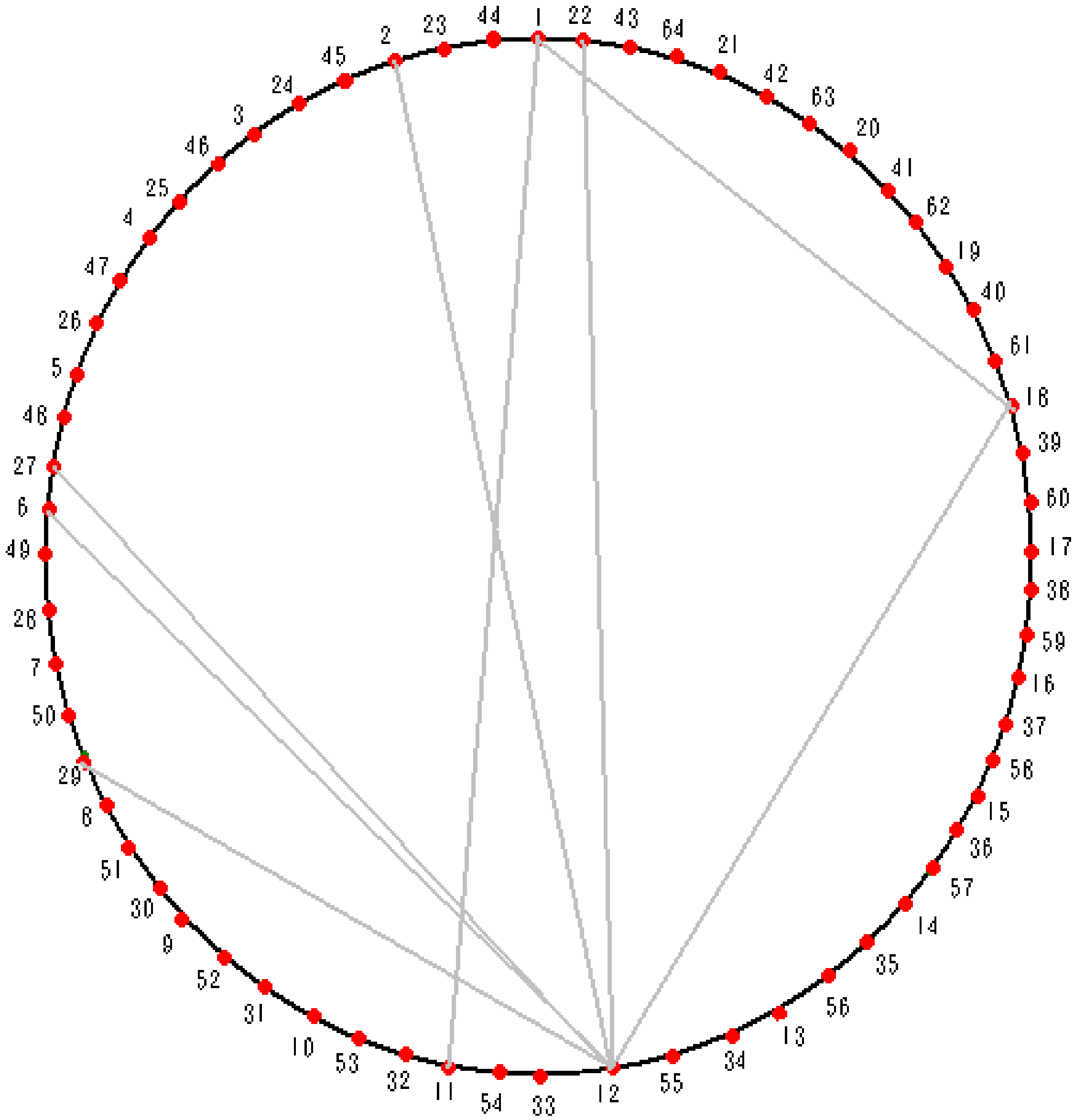
1、前方數字為各點代號，詳見圖一

2、後方長條狀內數字所示是各點所能連接的格

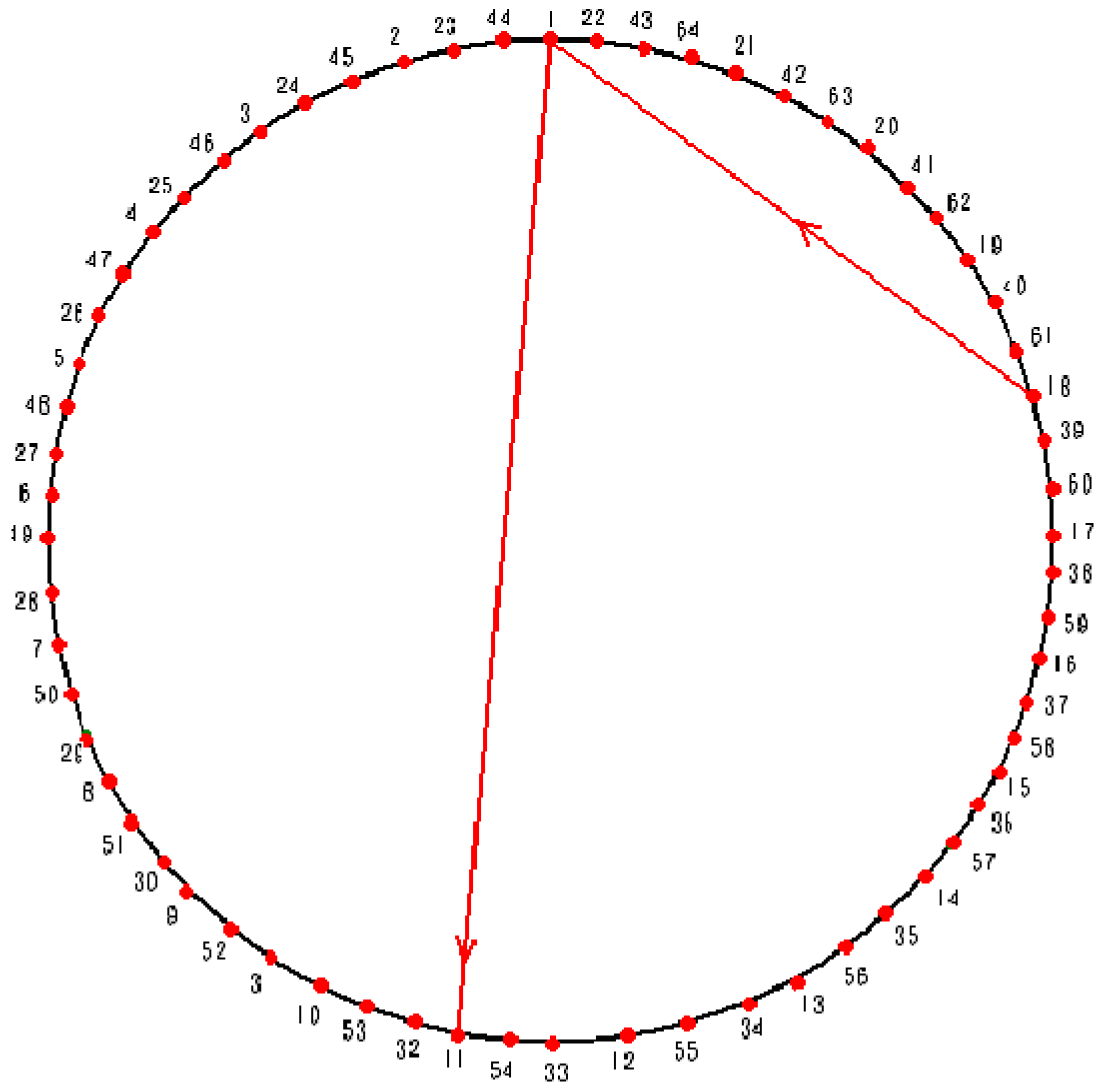
1	11、18	33	18、27、43、50
2	12、17、19	34	17、19、28、44、49、51
3	9、13、18、20	35	18、20、25、29、41、45、50、52
4	10、14、19、21	36	19、21、26、30、42、46、51、53
5	11、15、20、22	37	20、22、27、31、43、47、52、54
6	12、16、21、23	38	21、23、28、32、44、48、53、55
7	13、22、24	39	22、24、29、45、54、56
8	14、23	40	23、30、46、55
9	3、19、26	41	26、35、51、58
