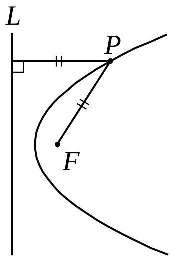
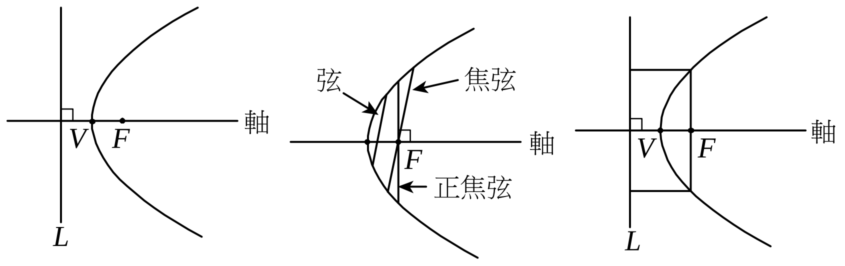
ok441 拋物線

主題一、拋物線的幾何定義

1. 拋物線的定義:
   設 L 是平面上的一定直線, F 是不在 L 上的一定點．平面上到 L 與 F 等距離的所有點 P 所形成的圖形，稱為拋物線，而 L 與 F 分別稱為此拋物線的準線與焦點.



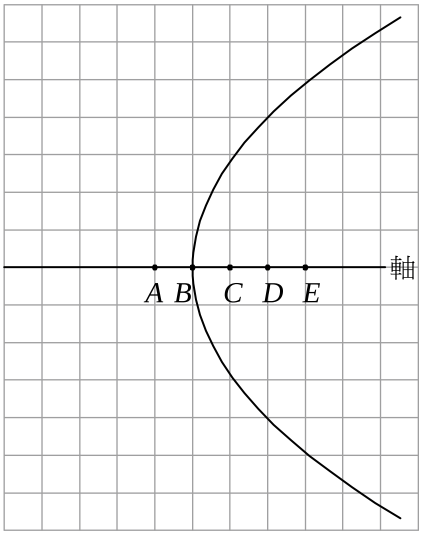
2. 拋物線的圖形要素:
   (1) 對稱軸: 通過焦點 F 且與準線 L 垂直的直線稱為對稱軸，簡稱軸．
   (2) 頂　點: 對稱軸和拋物線的交點 V 稱為頂點．
   (3) 焦　距: 頂點 V 和焦點 F 的距離 $\overline{VF}$ 稱為焦距．
   (4) 弦　　: 拋物線上任取兩相異點的連接線段稱為弦．
   (5) 正焦弦: 過焦點的弦稱為焦弦，當焦弦與軸垂直時，稱為正焦弦．正焦弦的長恰為焦距的 4 倍（如下圖(c)）.



(*a*) (*b*) (*c*)

【例題 1】

下圖為一拋物線的部分圖形，且 *A*，*B*，*C*，*D*，*E* 五個點中有一為其焦點．問：哪一點是其焦點?

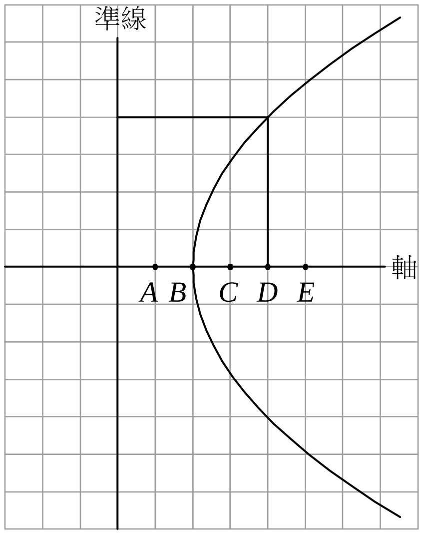


Ans：*D*

【詳解】

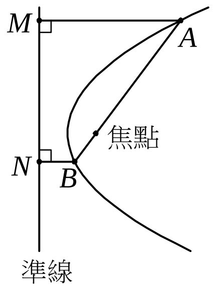
因為正焦弦的長為焦距的 4 倍，

所以由下圖可知拋物線的焦點為 *D*．



【類題 1】

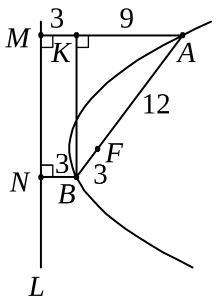
設 $\overline{AB}$ 是拋物線的焦弦，$\overline{AM}$，$\overline{BN}$ 分別為點 A，B 到準線的垂線，如下圖所示．已知 $\overline{AM}=12$，$\overline{BN}=3$，求 $\overline{MN}$ 的長．



Ans：12

【詳解】

設拋物線的焦點為 F，準線為 L，並作線段 $\overline{BK}\perp\overline{AM}$，如下圖所示．



由拋物線的定義可知：

$\overline{AF}=\overline{AM}=12$，$\overline{BF}=\overline{BN}=3$，

並且由圖可知：$\overline{AB}=15$，$\overline{AK}=9$．

因為$\triangle ABK$ 是一個直角三角形，

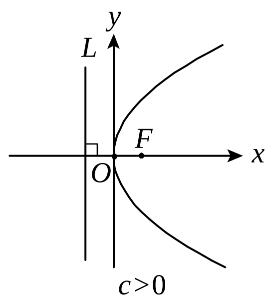
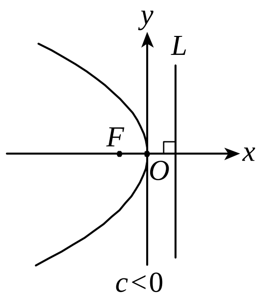
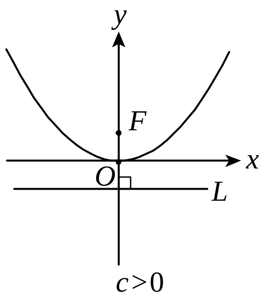
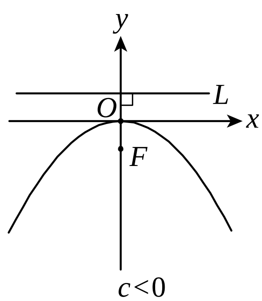
所以 $\overline{BK}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AK}^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

因此 $\overline{MN}=\overline{BK}=12$．

主題二、拋物線的標準式

1. 頂點在原點之拋物線的標準式：

表中各拋物線之焦點與頂點的距離均為$|c|$（焦距為$|c|$），正焦弦長為$4|c|$．當拋物線的對稱軸與坐標軸平行，但是頂點(h,k)不在原點時，可利用平移的概念了解方程式與各要素間的關係

標準式	焦點	準線	圖形
$y^2=4cx$	$F\ (c,0)$	$L:\ x=-c$	 
$x^2=4cy$	$F\ (0,c)$	$L:\ y=-c$	 

2. 求拋物線標準式的三個條件：

(1) 頂點(h,k)．

(2) c（由焦距求$|c|$，由開口的方向判斷c的正負）．

(3) 開口方向（左右開口型或上下開口型）．

由(1)(2)(3)即可求得拋物線的標準式．

左右開口		上下開口	
$(y-k)^2=4c(x-h)$		$(x-h)^2=4c(y-k)$	
$c>0$ 開口向右	$c<0$ 開口向左	$c>0$ 開口向上	$c<0$ 開口向下

