

投稿類別：物理類

篇名：

瑪格努斯飛行杯

作者：

傅有鵬。國立台灣師範大學附屬高級中學。高二 1401 班

陳奕豪。國立台灣師範大學附屬高級中學。高二 1402 班

鄧聖儒。國立台灣師範大學附屬高級中學。高二 1402 班

指導老師：

黃裕修老師

壹、前言

一、研究動機

在一次專題研究的演講中，看到主講的教授將兩個紙杯組合後，用橡皮筋纏繞後彈射出去，竟然出現緩慢地先升後降，甚至是迴旋的奇妙軌跡！透過教授的巧手可以自由地控制飛得高或飛得遠，隱約覺得和足球的彎曲路徑應該有異曲同工之妙，因此讓熱愛足球運動的我們產生想應用流體力學的相關原理，嘗試用定量的方法去分析影響紙杯運動的相關效應，拆解出控制飛行杯的秘密。

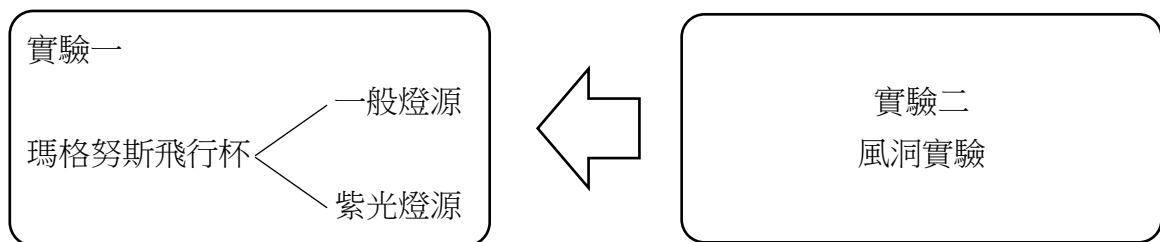
二、研究目的

- 1、探討在一次發射中，飛行杯垂直方向加速度和其水平方向速度的關係。
- 2、探討在一次發射中，飛行杯水平方向加速度和其垂直方向速度的關係。
- 3、探討在一次發射中，飛行杯水平方向加速度和其時間的關係。
- 4、探討在一次發射中，飛行杯垂直方向速度和其時間的關係。
- 5、探討運動中的飛行杯受空氣阻力效應的影響。
- 6、利用風洞實驗，探討紙杯轉速與升力的關係。

三、研究方法

透過對於文獻的分析和實際動手操作實驗，統整後得到結論。

四、研究架構

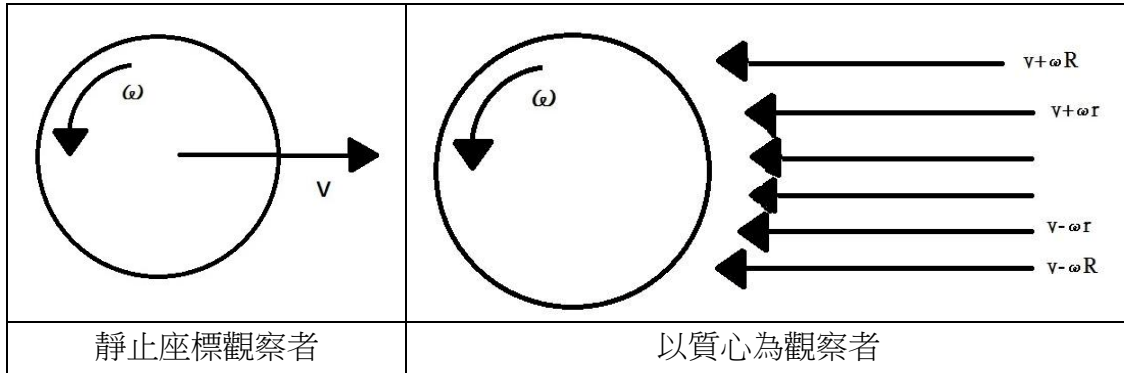


圖一：研究架構
(圖一資料來源：研究者繪製)

貳、正文

一、研究原理

因鬆緊帶的彈力使飛行杯具有平移速度，而接觸的摩擦力可使其產生的角速度，若由與紙杯速度相同的觀察者觀察紙杯飛行，則產生的風速如圖二所示



圖二

(圖二資料來源：研究者繪製)