10	4、20、25、27	42	25、27、36、52、57、59
11	1、5、17、21、26、28	43	26、28、33、37、49、53、58、60
12	2、6、18、22、27、29	44	27、29、34、38、50、54、59、61
13	3、7、19、23、28、30	45	28、30、35、39、51、55、60、62
14	4、8、20、24、29、31	46	29、31、36、40、52、56、61、63
15	5、21、30、32	47	30、32、37、53、62、64
16	6、22、31	48	31、38、54、63
17	2、11、27、34	49	34、43、59
18	1、3、12、28、33、35	50	33、35、44、60
19	2、4、9、13、25、29、34、36	51	34、36、41、45、57、61
20	3、5、10、14、26、30、35、37	52	35、37、42、46、58、62
21	4、6、11、15、27、31、36、38	53	36、38、43、47、59、63
22	5、7、12、16、28、32、37、39	54	37、39、44、48、60、64
23	6、8、13、29、38、40	55	38、40、45、61
24	7、14、30、39	56	39、46、62
25	10、19、35、42	57	42、51
26	9、11、20、36、41、43	58	41、43、52
27	10、12、17、21、33、37、42、44	59	42、44、49、53
28	11、13、18、22、34、38、43、45	60	43、45、50、54
29	12、14、19、23、35、39、44、46	61	44、46、51、55
30	13、15、20、24、36、40、45、47	62	45、47、52、56
31	14、16、21、37、46、48	63	46、48、53
32	15、22、38、47	64	47、54

