二次函數

bee[*]

107.05.05 $\sim$ 107.05.05

1. 課程內容

設 $a \neq 0$，則形如：

$$y = ax^2 + bx + c\text{，}$$

的函數稱為【二次函數】，本課程將討論二次函數的表示方法與其圖形之間的關係。內容包含

(1) 頂點式。

(2) 截距式。

(3) 一般式。

(4) 表示法互換的練習題。

2. 頂點式

任給一個二次函數 $y = ax^2 + bx + c$，我們可以透過配方法將其改寫成

$$y = a(x-h)^2 + k \text{ 的樣子，}$$

作法如下：

$$\begin{aligned}
y = ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \\
&= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}, \quad h = \frac{-b}{2a},\ k = \frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}$$

[*]bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

上面這一個作法不需要記憶，多練習幾次即可。做一個例子：

Example 1. 將 $y = 2x^2 - 6x + 3$ 改成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的樣子。

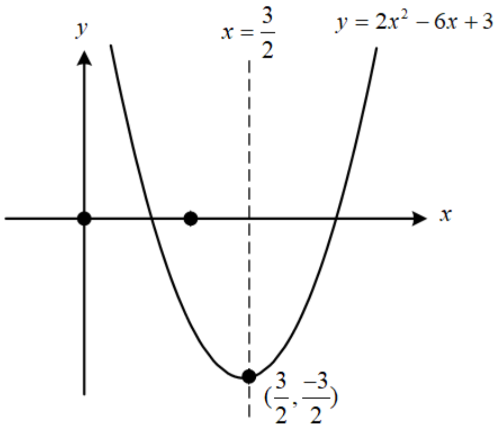
解.

$$\begin{aligned} y = 2x^2 - 6x + 3 = 2(x^2 - 3x) + 3 &= 2\left(x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2\right) + 3 - 2\cdot(\frac{3}{2})^2 \\ &= 2\big(x - \frac{3}{2}\big)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

因此 $y = 2x^2 - 6x + 3 = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}$，即 $h = \frac{3}{2}, k = \frac{-3}{2}$。 □

爲何我們要將 $y = 2x^2 - 6x + 3$ 改成 $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}$ 的樣子呢？因爲 $(x - \frac{3}{2})^2$ 是一個完全平方數，所以其值一定是一個正數，僅在 $x = \frac{3}{2}$ 時其值爲 0，即 $f(\frac{3}{2}) = \frac{-3}{2}$ 是函數的最小值。

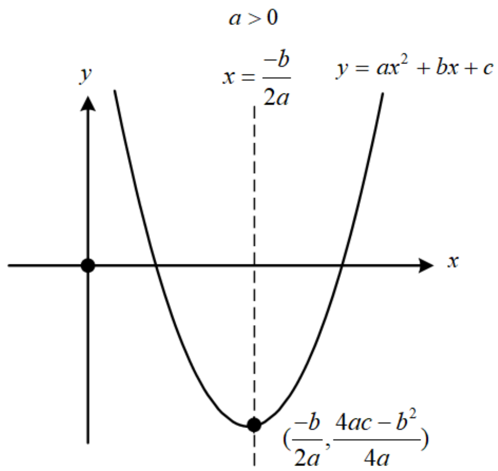
因爲抛體的運動軌跡與二次函數的圖形相同，所以我們把二次函數的圖形稱爲【抛物線】，同時其函數圖形，在鉛直線 $x = \frac{3}{2}$ 的左右兩側互爲對稱。我們把 $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ 稱爲抛物線的【頂點】，而鉛直線 $x = \frac{3}{2}$ 稱爲抛物線的【對稱軸】，如下圖所示：



仿照 Example 1，當 $a > 0$ 時，我們可以改寫 $y = ax^2 + bx + c$ ，得到二次函數的【頂點式】爲

$$y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

其中 $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 是頂點，$x = \frac{-b}{2a}$ 是對稱軸，因爲 $a > 0$，所以抛物線的【開口向上】，其圖形如下圖：