設紙杯半徑為 R ，角速度為 ω ，在半徑為 R 處下端空氣的壓力為 $P_{\text{下}}$ ，上端空氣壓力為 $P_{\text{上}}$ ，空氣密度為 ρ ，重力加速度為 g ，則可算出飛行杯所受之瑪格努斯力 \vec{F}_M

由Bernoulli's principle

$$P_{\text{下}} - \rho g R + \frac{1}{2} \rho (v - R\omega)^2 = P_{\text{上}} + \rho g R + \frac{1}{2} \rho (v + R\omega)^2$$

$$\Delta P \equiv P_{\text{下}} - P_{\text{上}} = 2\rho g R + 2\rho v R \omega \approx 2\rho v \omega R$$

<p>圖三：紙杯的長度 (圖三資料來源：研究者繪製)</p>	<p>圖四：紙杯的截面積 (圖四資料來源：研究者繪製)</p>	<p>圖五：紙杯所受到的力 (圖五資料來源：研究者繪製)</p>

$$dx = \frac{l}{2(R_2 - R_1)} dR$$

$$dA = 2Rdx = \frac{Rl}{R_2 - R_1} dR$$

$$dF = \Delta P dA = \frac{2R^2 l \rho v \omega}{R_2 - R_1} dR$$

$$F_M = 2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{2R^2 l \rho v \omega}{R_2 - R_1} dR = \frac{4l \rho v \omega (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)}{3}$$

$$\vec{F}_M = \frac{4l \rho (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)}{3} (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

接著我們可以得知飛行杯之各向受力，便可推出其 $V(t)$ 由於其飛行速度慢，故忽略空氣阻力對飛行杯的影響。

$$\text{由 } \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$a_x = -kv_y \Rightarrow v_y = -\frac{a_x}{k}$$

$$a_y = kv_x - g \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{k} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = kv_x - g$$

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + kv_x - g = 0 \text{ 之解的標準式為 } v_x = v_0 \cos(kt + \theta) + \frac{g}{k} \text{ 代入得}$$

$$v_x = v_0 \cos(kt + \theta) + \frac{g}{k} \quad v_y = v_0 \sin(kt + \theta)$$

$$a_x = -kv_0 \sin(kt + \theta) \quad a_y = kv_0 \cos(kt + \theta)$$

$$\text{代入起飛的邊界條件：} v_y = 0 \text{、} t = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ or } \pi$$

$$\text{又在起飛時 } v_x \text{ 為最大 } \Rightarrow \theta = 0$$

$$\text{得 } v_x = v_0 \cos(kt) + \frac{g}{k} \quad v_y = v_0 \sin(kt)$$

$$x = \frac{v_0 \sin(kt)}{k} + \frac{g}{k} t + c_1 \quad y = \frac{-v_0 \cos(kt)}{k} + c_2$$

$$\text{代入起飛的邊界條件：} y=0 \text{、} x=0 \text{、} t=0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{、} c_2 = \frac{v_0}{k}$$

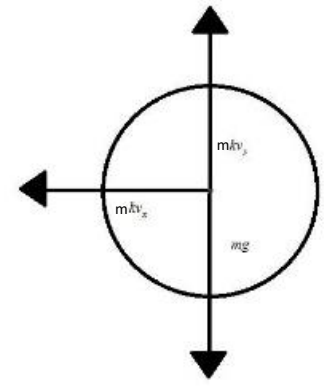
$$\text{故有 } x = \frac{v_0 \sin(kt)}{k} + \frac{g}{k} t \quad y = \frac{-v_0 \cos(kt)}{k} + \frac{v_0}{k}$$

$$v_x = v_0 \cos(kt) + \frac{g}{k} \quad v_y = v_0 \sin(kt)$$

$$a_x = -kv_0 \sin(kt) \quad a_y = kv_0 \cos(kt)$$

$$\text{根據 Taylor series 得 } \sin(kt) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^x \left[\frac{d^n}{dt^n} \sin(kt_0) \right] \frac{(t-t_0)^n}{n!}$$