根據圖一、圖二、表一的資料，我們即可繪出漢米頓圖，只是為了方便起

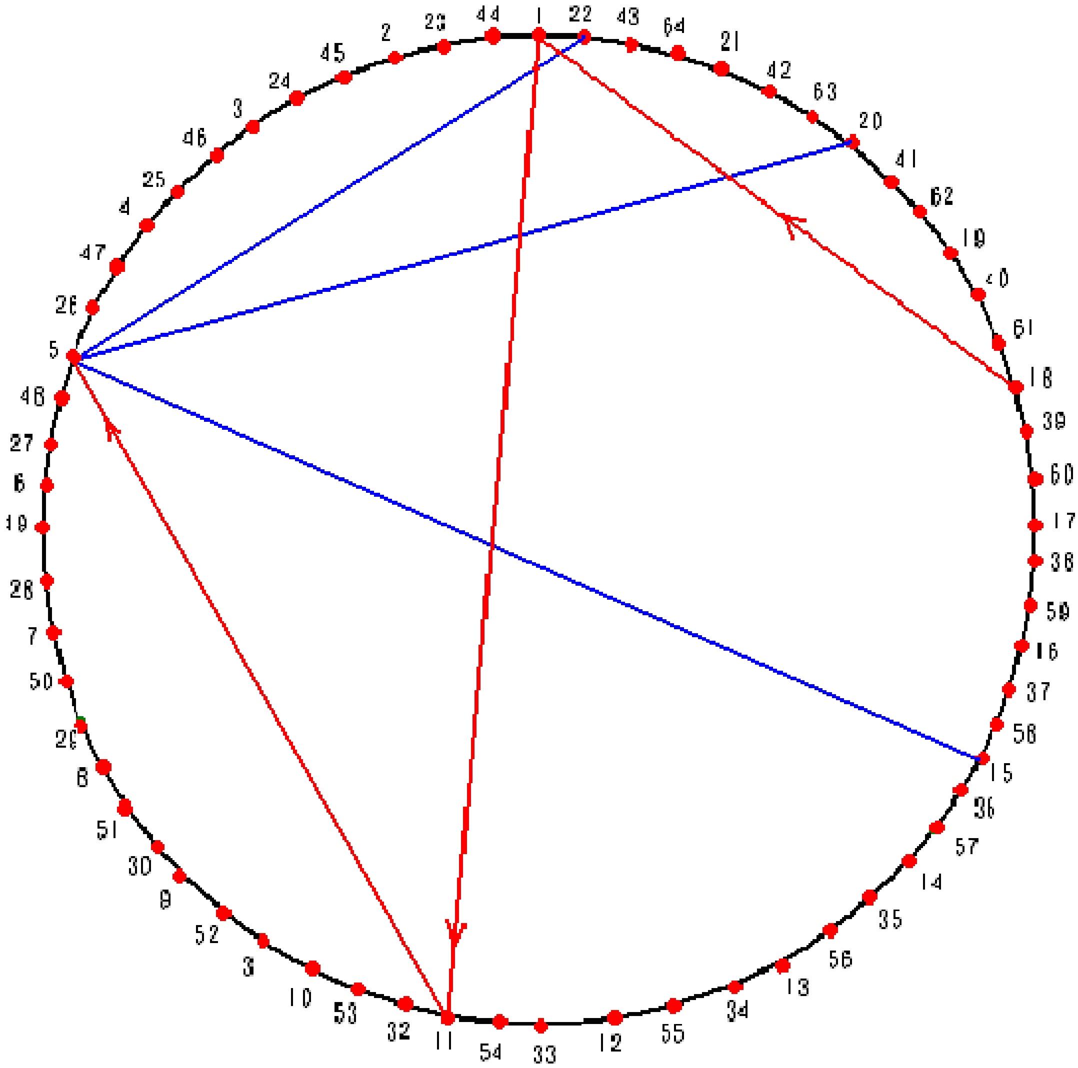
見，我以圓形漢米頓圖來解此，即將各點和可相連點以線段相連，如下：
（如:1 連 11、18;12 連 2、6、18、22、27、29…等）



以上皆準備就緒後，我們就要開始來解題了！
首先，我從１點開始出發，緊接著便是１１點和１８點，其實兩點都可以走，只是為了和書上有別，我選擇的下一個點（也就是第二步）走在１１的點上，而１點跟１８的點自然是要連（如圖：紅色線段表可走或已走；根據規則一，１點和１１、１８兩點皆要連）



接下來，到１１點後，又有六個點了，怎麼辦？不要緊，在這六個點中任選一個喜歡的點往下走，但千萬要注意，假如走了２８的點，第四步便不能回到１８點，否則即違反規則二。而我所選擇的第三個點是５的點，沒什麼原因，只是看起來順眼…既然我選擇了５的點，那麼，１１除了連接５外，其餘的便要槓掉（依據規則三，以藍線表示）。



以次類推，再經過不斷的失誤、重試、失誤、再重試…累積經驗，最後總算是完成了！其實，這之中，依據規則一，我們也可先把８點連１４、２３；５７連４２、５１；６４連４７、５４這些先用紅線相連接，或許可以幫助完成此圖得此解。