Example 2. 將 $y=-2x^2-4x+1$ 改成頂點式，畫出其圖形，並標示頂點與對稱軸。

爲何我們將型態爲 $y=a(x-h)^2+k$ 稱爲二次函數的頂點式呢？因爲在此表示式上很容易看到頂點和對稱軸的位置，這方便於我們繪製函數圖形。所以，感覺上

$$y=a(x-h)^2+k \text{ 比 } y=ax^2+bx+c \text{ 便利。}$$

我們把 $y=ax^2+bx+c$ 稱爲二次函數的【一般式】。

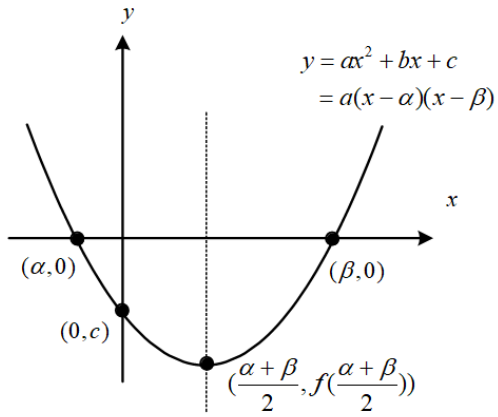
3. 截距式

將二次函數的圖形畫在坐標平面上，此圖形和 x 軸或 y 軸的交點就稱之爲【截距】。截距是點坐標的意思，因爲 x 截距必長成 $(\alpha,0)$ 的樣子，y 截距必長成 $(0,\beta)$ 的樣子，所以我們僅取 $(\alpha,0)$ 的 x 坐標，並將其稱爲【x 截距 α】，同理，取 $(0,\beta)$ 的 y 坐標稱爲【y 截距 β】。因爲截距是點坐標，所以可正可負可 0，截距並不是單純的距離。

若拋物線有兩個 x 截距 α,β (即和 x 軸的交點爲 $(\alpha,0),(\beta,0)$)，則拋物線的方程式爲

$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

再利用對稱的概念，可以得到對稱軸爲 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，頂點爲 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\right)$。同時拋物線的 y 截距爲 c，如下圖所示：



Example 3. 畫出 $y = f(x) = (x-1)(x-3)$ 的圖形，並求出其頂點坐標與對稱軸方程式。

解. 由頂點式可知：

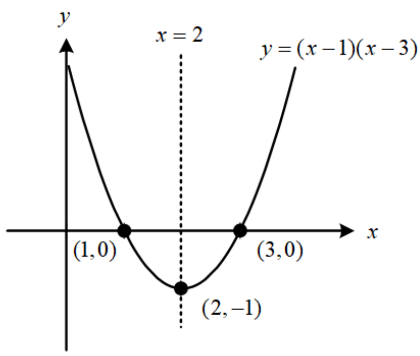
(1) 圖形通過 $(1,0), (3,0)$ 兩點，

(2) 因爲 x^2 的係數爲 1，所以圖形開口向上，

(3) 利用圖形有對稱軸的特性，可得對稱軸爲 $x = \dfrac{1+3}{2} = 2$。

(4) 將 $x = 1$ 代入 $y = f(x) = (x-1)(x-3)$，可得 $f(1) = -1$，即頂點爲 $(2, -1)$。

繪圖如下：



□

如果知道 x 截距，繪製二次函數的圖形將非常方便，不過，如果給的是一般式就得先分解。

Example 4. 畫出 $y = f(x) = -2x^2 - 3x + 2$ 的圖形，並求出其頂點坐標與對稱軸方程式。

解. 因爲

$$y = f(x) = -2x^2 - 3x + 2 = -(2x-1)(x+2)，$$

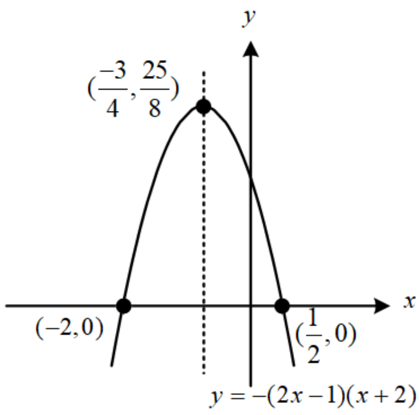
由頂點式可知：

(1) 圖形通過 $(\frac{1}{2}, 0), (-2, 0)$ 兩點，

(2) 因爲 x^2 的係數爲 -2，所以圖形開口向下，

(3) 利用圖形有對稱軸的特性，可得對稱軸是 $x = \dfrac{\frac{1}{2} + (-2)}{2} = \dfrac{-3}{4}$。

(4) 將 $x=\dfrac{-3}{4}$ 代入 $y=f(x)=-(2x-1)(x+2)$，可得 $f(\dfrac{-3}{4})=\dfrac{25}{8}$，即頂點爲 $(\dfrac{-3}{4},\dfrac{25}{8})$。
繪圖如下：