【例題 2】

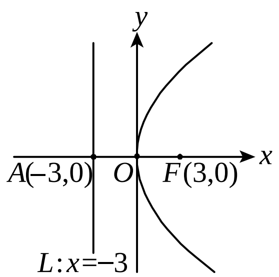
(1) 求焦點為 $F(3，0)$，準線為 $L：x=-3$ 的拋物線方程式．

(2) 求頂點為 $V(0，0)$，焦點為 $F(0，-2)$的拋物線方程式．

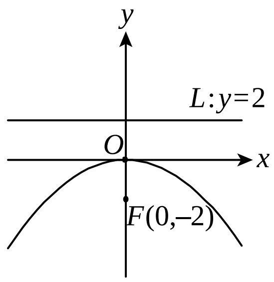
Ans：(1) $y^2=12x$，(2) $x^2=-8y$

【詳解】

(1) 如下圖所示，因為頂點是 $\overline{AF}$ 的中點，
所以頂點為(0，0)，
又由焦點 $F(3，0)$，可得 $c=3$．
因為開口向右之拋物線的標準式為 $y^2=4cx$，
所以此拋物線的方程式為 $y^2=12x$．



(2) 如下圖所示，因為頂點為(0，0)，焦點為 $F(0，-2)$，



所以 $c=-2$，準線為 $L：y=2$．
因為拋物線的開口向下，
所以由拋物線的標準式 $x^2=4cy$，
可得此拋物線的方程式為 $x^2=-8y$．

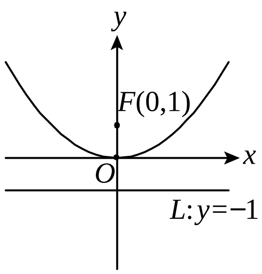
【類題 2】

(1) 求頂點為 $V(0，0)$，準線為 $L：y=-1$ 的拋物線方程式．
(2) 求焦點為 $F(-4，0)$，準線為 $L：x=4$ 的拋物線方程式．

Ans：(1) $x^2=4y$，(2) $y^2=-16x$

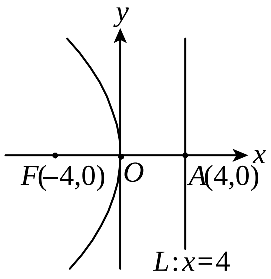
【詳解】

(1) 如下圖所示，因為頂點為(0，0)，準線為 $y=-1$，



所以焦點為 $F(0，1)$，$c=1$．
因為拋物線的開口向上，
所以由拋物線的標準式 $x^2=4cy$，
可得此拋物線的方程式為 $x^2=4y$．

(2) 如下圖所示，因為頂點是 $\overline{AF}$ 的中點，
所以頂點為(0，0)，



又由焦點 $F(-4，0)$，可得 $c=-4$．

因為開口向左之拋物線的標準式為 $y^2=4cx$，

所以此拋物線的方程式為 $y^2=16x$．

【例題 3】

求拋物線 $y^2=x$ 的頂點、焦點坐標與準線方程式．

Ans：頂點$(0,0)$，焦點$(\frac{1}{4},0)$，準線 $x=-\frac{1}{4}$

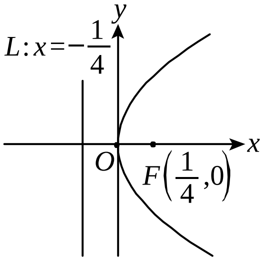
【詳解】

將方程式 $y^2=x$ 改寫成 $y^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot x$，

可知拋物線的頂點為$(0，0)$，$c=\frac{1}{4}$且開口向右．

焦點 F 的坐標$(c，0)=(\frac{1}{4}，0)$，

準線 $L：x=-c$，即 $x=-\frac{1}{4}$．



【類題 3】

求拋物線 $x^2=-12y$ 的頂點、焦點坐標與準線方程式．

Ans：頂點(0，0)，焦點(0，−3)，準線 $y=3$

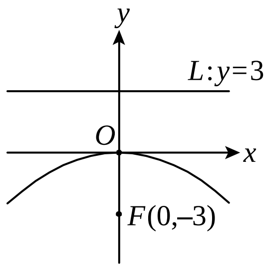
【詳解】

將方程式 $x^2=-12y$ 改寫成 $x^2=4\cdot(-3)\cdot y$，

可知拋物線的頂點為(0，0)，$c=-3$ 且開口向下．

焦點 F 的坐標$(0，c)=(0，-3)$，

準線 $L：y=-c$，即 $y=3$．



【例題 4】

(1) 求焦點為 $F(4，1)$，準線為 $L：x=-2$ 的拋物線方程式．

(2) 求頂點為 $V(2，1)$，準線為 $L：y=3$ 的拋物線方程式．

Ans：(1) $(y-1)^2=12(x-1)$，(2) $(x-2)^2=-8(y-1)$

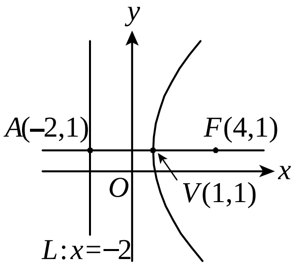
【詳解】

(1) 如下圖所示，頂點 V 為 $\overline{AF}$ 的中點，

可得其坐標為(1，1)，

又由焦點 $F(4，1)$、頂點 $V(1，1)$，

可得 $c=4-1=3$．



因為拋物線開口向右，

所以由拋物線的標準式$(y-k)^2=4c(x-h)$，

可得其方程式為$(y-1)^2=4\cdot 3\cdot (x-1)$，

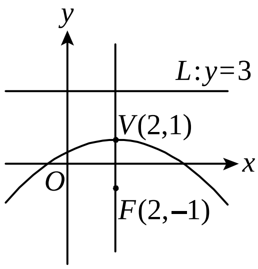
即$(y-1)^2=12(x-1)$．

(2) 如下圖所示，先計算 V 到 L 的距離為 2．

因為頂點 V 在準線 L 的下方，

所以拋物線開口向下，

且得 $c=-2$，焦點 F 為(2，–1)．



因為拋物線開口向下，

所以由拋物線的標準式$(x-h)^2=4c(y-k)$，

可得其方程式為$(x-2)^2=-8(y-1)$．

【類題 4】

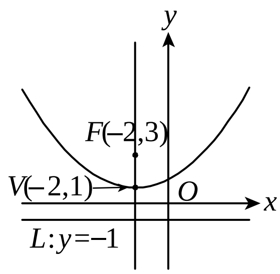
(1) 求焦點為 $F(-2，3)$，頂點為 $V(-2，1)$的拋物線方程式．

(2) 求焦點為 $F(-3，-2)$，準線為 $L：x=1$ 的拋物線方程式．

Ans：(1) $(x+2)^2=8(y-1)$，(2) $(y+2)^2=-8(x+1)$

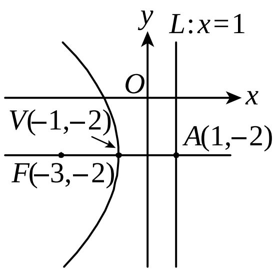
【詳解】

(1) 如下圖所示，由焦點 $F(-2，3)$、頂點$(-2，1)$，
可得 $c=3-1=2$，且拋物線開口向上．



由開口向上之拋物線的標準式為
$(x-h)^2=4c(y-k)$，
可得其方程式為$(x+2)^2=4\cdot2\cdot(y-1)$，
即$(x+2)^2=8(y-1)$．