而我畫出來的結果，以表格表示，如下頁圖圖Ｃ：

圖 C

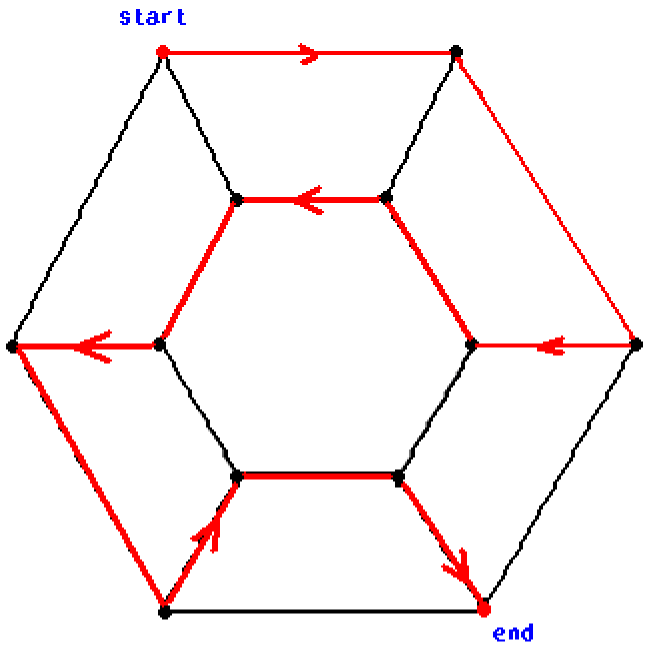
（如下圖，數字表示所走的順序）

1	34	53	30	25	10	51	12
54	29	64	33	52	13	24	15
35	2	31	26	9	16	11	50
28	55	4	63	32	49	14	23
3	36	27	8	17	22	61	48
56	5	42	39	62	45	18	21
37	40	7	58	43	20	47	60
6	57	38	41	46	59	44	19

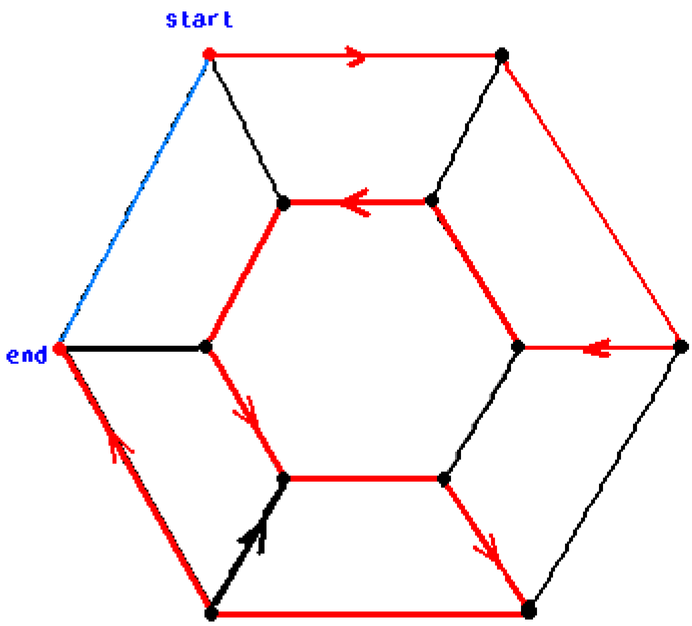
結果總算是完成啦！各位可以自己試試…

～～一筆路徑問題——漢米頓路徑與漢米頓可畫絲圖～～

是的，再這一章中，我們要來探討的，當某個圖形，不能一筆畫遊歷且起點等於終點的話，我們能不能退而求其次，就一筆遊歷過所有點，但起點不等於終點，如下圖：



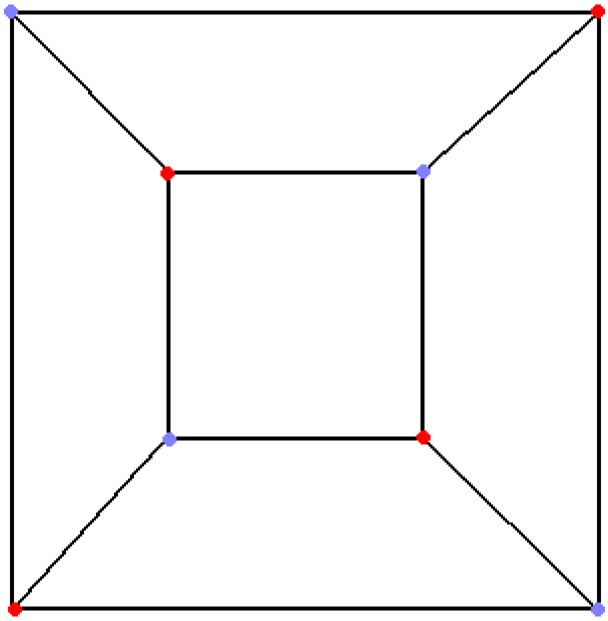
因為其起點不等於終點，而看起來像是一個路徑，而稱之為「一筆畫路徑」。然而以一個漢米頓連接圖來說，它也是個漢米頓圖，如下：