□

不是所有的拋物線和 x 軸都有交點，例如：$y=x^2+x+1$ 和 x 軸就沒有交點。怎樣可以知道沒有交點呢？

因爲交點 (x,y) 需同時落在拋物線和 x 軸上，即滿足

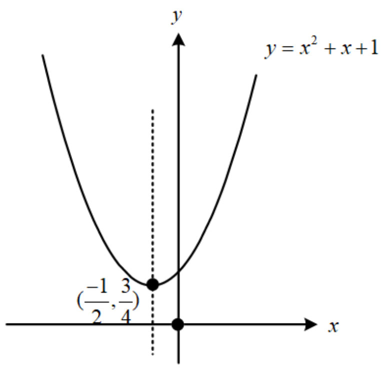
$$\begin{cases} y=x^2+x+1 \\ y=0 \end{cases}$$

於是 y 坐標 $x^2+x+1=0$，是個一元二次方程式，計算其判別式 $D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$，可知方程式沒有實數解，也就是拋物線和 x 軸沒有交點。

這時候如果你要繪製拋物線的圖形，就只能夠配方得到頂點式，同時，因爲拋物線的開口向上，和 x 沒有交點，我們可以得到整個拋物線在 x 軸的上方，此時我們說

$$y=x^2+x+1 \text{ 的函數值恆爲正數。}$$

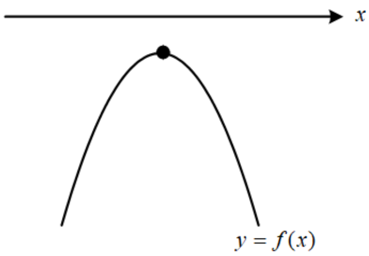
實際繪圖如下：

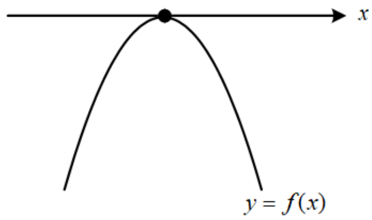


Example 5. 若二次函數 $y=-4x^2+bx-3$ 的值恆小於或等於 0，求 b 的範圍。

解. 這個問題最大的困難處是：要弄懂題目的意思。

因為函數值恆小於或等於 0，所以整個拋物線將落在 x 軸的下方，或者是和 x 軸恰有一個交點。即其圖形如下：





這時候你有兩種作法：一是找出拋物線的頂點，讓它落在 x 軸上或 x 軸的下方，另一個方法是讓拋物線和 x 軸最多只有一個交點。在現在你看得到的書或老師的教法，都是讓拋物線和 x 軸最多只有一個交點，是因為這樣做比較省事。

方法一：找頂點。利用配方法得 $y=-4(x-\frac{b}{8})^2-3+\frac{b^2}{16}$，可得頂點為 $\left(\frac{b}{8},\frac{b^2}{16}-3\right)$。

因為頂點得在 x 軸的下方或在 x 軸上，所以

$$\frac{b^2}{16}-3=\frac{b^2-48}{16}\le 0\text{，解得 } -4\sqrt{3}\le b\le 4\sqrt{3}$$

方法二：因為拋物線和 x 軸最多只有一個交點，所以方程式 $-4x^2+bx-3=0$ 最多只有一個交點，即判別式

$$D=B^2-4AC=b^2-4\cdot(-4)\cdot(-3)\le 0\Rightarrow -4\sqrt{3}\le b\le 4\sqrt{3}$$

判別式小於等於 0 的意思是拋物線和 x 軸最多只有一個交點。這裡不能靠記憶，要確實了解意思。這大概是高中數學中最多人搞不清楚的內容。 □

關於拋物線 $y=ax^2+bx+c$，思考一下幾個問題的實際意義：

(1) 函數值恆正的意義為何？

(2) 函數值恆負的意義為何？

(3) 函數值恆大於或等於 0 的意義為何？

4. 一般式

現在我們回來看一般式：$y = ax^2 + bx + c$。

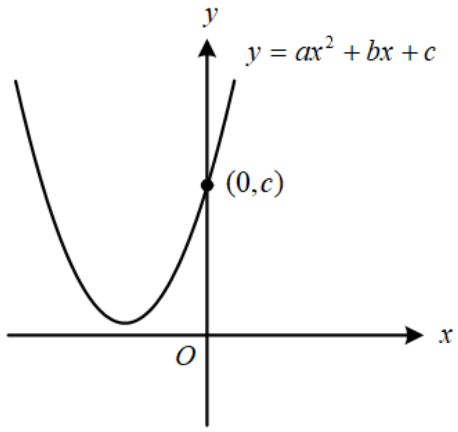
對於一般式我們應該覺得不喜歡，因爲在式子上面看不到頂點，看不到截距，或者說沒有甚麼訊息。我們想知道 a, b, c 這三個數值給我們甚麼訊息。