(2) 如下圖所示，頂點 V 為 $\overline{AF}$ 的中點，
可得其坐標為$(-1，-2)$，
又由焦點 $F(-3，-2)$、頂點 $V(-1，-2)$，
可得 $c=(-3)-(-1)=-2$，
且拋物線開口向左．



由開口向左之拋物線的標準式為
$(y-k)^2=4c(x-h)$，
可得其方程式為
$(y-(-2))^2=4\cdot(-2)\cdot(x-(-1))$，
即$(y+2)^2=-8(x+1)$．

【例題 5】

求拋物線$(y+2)^2=12(x-1)$的焦點坐標與準線方程式．

Ans：焦點$(4，-2)$，準線 $x=-2$

【詳解】

將方程式$(y+2)^2=12(x-1)$

依標準式$(y-k)^2=4c(x-h)$

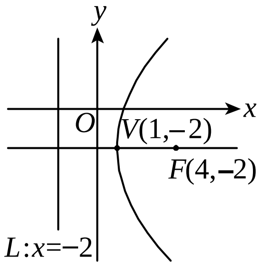
改寫成$(y-(-2))^2=4\cdot3\cdot(x-1)$，

得拋物線的頂點為$(1，-2)$，$c=3$，

且其開口向右．

焦點 F 的坐標$(h+c，k)=(4，-2)$，

準線 L：$x=h-c$，即 $x=-2$．



【類題 5】

求拋物線$(x-1)^2=-4(y-2)$的焦點坐標與準線方程式．

Ans：焦點$(1，1)$，準線 $y=3$

【詳解】

將方程式$(x-1)^2=-4(y-2)$

依標準式$(x-h)^2=4c(y-k)$

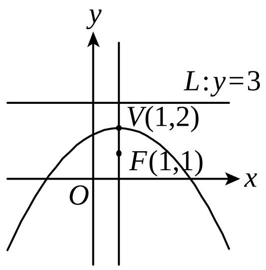
改寫成$(x-1)^2=4\cdot(-1)\cdot(y-2)$，

得拋物線的頂點為$(1，2)$，$c=-1$，

且其開口向下．

焦點 F 的坐標$(h，k+c)=(1，1)$，

準線 L：$y=k-c$，即 $y=3$．



【例題 6】

求拋物線 $x^2+4x+4y+8=0$ 的頂點坐標與準線方程式．

Ans：頂點$(-2，-1)$，準線 $y=0$

【詳解】

將 $x^2+4x+4y+8=0$ 配方可得

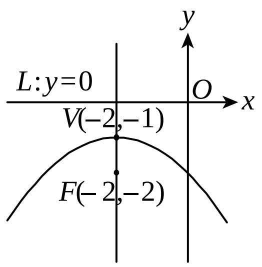
$(x+2)^2=-4y-4$,

$\Rightarrow (x+2)^2=-4(y+1)$,

$\Rightarrow (x+2)^2=4\cdot(-1)\cdot(y+1)$,

並得拋物線的頂點為$(-2，-1)$，$c=-1$,

準線 L：$y=k-c$，即 $y=0$（x 軸）．



【類題 6】

求拋物線 $y^2+2y+8x-23=0$ 的頂點坐標與準線方程式．

Ans：頂點$(3，-1)$，準點 $x=5$

【詳解】

將 $y^2+2y+8x-23=0$ 配方可得

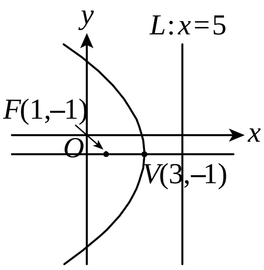
$(y+1)^2=-8x+24$,

$\Rightarrow (y+1)^2=-8(x-3)$,

$\Rightarrow (y+1)^2=4\cdot(-2)\cdot(x-3)$,

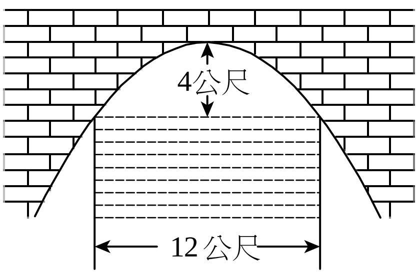
並得拋物線的頂點為$(3,-1)$，$c=-2$,

準線 L：$x=h-c$，即 $x=5$ ．



【例題 7】

下圖是一座拋物線造型的拱橋.已知此拋物線以通過最高點的鉛直線為對稱軸，當水面離最高點 4 公尺時，水面寬為 12 公尺，求水面離最高點 2 公尺時的水面寬度．



Ans： $6\sqrt{2}$ 公尺

【詳解】

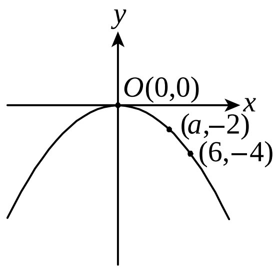
設拋物線的頂點為原點 O，開口向下,

其方程式為$(x-0)^2=4c(y-0)$ ．

由題意可知:

拋物線的圖形通過點$(6,-4)$，$(a,-2)$,

如下圖所示．



將$(6，-4)$代入$(x-0)^2=4c(y-0)$，

得 $36=-16c$，解得 $c=-\dfrac{9}{4}$，

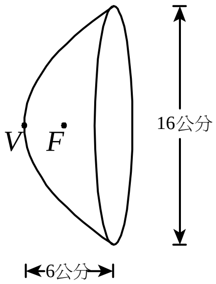
抛物線的方程式為 $x^2=-9y$．

再將$(a，-2)$代入 $x^2=-9y$，解得 $a=\pm3\sqrt{2}$，

故可得水面寬度為$6\sqrt{2}$公尺．

【類題 7-1】

已知探照燈內的反射鏡是一個拋物面，此曲面由拋物線繞軸旋轉而成，其縱切面是拋物線的一部分．已知探照燈的燈口直徑為 16 公分，燈的深度為 6 公分，如下圖所示，求此探照燈的焦距．



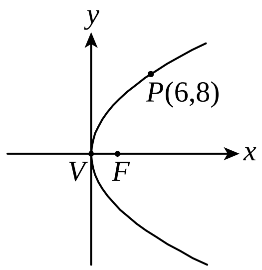
Ans：$\dfrac{8}{3}$公分

【詳解】

依題意假設反射鏡縱切面的拋物線方程式為

$y^2=4cx$，

且拋物線上有一點 $P(6，8)$，如下圖所示．

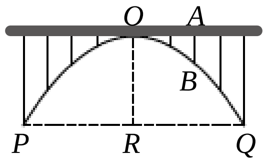


將 P 點坐標代入 $y^2=4cx$，解得 $c=\dfrac{8}{3}$，

因此探照燈的焦距為 $\dfrac{8}{3}$ 公分．

【類題 7-2】

有一座拋物線形的拱橋，橋面與拱門之間用很多根與橋面垂直的柱子固定，如下圖所示．已知通過拱門最高點的鉛直線 OR 是拋物線的對稱軸，且 $\overline{OR}=8$ 公尺，此時水面寬 $\overline{PQ}=20$ 公尺，求與中心線 $\overline{OR}$ 相距 5 公尺之柱子 $\overline{AB}$ 的長．