在 t 極小時 $\sin(kt)$ 可近似於 kt ，故 a_x 、 V_y 在剛起飛時與 t 之關係應為線性




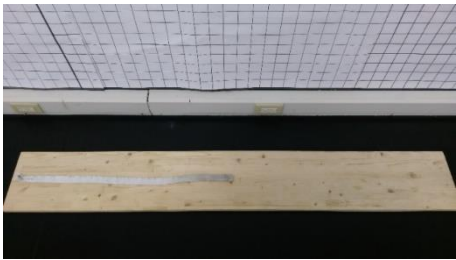




圖六：簡易力圖

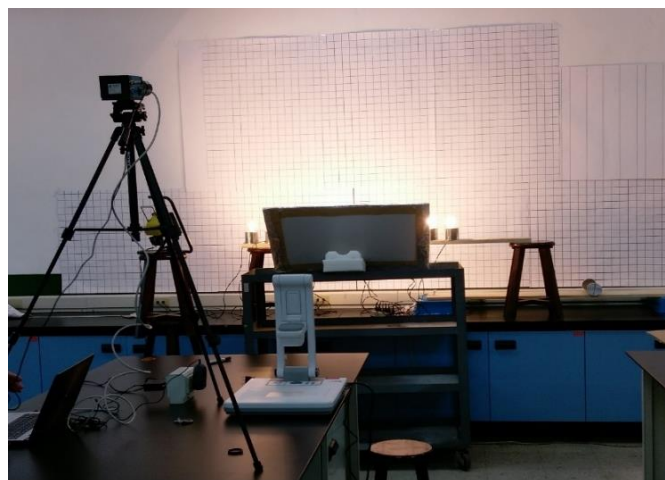
(圖六資料來源：研究者繪製)

二、實驗一：瑪格努斯飛行杯

(一) 實驗器材

	
<p>圖七：相機（型號 CASIO EX-ZR1500） （圖七資料來源：研究者拍攝）</p>	<p>圖八：高速攝影機 （型號 SpeedCam MiniVis e2） （圖八資料來源：研究者拍攝）</p>
	
<p>圖九：自製飛行杯 （杯口半徑 4.2cm，杯底半徑 2.8cm， 全長 13.2cm） （圖九資料來源：研究者拍攝）</p>	<p>圖十：自製發射台 （長 175 公分、寬 25 公分、高 1.8 公分） （圖十資料來源：研究者拍攝）</p>
	