首先 a 表示開口方向，

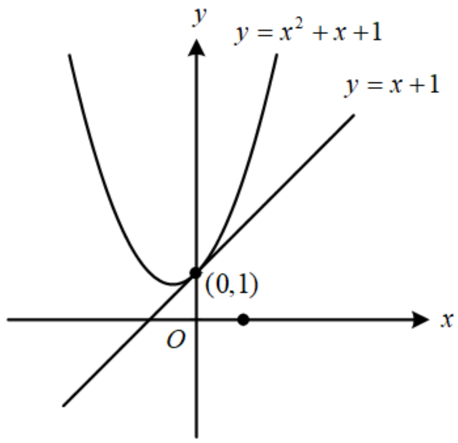
$a > 0$ 拋物線開口向上，$a < 0$ 拋物線開口向下。

事實上由頂點式你可以發現 $y = a(x-h)^2 + k$ 中，a 的值越大，$(x-h)^2$ 增加的速度越快，這表示開口會越小。

其次，c 是 y 截距，就是拋物線和 y 軸的交點 $(0, f(0)) = (0, c)$。



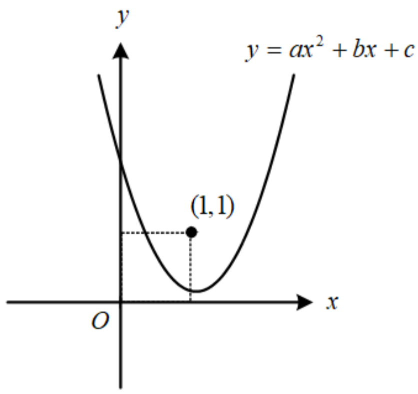
最後，在 $(0, c)$ 附近，ax^2 非常小，意思是：$y = ax^2 + bx + c$ 和 $y = bx + c$ 幾乎一樣，我們將 $y = bx + c$ 稱爲 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $(0, c)$ 的【切線】。以 $y = x^2 + x + 1$ 和 $y = x + 1$ 爲例，它們的圖形如下：



作一個有趣的例子：

Example 6.

設二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右圖，
求 $a, b, c, a+b+c, b^2 - 4ac$ 的正負值。



解. (1) 因為圖形開口向上，所以 $a > 0$。

(2) $(0, c)$ 在 x 軸上方，所以 $c > 0$。

(3) $(1, f(1))$ 在 x 軸上方，所以 $f(1) = a + b + c > 0$。

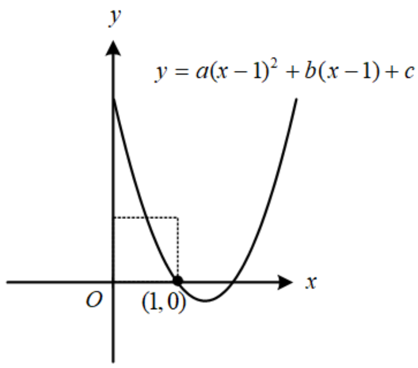
(4) 圖形和 x 軸沒有交點，所以 $D = b^2 - 4ac < 0$。

(5) 那 b 呢？ □

下面這一題是一樣的問題，但是你看的出來嗎？

Example 7.

設二次函數 $y = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 的圖形如右圖，求 $a, b, c, a+b+c, b^2 - 4ac$ 的正負值。



5. 習題

1. 若拋物線 $y = x^2 + 4x + c$ 和水平線 $y = 3$ 沒有交點，則 c 的範圍爲何？

2. 若拋物線 $y = x^2 + 4x + c$ 恆在直線 $y = 2x - 3$ 的上方，則 c 的範圍爲何？

3. 試寫出 $y = 2x^2 - 3x - 4$ 的截距式。

4. 試找出二次函數 $y = ax^2 - bx + c$ 的頂點坐標與對稱軸。又若 $a < 0$，試畫出其圖形。

5. 試說明二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的函數值恆小於 1 的意義爲何？此時 a, b, c 滿足何關係式？

6. 設二次函數的 x 截距爲 $1, 3$，y 截距爲 2，求此函數的頂點、對稱軸，並畫出其圖形。