Ans：2 公尺

【詳解】

以 R 點為原點，$\overrightarrow{RQ}$ 為 x 軸正向，

$\overrightarrow{RO}$ 為 y 軸正向建立直角坐標系．

因為 $\overline{RQ}=\overline{RP}=10$，

所以可得 O，P，Q 三點的坐標分別為

$O(0，8)$，$P(-10，0)$，$Q(10，0)$．

由拋物線的標準式，可得拋物線的方程式為

$4c(y-8)=x^2$．

將 Q 點坐標代入得到

$4c(0-8)=10^2$，即 $-32c=100$，

解得 $c=-\dfrac{25}{8}$．

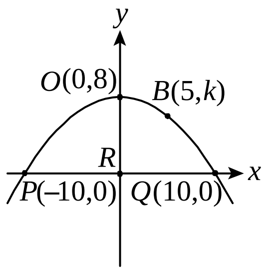
故拋物線方程式為 $-\dfrac{25}{2}(y-8)=x^2$．

由題意可設 B 點的坐標為$(5，k)$．

代入拋物線方程式得

$-\dfrac{25}{2}(k-8)=5^2 \Rightarrow -\dfrac{25}{2}(k-8)=25$，

解得 $k=6$．故 $\overline{AB}=8-6=2$（公尺）．



【例題 8】

已知 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+4|$ 的圖形是一個拋物線，關於此拋物線，選出正確的選項：

(1) 頂點為$(2，0)$ (2) 焦點為$(-4，0)$ (3) 準線方程式為 $x=-4$ (4) 軸為 x 軸．

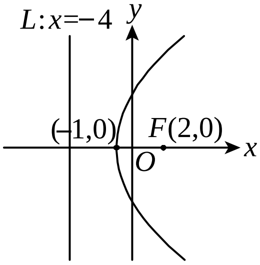
Ans：(3)(4)

【詳解】

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+4|$ 的意思是：

動點 $P(x，y)$到定點 $F(2，0)$與到

直線 L：$x=-4$ 的距離相等，
因此其圖形為以(2，0)為焦點，
$x=-4$ 為準線的拋物線，如下圖所示．



由上圖可知：頂點為(−1，0)，軸為 x 軸．
由上面的討論可知：正確的選項為(3)(4)．

【類題 8】

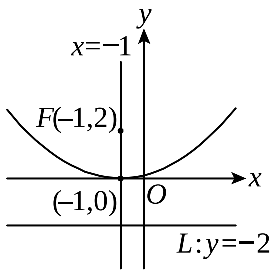
已知 $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=|y+2|$ 的圖形是一個拋物線，求此拋物線的頂點、焦點坐標，準線與對稱軸的方程式．

Ans：頂點(−1，0)，焦點(−1，2)，準線 $y=-2$，對稱軸 $x=-1$

【詳解】

$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=|y+2|$ 的意思是：

動點 $P(x，y)$到定點 $F(-1，2)$與到
直線 L：$y=-2$ 的距離相等，
因此其圖形為以(−1，2)為焦點，
$y=-2$ 為準線的拋物線，如下圖所示．



由上圖可知：

此拋物線的頂點為$(-1，0)$，焦點為$(-1，2)$，

準線為 $y=-2$，對稱軸為 $x=-1$.

主題三、過三點求拋物線方程式

過三點求拋物線方程式的假設法:
(1) 軸平行 y 軸（即上下開口型）的拋物線，可設方程式為 $y = Ax^2 + Bx + C$ （ $A \neq 0$ ）.
(2) 軸平行 x 軸（即左右開口型）的拋物線，可設方程式為 $x = Ay^2 + By + C$ （ $A \neq 0$ ）.

【例題 9】

求軸與 y 軸平行，且通過(1，0)，(2，0)，(3，2)三點的拋物線方程式及其焦點．

Ans：方程式 $y=x^2-3x+2$，焦點$(\frac{3}{2},0)$

【詳解】

因為拋物線的軸與 y 軸平行，

所以假設此拋物線的方程式為

$y=Ax^2+Bx+C$ ．

將(1，0)，(2，0)，(3，2)三點坐標代入

$y=Ax^2+Bx+C$，得 $\begin{cases}0=A+B+C\\0=4A+2B+C\\2=9A+3B+C\end{cases}$，

解得 $A=1$，$B=-3$，$C=2$，

故此拋物線的方程式為 $y=x^2-3x+2$ ．

將 $y=x^2-3x+2$ 配方改寫成

$4\cdot\frac{1}{4}\cdot(y+\frac{1}{4})=(x-\frac{3}{2})^2$，

可得拋物線的頂點為$(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$，

$c=\frac{1}{4}$，其圖形開口向上，

故其焦點為$(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=(\frac{3}{2},0)$ ．

【另解】

設 $f(x)=k(x-1)(x-2)$，

$C(3，2)$代入得 $k(3-1)(3-2)=2$

$\Rightarrow k=1.$

故 $f(x)=(x-1)(x-2).$

【再解】

利用拉格蘭日插值法：

$$f(x)=0\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+0\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+2\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

即 $f(x)=(x-1)(x-2)$.

【類題 9】

求軸與 x 軸平行，且通過(3，1)，(3，2)，(1，3)三點的拋物線方程式及其焦點．

Ans：方程式 $x=-y^2+3y+1$，焦點 $(3,\frac{3}{2})$

【詳解】

因為拋物線的軸與 x 軸平行，

所以假設此拋物線的方程式為

$x=Ay^2+By+C$.

將(3，1)，(3，2)，(1，3)三點坐標代入

$x=Ay^2+By+C$，得 $\begin{cases}3=A+B+C\\3=4A+2B+C\\1=9A+3B+C\end{cases}$，

解得 $A=-1$，$B=3$，$C=1$，

故此拋物線的方程式為 $x=-y^2+3y+1$.

將 $x=-y^2+3y+1$ 配方改寫成

$4\cdot(-\frac{1}{4})\cdot(x-\frac{13}{4})=(y-\frac{3}{2})^2$，

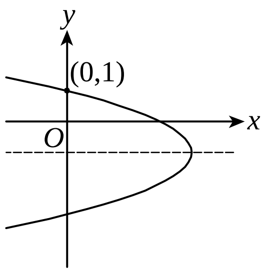
可得拋物線的頂點為 $(\frac{13}{4},\frac{3}{2})$，$c=-\frac{1}{4}$，

其圖形開口向左，

故其焦點為 $(\frac{13}{4}-\frac{1}{4},\frac{3}{2})=(3,\frac{3}{2})$.

【例題 10】

若抛物線 $x=ay^2+by+c$ 通過點(0，1)，且其圖形如下圖所示，則下列各數哪些為負數？ (1) a (2) b (3) c (4) b^2-4ac (5) $a+b+c$.



Ans：(1)(2)

【詳解】

(1) 因為抛物線的開口向左，所以 $a<0$.