看到嗎？只要連上藍線，不就成了「漢米頓圖」？

另外，又有一些圖，可以以兩種顏色著色之，如下圖，我們稱之為「二分

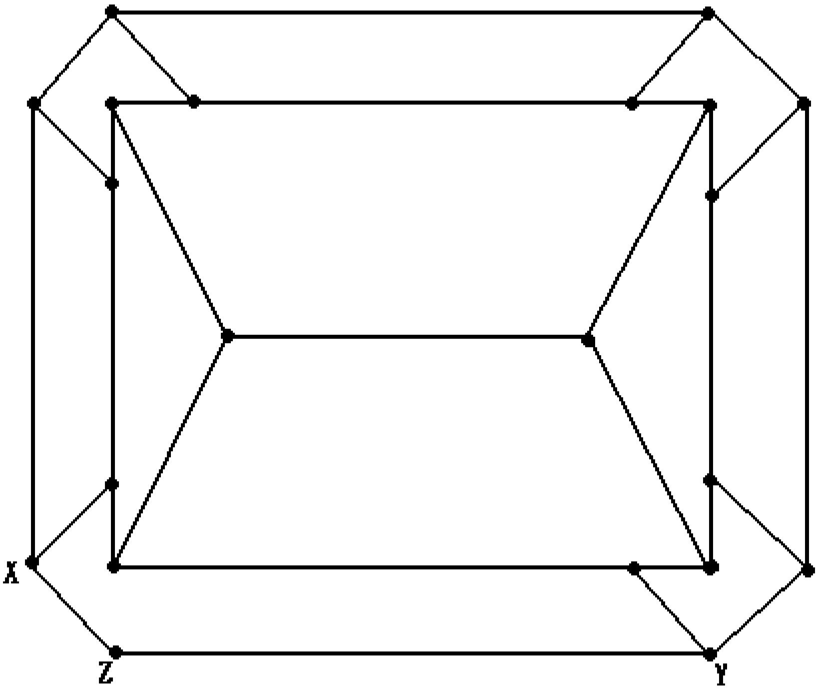
圖形」。以下圖來說吧！



而以二分圖形來說，我們會發現，任兩個不同色點之間，都有一筆畫路徑可以連接，所以又有人提出「漢米頓可蕾絲圖」的概念，就是「任意不同色的兩點，都有一筆畫路徑。」而漢米頓路徑及漢米頓可蕾絲圖都是屬於漢米頓圖。證明的方法，就先做出兩相鄰點的一筆畫路徑，再將起點和終點連起來就行了。

～～討論～～

說了這麼多些，有沒有發現，以上所舉例子，都是每個頂點都有三個出入口？其實這是有理由的。我們來看個例子：



上頁圖會發現，z 點只有兩個出入口，現在再來看看，這種情況，是不是一個漢米頓連接圖？首先，找 y 點到 x 點的一筆畫路徑，假如從 y 點出發，不經過 z 點而到達 x 點，則不會經過了 z 點，就不是一個漢米頓路徑；假如先經過了 z 點，則馬上到了 x 點，其他點便不會經過，也不是漢米頓連接圖。所以我們知道，一個漢米頓連接圖的各頂點最少要有三個出入口，想當然爾，最少次數自然是三囉！所以得到個結論，頂點次數為三的漢米頓連接圖，是邊數最少的。

我的報告就到此囉，還有更多的問題需要再加研究，仍須多加努力！