<p>圖十一：紫光燈 （圖十一：資料來源：研究者拍攝）</p>	<p>圖十二：熱風電烙鐵吹焊台 （圖十二資料來源：研究者拍攝）</p>

(二) 實驗環境



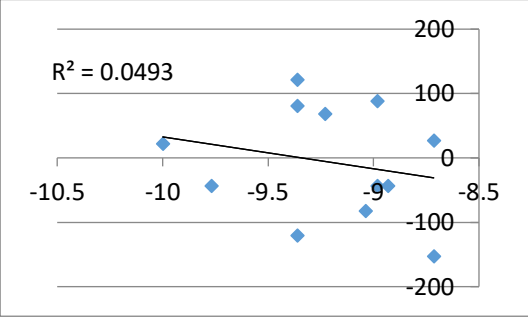
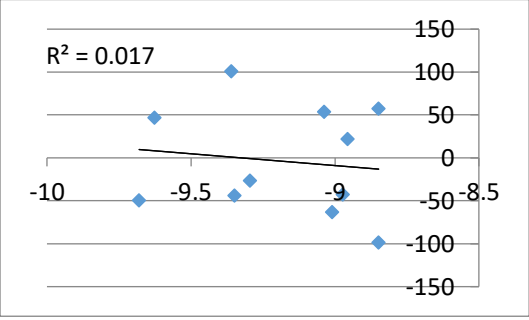
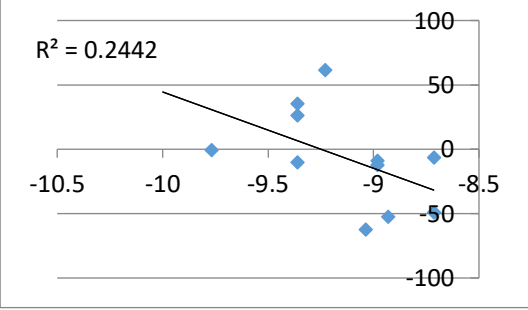
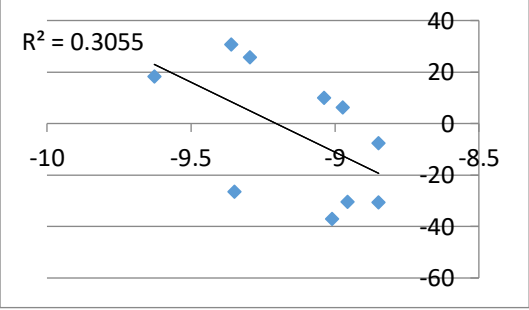
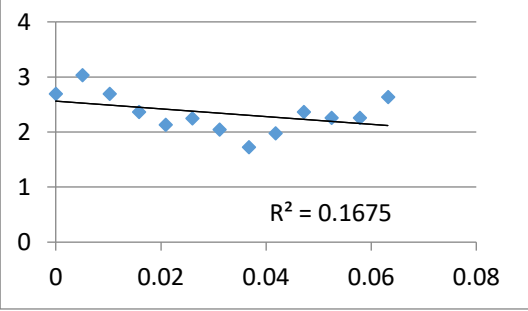
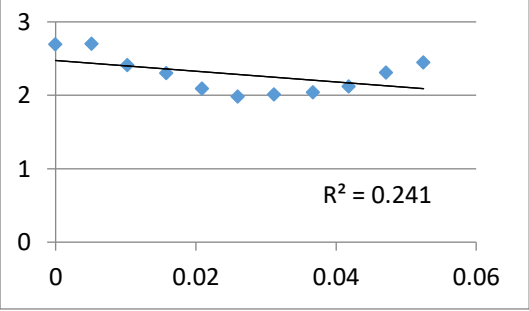
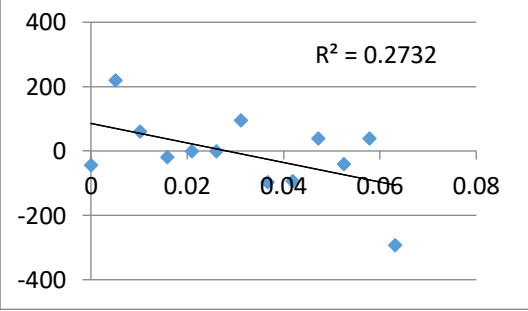
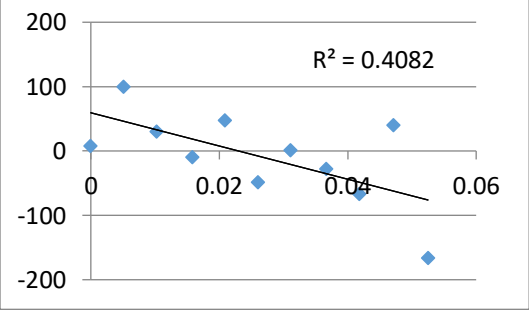
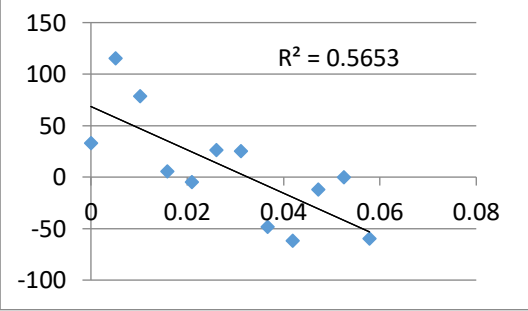
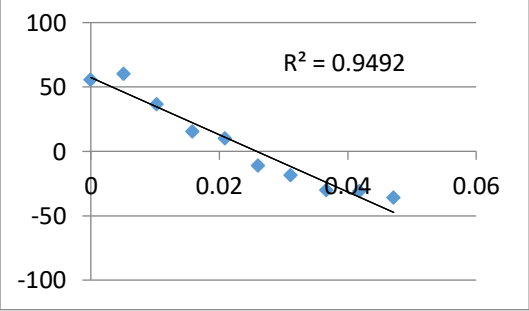
圖十三：飛行杯的發射環境
(圖十三資料來源：研究者拍攝)