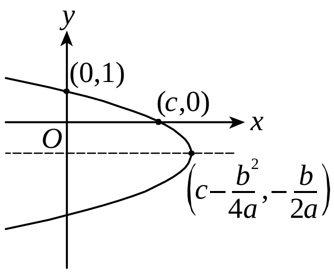
(2) 將抛物線方程式以 y 配方，

得 $x=ay^2+by+c=a(y+\dfrac{b}{2a})^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$,

可知抛物線的頂點坐標為$(c-\dfrac{b^2}{4a},\dfrac{b}{2a})$.

由圖形得知，抛物線的頂點在 x 軸下方，

即 $-\dfrac{b}{2a}<0$. 因此，$b<0$.



(3) 因為圖形通過點(c，0)，所以由圖形可知 $c>0$.

(4) 將 $x=ay^2+by+c$ 與 $x=0$（y 軸）聯立，得

$\begin{cases} x=ay^2+by+c \\ x=0 \end{cases}$，即 $ay^2+by+c=0$．

由圖形得知，拋物線與 y 軸相交於兩點，

即 $ay^2+by+c=0$ 有兩個解．

因此，判別式 $b^2-4ac>0$．

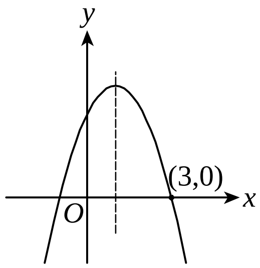
(5) 將(0，1)代入方程式得 $a+b+c=0$．

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)．

【類題 10】

若拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 過點(3，0)，且其圖形如下圖所示，則下列各數哪些為負數?

(1) a　(2) b　(3) c　(4) b^2-4ac　(5) $4a+2b+c$．



Ans：(1)

【詳解】

(1) 因為拋物線的開口向下，所以 $a<0$．

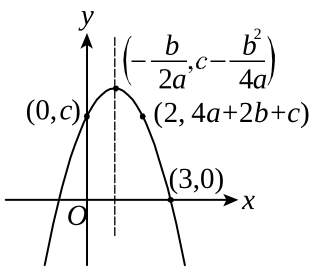
(2) 將拋物線方程式以 x 配方，

得 $y=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$，

可知拋物線的頂點坐標為$(-\dfrac{b}{2a},c-\dfrac{b^2}{4a})$．

由圖形得知，拋物線的頂點在 y 軸右方，

即 $-\dfrac{b}{2a}>0$．因此，$b>0$．



(3) 因為圖形通過點(0，c)，所以由圖形可知 $c>0$．

(4) 將 $y=ax^2+bx+c$ 與 $y=0$（x 軸）聯立，得

$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$，即 $ax^2+bx+c=0$．

由圖形得知，拋物線與 x 軸相交於兩點，

即 $ax^2+bx+c=0$ 有兩個解．

因此，判別式 $b^2-4ac>0$．

(5) 將 $x=2$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得到 $4a+2b+c$．

由圖形可知點(2，$4a+2b+c$)在 x 軸上方，

因此 $4a+2b+c>0$．

由上面的討論可知：正確的選項為(1)．

【例題 11】

求拋物線 $y^2=16x$ 上與直線 $4x-3y+24=0$ 距離最短之點的坐標．

Ans：$(\dfrac{9}{4},6)$

【詳解】

設拋物線 $y^2=16x$ 上的點坐標為(t^2，$4t$)．

利用點到直線的距離公式，

得點(t^2，$4t$)到直線 $4x-3y+24=0$ 的距離為

$$\frac{|4t^2-12t+24|}{5}=\frac{4}{5}|t^2-3t+6|=\frac{4}{5}|(t-\frac{3}{2})^2+\frac{15}{4}|\geq\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{4}=3\ .$$

當 $t=\frac{3}{2}$時，$\frac{|4t^2-12t+24|}{5}$有最小值 3，

此時該點的坐標為 $(\frac{9}{4},6)$.

【類題 11】

求拋物線 $y=x^2$ 上與直線 $y=x-1$ 距離最短之點的坐標．

Ans：$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

【詳解】

設拋物線 $y=x^2$ 上的點坐標為$(t，t^2)$．

利用點到直線的距離公式，

得點$(t，t^2)$到直線 $y=x-1$ 的距離為

$$\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|t^2-t+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}|}{\sqrt{2}}\geq\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}\ .$$

當 $t=\frac{1}{2}$時，$\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{2}}$有最小值 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$，

此時該點的坐標為$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$．

主題四、軌跡方程式

設動點的坐標為(x,y)，由題意找出x， y的關係式，即為動點所成圖形的方程式（或稱為動點的軌跡方程式）.

【例題 12】

求與圓 C：$(x+4)^2+y^2=4$ 外切，且與直線 L：$x-2=0$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式．

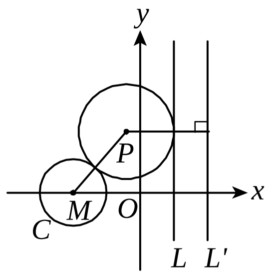
Ans：$y^2=-16x$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 M 為$(-4，0)$，半徑為 2．

假設與圓 C 外切，且與直線 L 相切之圓的

圓心為 P，半徑為 r．



因為所求的圓與圓 C 外切，所以 $\overline{PM}=r+2$，

又因為所求的圓與直線 L 相切，所以 $d(P，L)=r$．

令直線 L'：$x-4=0$．

因為 $d(P，L')=r+2$，所以 $\overline{PM}=d(P，L')$，

即點 P 在以 M 為焦點，直線 L'為準線的拋物線上，

且拋物線的頂點為$(0，0)$，焦距為 4．

故由拋物線的標準式，

得其方程式為 $y^2=4\cdot(-4)x$，即 $y^2=-16x$．

【類題 12】

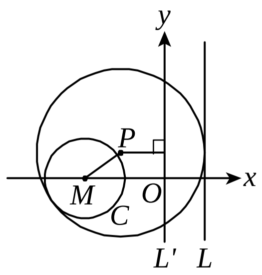
求與圓 C：$(x+4)^2+y^2=4$ 內切，且與直線 L：$x-2=0$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式．

Ans：$y^2=-8(x+2)$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 M 為$(-4，0)$，半徑為 2．

假設與圓 C 內切，且與直線 L 相切之圓的
圓心為 P，半徑為 r .

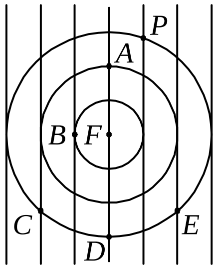


因為所求的圓與圓 C 內切，所以 $\overline{PM}=r-2$.
又因為所求的圓與直線 L 相切，所以 $d(P，L)=r$.
令直線 L'：$x=0$（即 y 軸）.
因為 $d(P，L')=r-2$，所以 $\overline{PM}=d\left(P,L'\right)$，
即點 P 在以 M 為焦點，直線 L'為準線的拋物線上 .
且拋物線的頂點為$(-2，0)$，焦距為 2 .
故由拋物線的標準式，
得其方程式為 $y^2=4\cdot(-2)\cdot(x-(-2))$，
即 $y^2=-8(x+2)$.

重要精選考題

基礎題

1. 下圖是以 F 為圓心，半徑分別為 **1**，**2**，**3** 的一組同心圓，及一組相鄰兩線距離均為 **1** 的鉛直線，且其中一條鉛直線通過圓心 F．現有一開口向右的拋物線 Γ，其焦點為 F 且通過 P 點．問：Γ 也通過下列哪些點?

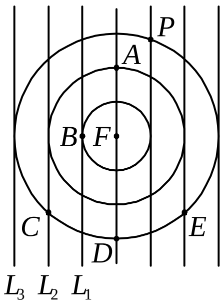


(1) A　　**(2)** B　　**(3)** C　　**(4)** D　　**(5)** E .

Ans：(1)(2)

【詳解】

將鉛直線分別標示如下圖．



根據拋物線的定義，

點 P 到焦點 F 的距離與點 P 到準線的距離相等．

因為點 P 到焦點 F 的距離為 3，

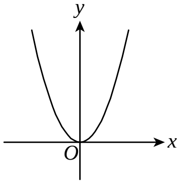
所以點 P 到準線的距離也為 3，

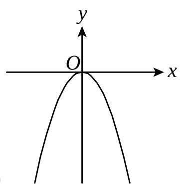
因此準線為 L_2．

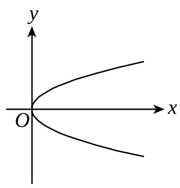
觀察上圖，滿足拋物線定義的有 A，B 和 P 三點．

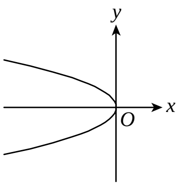
故正確的選項為(1)(2)．

2. **下列圖形中有一個是方程式 $y^2+x=0$ 的圖形，選出正確的選項：**

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

Ans：(4)

【詳解】

將方程式改寫成 $y^2=-x$，可知拋物線的開口向左．

故正確的選項為(4)．

3. **求滿足下列條件的拋物線方程式：**

(1) 焦點 $F(2，-1)$，頂點 $V(2，1)$．

(2) 頂點 $V(-1，3)$，準線 $L：x=3$．

Ans：(1) $(x-2)^2=-8(y-1)$，(2) $(y-3)^2=-16(x+1)$

【詳解】

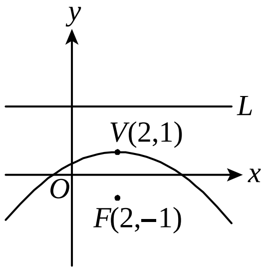
(1) 如下圖可知，拋物線開口向下，

$c=-1-1=-2$．

因此由拋物線的標準式，

得其方程式為$(x-2)^2=4\cdot(-2)\cdot(y-1)$，

即$(x-2)^2=-8(y-1)$．



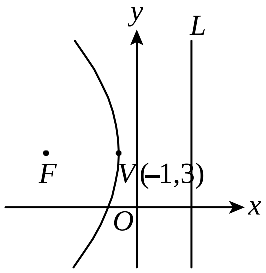
(2) 如下圖可知，拋物線開口向左，

$c=-1-3=-4$．

因此由拋物線的標準式，

得其方程式為$(y-3)^2=4\cdot(-4)\cdot(x+1)$，

即$(y-3)^2=-16(x+1)$．



4. **已知 $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}=|y-6|$ 的圖形是一個拋物線，求此拋物線的正焦弦長．**

Ans：14

【詳解】

由方程式 $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}=|y-6|$ 可知：

此拋物線的焦點為 $F(-3，-1)$，準線為 $L：y=6$．

因為正焦弦長為焦點到準線距離長的 2 倍

（即焦距長的 4 倍），

又點 $F(-3，-1)$到直線 $L：y=6$ 的距離為 7，
所以正焦弦長為 $7\times 2=14$.

5. **求軸與 y 軸平行，且過$(-1，0)$，$(-9，0)$，$(0，9)$三點之拋物線的方程式及其焦點 .**

Ans：方程式 $y=x^2+10x+9$，焦點 $(-5,-\frac{63}{4})$

【詳解】
因為拋物線的軸與 y 軸平行，
所以假設此拋物線的方程式為
$y=Ax^2+Bx+C$.
將$(-1，0)$，$(-9，0)$，$(0，9)$三點坐標代入
$y=Ax^2+Bx+C$，得 $\begin{cases}0=A-B+C\\0=81A-9B+C\\9=C\end{cases}$，
解得 $A=1$，$B=10$，$C=9$，
故此拋物線的方程式為 $y=x^2+10x+9$.
將 $y=x^2+10x+9$ 配方改寫成
$(x+5)^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot(y+16)$，
可得拋物線的頂點為$(-5，-16)$，$c=\frac{1}{4}$，
其圖形開口向上，故其焦點為 $(-5,-16+\frac{1}{4})=(-5,-\frac{63}{4})$.

6. **已知拋物線Γ的對稱軸為 $x=-2$，且通過點$(-1，4)$，$(0，10)$，求Γ的方程式 .**

Ans：$(x+2)^2=\frac{1}{2}(y-2)$

【詳解】

因為Γ的對稱軸為 $x=-2$，

所以可設其頂點為$(-2，k)$，

Γ的方程式為$(x+2)^2=4c(y-k)$．

將$(-1，4)$，$(0，10)$代入方程式，得$\begin{cases}1=4c(4-k)\\4=4c(10-k)\end{cases}$，

將兩式相除得$\dfrac{1}{4}=\dfrac{4-k}{10-k}$，解得 $k=2$，並得 $c=\dfrac{1}{8}$．

故Γ的方程式為$(x+2)^2=\dfrac{1}{2}(y-2)$．

7. **求兩拋物線 $y^2+2y+x-1=0$ 與 $-y^2+y+2x-2=0$ 的交點坐標．**

Ans：$(1，0)$或$(2，-1)$

【詳解】

將兩方程式聯立為$\begin{cases}y^2+2y+x-1=0\\-y^2+y+2x-2=0\end{cases}$，

並將兩式相加得$3y+3x-3=0$，即 $y=1-x$．

將 $x=1-y$ 代入 $y^2+2y+x-1=0$，

整理得 $y^2+y=0$，解得 $y=0$ 或 $y=-1$，

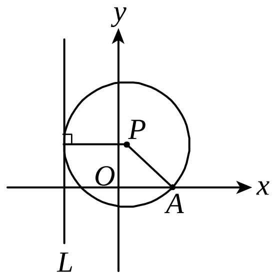
並得兩拋物線的交點為$(1，0)$或$(2，-1)$．

8. **求通過點 $A(3，0)$，且與直線 $L：x=-3$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式．**

Ans：$y^2=12x$

【詳解】

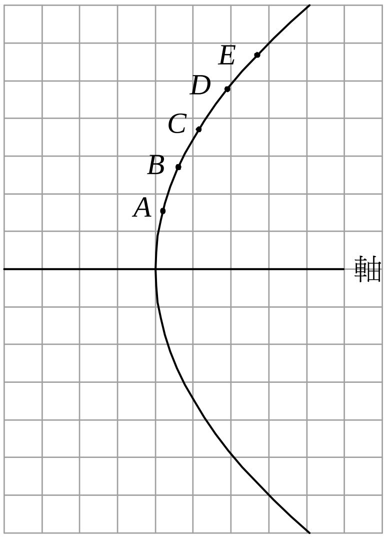
假設過點 A，且與直線 L 相切之圓的圓心為 P，半徑為 r .