(三) 實驗結果

表一：實驗數據作圖

	原圖	移動平均後
$a_{x1} (m/s^2)$ $-V_y (m/s)$		
$a_{x2} (m/s^2)$ $-V_y (m/s)$		

瑪格努斯飛行杯

$a_{y1} (m/s^2)$ $-V_x (m/s)$	 <p>$R^2 = 0.0493$</p>	 <p>$R^2 = 0.017$</p>
$a_{y2} (m/s^2)$ $-V_x (m/s)$	 <p>$R^2 = 0.2442$</p>	 <p>$R^2 = 0.3055$</p>
$V_y (m/s)$ $-t (s)$	 <p>$R^2 = 0.1675$</p>	 <p>$R^2 = 0.241$</p>
$a_{x1} (m/s^2)$ $-t (s)$	 <p>$R^2 = 0.2732$</p>	 <p>$R^2 = 0.4082$</p>
$a_{x2} (m/s^2)$ $-t (s)$	 <p>$R^2 = 0.5653$</p>	 <p>$R^2 = 0.9492$</p>
k 值討論	Tracker 分析之 k 為 $(a_y - V_x)$ 圖之斜率 49.48 理論算出之 k 為 $0.054573 * \omega = 16.326$	Tracker 分析之 k 為 $(a_y - V_x)$ 圖之斜率 54.29 理論算出之 k 為 $0.054573 * \omega = 16.326$

(表一資料來源：研究者繪製)

瑪格努斯飛行杯

- 1、從 a_x-V_y 圖中可看出有一條負相關斜直線，其結果與理論之 x 方向加速度與 y 方向速度為線性關係符合，然而出現了數個不符合之數據點，推測其因可能為鬆緊帶並未完全脫離飛行杯使其受到外力，亦有可能是 tracker 在追蹤時無抓到飛行杯中心造成加速度的誤差，若在追蹤質點時距離誤差達到杯上之最大距離，甚至可使速度達到數十倍的誤差，故即便追蹤時已盡可能精確，微小差距仍可能對加速度產生巨大改變
- 2、從 a_y-V_x 圖中可看出有一條正相關斜直線，其結果與理論之 y 方向加速度與 x 方向速度為線性關係符合，然而出現數個不符合之數據點，但在使用移動平均法調整數據後數量減少，故其較有可能是因 tracker 在追蹤時產生的誤差
- 3、從 V_y-t 圖中可看出一條正相關斜直線，其結果與理論之 V_y 在 t 極小時與 t 成正比符合，更加驗證了我們對於其飛行軌跡之運算正確性
- 4、從 a_x-t 圖中可看出一條負相關斜直線，其結果與理論之 a_x 在 t 極小時與 t 成正比符合，但因 tracker 在追蹤 a 造成之誤差導致有數點不符合
- 5、 k 值在原數據中與理論之誤差為 67.0%，推測原因有 tracker 追蹤時加速度的誤差、作圖時不符合之數據點造成之斜率偏差； k 值在移動平均後之數據中與理論之誤差為 69.9%，推測原因有 tracker 追蹤時加速度的誤差、作圖時不符合之數據點造成之斜率偏差（ k 值誤差公式(實際值-理論值)/實際值）





三、實驗二：風洞實驗

(一) 實驗裝置



圖十四：自製風洞裝置
(圖十四資料來源：研究者拍攝)

瑪格努斯飛行杯

	
<p>圖十五：變速馬達 (圖十五資料來源：研究者拍攝)</p>	<p>圖十六：直流電源供應器 (圖十六資料來源：研究者拍攝)</p>
	
<p>圖十七：煙霧機 (圖十七資料來源：研究者拍攝)</p>	<p>圖十八：風速計 (圖十八資料來源：研究者拍攝)</p>

(二) 實驗環境



圖十九：風洞實驗的環境
(圖十九資料來源：研究者拍攝)

(三) 實驗技巧

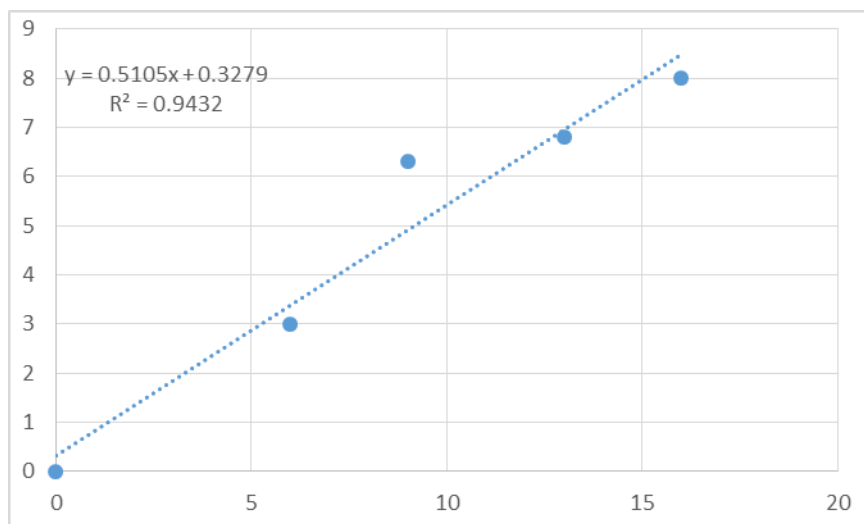
將變速馬達和飛行杯固定，使馬達運轉，在馬達底下墊木塊，放上磅秤並歸零，可免去製作支架的時間