因為所求的圓與直線 L 相切，所以 $d(P，L)=r$.
又因為所求的圓通過點 A，所以 $\overline{PA}=r$.
由 $d(P，L)=\overline{PA}=r$，得點 P 在以 A 為焦點，
直線 L 為準線的抛物線上 .
且此抛物線的中心為(0，0)，焦距為 3 .
故由抛物線的標準式，得其方程式為
$y^2=4\cdot 3x$，即 $y^2=12x$.

進階題

9. **下圖中，每一個小方格的邊長均為 1，圖中的曲線是抛物線 Γ 的一部分，且 A，B，C，D，E 為 Γ 上五點 . 問：哪些點與 Γ 的焦點之距離大於 5？**



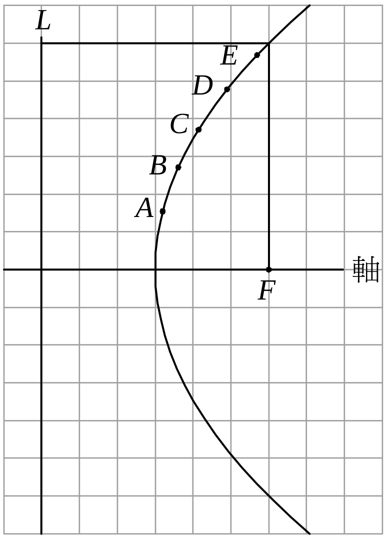
(1) ***A*** **(2)** ***B*** **(3)** ***C*** **(4)** ***D*** **(5)** ***E*** **.**

Ans：(5)

【詳解】

由正焦弦的長恰為焦距的 4 倍，可畫出焦點 F，

並利用對稱的概念畫出準線 L，如下圖所示：



因為拋物線上的點到焦點的距離等於該點到準線的距離，

所以由上圖可知：僅 E 點到準線的距離大於 5 .

故正確的選項為(5) .

10. 設 $A(1,0)$ 與 $B(b,0)$ 為坐標平面上兩點，其中 $b>1$．若拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 上有一點 P 使得△ABP 為正三角形，則 b 的值為何？
【**92** 學測】

Ans：5

【詳解】

如圖，在第一、四象限上各有一點 P，

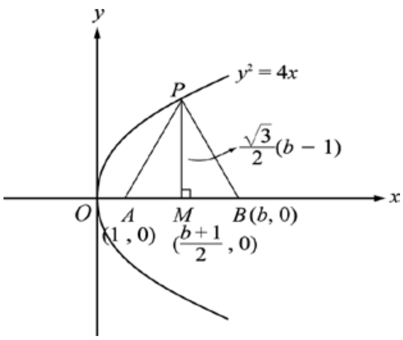
可使△ABP 為正三角形且兩點互相對稱於 x 軸，

又因△ABP 是邊長為 $b-1$ 的正三角形，

所以 P 點的坐標為$\left(\dfrac{b+1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}(b-1)}{2}\right)$，

由於 P 點在 Γ： $y^2=4x$ 上，

代入得 $\dfrac{3}{4}(b-1)^2=4\left(\dfrac{b+1}{2}\right)$，



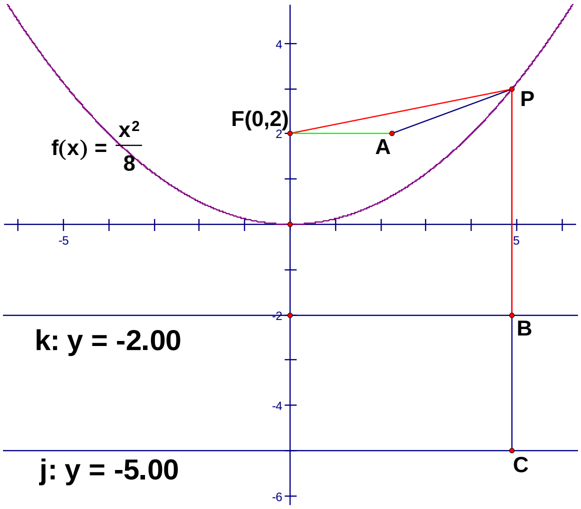
展開化簡得 $3b^2-14b-5=0$，

因此 $b=-\dfrac{1}{3}$ 或 5，然而 $b>1$，所以 $b=5$．

11. 坐標平面上給定點 $A\left(\dfrac{9}{4},2\right)$、直線 $L: y=-5$ 與拋物線 $\Gamma: x^2=8y$，以 $d(P,L)$ 表示點 P 到直線 L 的距離．若點 P 在 Γ 上變動，則 $\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|$ 之最大值為何？【**99** 學測】

Ans：$\frac{21}{4}$

【詳解】



Γ：$x^2 = 8y$ 為拋物線，焦點 F(0，2)，準線：$y = -2$。

如上圖，$\overline{PF} = \overline{PB}$，$\overline{BC} = 3$。

在△PAF 中，$\overline{PF} - \overline{AP} \leqq \overline{AF} = \frac{9}{4}$，

$|d(P，L) - \overline{AP}|$

$= |\overline{PC} - \overline{AP}|$

$= |3 + \overline{PB} - \overline{AP}|$

$= |3 + \overline{PF} - \overline{AP}|$

$\leqq |3 + \frac{9}{4}|$

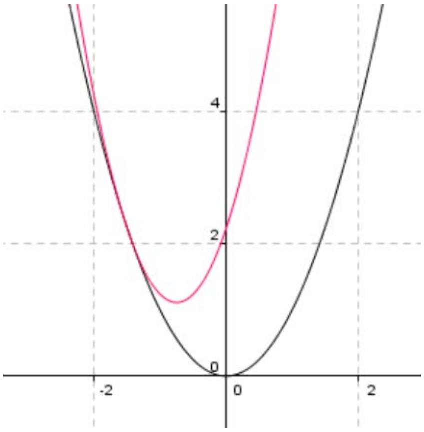
$= \frac{21}{4}$。

即$|d(P，L) - \overline{AP}|$之最大值為$\frac{21}{4}$。

12. 假設 Γ_1 為坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸為 $x=-\frac{3}{4}$ 且焦距（焦點到頂點的距離）為 $\frac{1}{8}$．若 Γ_1 與另一拋物線 $\Gamma_2: y=x^2$ 恰交於一點，則 Γ_1 的頂點之 y 坐標為何？ 【98 學測】

Ans：$\frac{9}{8}$

【詳解】



Γ_1：$(x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(y-k)$

$\Rightarrow y=2(x+\frac{3}{4})^2+k$

$2(x+\frac{3}{4})^2+k=x^2$

$\Rightarrow 2x^2+3x+\frac{9}{8}+k=x^2$

$\Rightarrow x^2+3x+k+\frac{9}{8}=0$ 恰有一實根，

$\Rightarrow \triangle=3^2-4\times1\times(k+\frac{9}{8})=0$

$\Rightarrow$ k＋ $\frac{9}{8}$ ＝ $\frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ k＝ $\frac{9}{8}$ 。

13. **已知坐標平面上圓** $O_1:(x-7)^2+(y-1)^2=144$ **與** $O_2:(x+2)^2+(y-13)^2=9$ **相切，且此兩圓均與直線** $L:x=-5$ **相切．若 Γ 為以** $\boldsymbol{L}$ **為準線的拋物線，且同時通過** O_1 **與** O_2 **的圓心，則 Γ 的焦點坐標為何?　　　　　　【97 學測】**

Ans： $\left(-\frac{1}{5},\frac{53}{5}\right)$

【詳解】

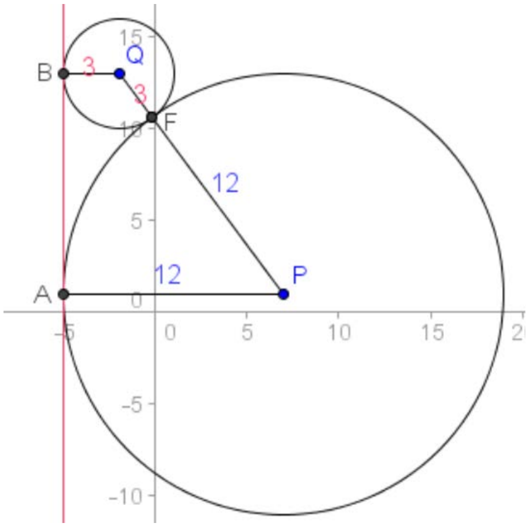
如上圖，O_1 的圓心 P(7，1)，半徑 12，

O_2 的圓心 Q(−2，13)，半徑 5，

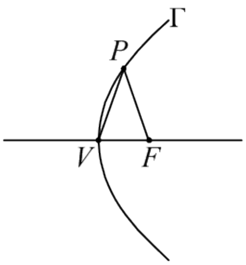
$\overline{PA}$＝12，$\overline{QB}$＝5，故交點 F 在連心線 $\overline{\text{PQ}}$ 上，

且 $\overrightarrow{PF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{PQ}$ ＝ $\frac{4}{5}$(−9，12)，

故 F＝(7－ $\frac{36}{5}$ ，1＋ $\frac{48}{5}$)＝(−$\frac{1}{5}$ ，－$\frac{53}{5}$) 。



14. 如下圖，抛物線Γ的頂點為 V，焦點為 F，點 P 在Γ上，且 $\overline{PV}=\overline{PF}$，$\overline{VF}=4$，求$\Gamma$的正焦弦長及$\overline{PF}$的長．



Ans：正焦弦長 16，$\overline{PF}$ 長 6

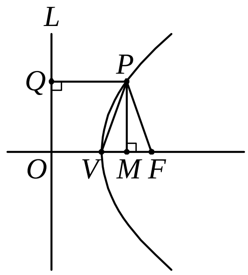
【詳解】

因為Γ的正焦弦長為焦距的 4 倍，且焦距$\overline{VF}=4$，

所以Γ的正焦弦長為$4\times4=16$．

令 M 為$\overline{VF}$的中點，L 為Γ的準線，

如下圖所示，並得$\overline{VM}=2$．



因為△PFV 為等腰三角形，得 $\overline{PM}\perp\overline{VF}$，

並得 $PQOM$ 是一個矩形，

$\overline{PQ}=\overline{OM}=\overline{OV}+\overline{VM}=4+2=6$.

又由拋物線的定義得 $\overline{PF}=\overline{PQ}=6$，

故 $\overline{PF}$ 的長為 6 .

15. **在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 於 P，Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則 P 點的坐標為何？**

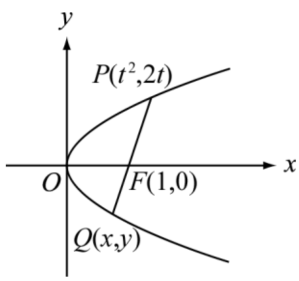
【94 學測】

Ans：$\left(\frac{3}{2},\sqrt{6}\right)$

【詳解】

令 $P(t^2，2t)$， $Q(x，y)$，

利用分點公式，



$1=\dfrac{3x+2t^2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}(5-2t^2)$，

$0=\dfrac{3y+4t}{5}\Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}t$，

$Q(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}t^2,-\dfrac{4}{3}t)$代入 $y^2=4x$，

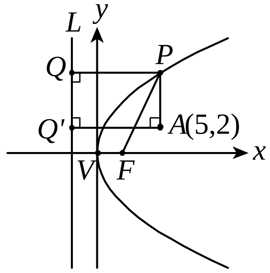
得$(-\dfrac{4}{3}t)^2=4\cdot(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}t^2)$，

$t^2=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$， $\therefore P$ 點之 x 坐標為 $\frac{3}{2}$ ．

16. **在拋物線 $y^2=8x$ 上找一點 P，使得 P 到焦點 F 與定點 $A(5,2)$ 的距離和**
$\overline{PA}+\overline{PF}$ 最小，求此時 P 點的坐標．

Ans： $(\frac{1}{2},2)$

【詳解】
由拋物線的標準式得知，
拋物線的開口向右，頂點 $V(0，0)$，焦距為 2．
因此，焦點的坐標為 $F(2，0)$，準線 $L：x=-2$．



根據拋物線的定義，得知 $\overline{PF}=d(P,L)=\overline{PQ}$，
因此，點 P 到焦點 F 與定點 $A(5,2)$的距離和
$\overline{PA}+\overline{PF}=\overline{PA}+\overline{PQ}$ ．
觀察圖形得知：當直線 PA 垂直 L 時，
$\overline{PA}+\overline{PF}$ 有最短距離 $\overline{AQ'}$ ．
因為 $\overline{AQ'}$ 所在的直線方程式為 $y=2$，
所以 P 點為 $y=2$ 與拋物線的交點，
將兩方程式聯立得 $\begin{cases} y=2 \\ y^2=8x \end{cases}$，
即 $8x=4$，解得 $x=\frac{1}{2}$， $y=2$ ．

故 P 點的坐標為 $(\frac{1}{2},2)$ ．

17. 設 $P_1(x_1，y_1)$與 $P_2(x_2，y_2)$為拋物線 $x^2=4y$ 上兩點．若 $\overline{P_1P_2}$ 通過拋物線的焦點且 $\overline{P_1P_2}=10$，求 y_1+y_2 的值．

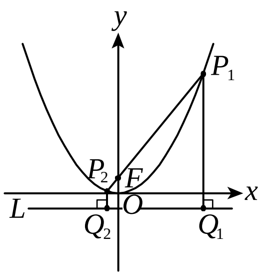
Ans：8

【詳解】

由拋物線的標準式，可得拋物線的開口向上，

頂點 $V(0，0)$，焦距為 1．

因此，焦點的坐標為$(0，1)$，準線 $L：y=-1$．



由拋物線的定義，得 $\overline{P_1F}=\overline{P_1Q_1}$， $\overline{P_2F}=\overline{P_2Q_2}$，

又 $\overline{P_1Q_1}=y_1-(-1)=y_1+1$，

$\overline{P_2Q_2}=y_2-(-1)=y_2+1$．

由題意可知 $\overline{P_1P_2}=10$，即 $\overline{P_1F}+\overline{P_2F}=10$，

故$(y_1+1)+(y_2+1)=10$，

解得 $y_1+y_2=8$．