(四) 結果與討論

表二：轉速-磅秤讀數

轉速 (rps)	磅秤讀數 (gw)
0	0
6	3
9	6.3
13	6.8
16	8

(表二資料來源：研究者繪製)



圖二十：磅秤讀數（克重）-轉速（圈/秒）

(圖二十資料來源：研究者繪製)

- 1、可看出瑪格努斯力和轉速成正比
- 2、使用煙霧機在風洞中製造煙霧，並觀察其流線，在經過整流段後幾乎為水平，並使用風速計測量飛行杯周圍之風速可達 40 至 50km/hr，接近飛行杯飛行之最高速，發現其風速在飛行杯四周之改變不大，故更加確定風之穩定性符合假設
- 3、由於紙杯之 ω 是垂直射入紙面，導致下方之空氣流速較快，壓力小，所以由理想氣體方程式 $P=C_MRT$ (P : 壓力, C_M : 莫耳濃度, R : 理想氣體常數, T : 溫度)，下方的煙霧也較稀薄，從風洞出來的煙霧可明顯看出，此結果更驗證了我們對於紙杯周圍風速的推測接近真實狀況
- 4、根據我們的實驗，我們發現飛行杯轉速與磅秤讀數圖的趨勢為斜直線，相關係數平方約為 0.94，故磅秤讀數與轉速成線性關係與理論相符

參、結論

- 一、雖在追蹤飛行路徑時仍有誤差，如 tracker 追蹤偏差、紊流、空氣阻力、發射時微小角度偏轉等，但實驗的數據已能看出瑪格努斯飛行杯之飛行路徑與理論的結果大致吻合，即

$$x = \frac{v_0 \sin(kt)}{k} + \frac{g}{k} t \quad y = \frac{-v_0 \cos(kt)}{k} + \frac{v_0}{k}$$

$$v_x = v_0 \cos(kt) + \frac{g}{k} \quad v_y = v_0 \sin(kt)$$

$$a_x = -kv_0 \sin(kt) \quad a_y = kv_0 \cos(kt)$$

- 二、經過風洞實驗後，可再次確認其瑪格努斯力與風速和轉速成正比

- 三、紙杯封口造成的兩邊重量不平衡以及紊流都將導致其向封口方向偏轉

肆、引註資料

Studio Tib. (譯) (2016)。網站擷取：使用 Python (原作者：Ryan Mitchell)。台北市：歐萊禮出版社。

Peter V. O'Neil. (2011). Advanced Engineering Mathematics 7th Edition. Retrieved March 18, 2017, from <https://goo.gl/sH5f1z>

王珉玟、徐力行、劉澄芳 (譯) (2014)。流體力學 (原作者：Robert W. Fox, Alan T. McDonald, Philip J. Pritchard)。新北市：全華出版社。

陳永銓 (譯) (2016)。流體力學 (原作者：Merle C. Potter, Bassem H. Ramadan, David C. Wiggert)。新北市：高立出版社。

邱美智、蕭次融 (2008)。飛行紙杯。2017 年 3 月 12 日，取自 [http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/97\(306-315\)/309-PDF/04-95096-%E9%A3%9B%E8%A1%8C%E7%B4%99%E6%9D%AF_%E6%9C%88%E5%88%8A_%E4%BF%AE%E6%AD%A3%E7%A8%BF.pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/97(306-315)/309-PDF/04-95096-%E9%A3%9B%E8%A1%8C%E7%B4%99%E6%9D%AF_%E6%9C%88%E5%88%8A_%E4%BF%AE%E6%AD%A3%E7%A8%BF.pdf)

李佳芸、莊竣宇、陳彥儒 (2012)。1/2 秒的偏移～棒球之變化球軌跡模式的建立。2017 年 3 月 12 日，取自台灣網路科教館。

林明瑞 (主編) (2003)。高級中學物質科學物理篇(下)。台南市：南一出版社。