第四章　外流場

103/12/16

物體在流體中移動，或流體流過靜止的物體時，會遭遇阻力，阻力的來源主要有兩項，第一項為物體表面摩擦力所造成，與流體的黏性有關。第二項為物體前後的壓力差所造成，與物體的形狀有關。

物體在流體中移動：飛機，船舶，車輛，子彈，棒球。

流體流過靜止物體：電線，高樓，橋墩，散熱器。

物體與流體同時移動：風中的揚塵，懸浮物，粉煤噴嘴。

(4.1). 阻力係數 Drag coefficient

阻力係數定義如下：$F = c_d \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 A$

其中 F 為阻力，c_d 為阻力係數，ρ 為流體密度，u 為相對速度，A 為物體面向流體的正向投影面積。

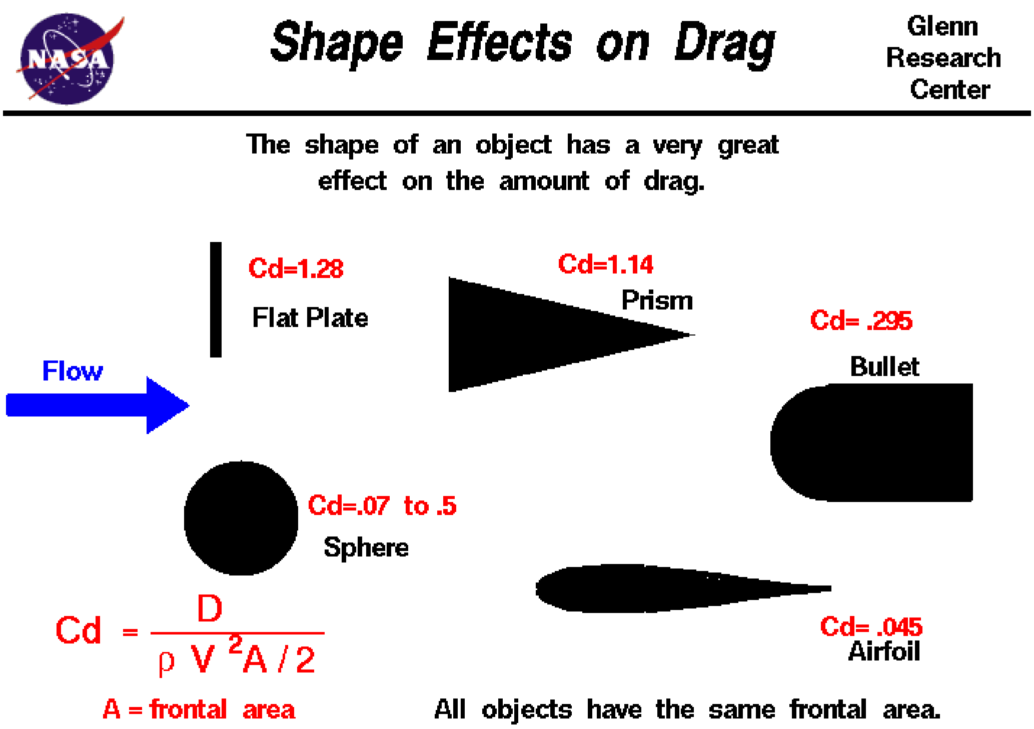


圖 4.1.1：各種物體的阻力係數

表 4.1.1：各種物體的阻力係數

Type of Object	- c_d -	- A - (ft^2)
老式車輛(T-ford)	0,7 - 0,9	迎風正面
流線型車輛(Toyota Prius)	0,26	迎風正面
一般汽車(Opel Vectra)	0.29	迎風正面
火車	1,8	迎風正面
自行車(通勤)	1,1	5,5
自行車(競賽)	0,88	3,9
聯結車	0,96	迎風正面
海豚	0,0036	迎風正面
鳥	0,4	迎風正面
實心半球形(球面側)	0,42	π / 4 d^2
實心半球形(平面側)	1,17	π / 4 d^2
圓盤	1,1	π / 4 d^2
立方體	0,8	s^2
流線型體	0,04	π / 4 d^2
方形平板	1.17	
長形平板	1.98	
電線	1.0 - 1.3	
平板 (層流)	0.001	
平板 (紊流)	0.005	
飛機	0.012	
行人	1.0 - 1.3	
滑雪	1.2 - 1.3	

(4.2). 運動物體的阻力

運動物體的受力情形

$$F = ma = m\frac{du}{dt} = F_D - F_R$$

其中 F_D 為驅動力，F_R 為阻力。

車輛的阻力包括路面阻力與空氣阻力，船舶阻力包括水面阻力與空氣阻力，飛行器的阻力為空氣阻力。

當運動物體達到極速時，$\frac{du}{dt} = 0$，$F_D = F_R$。

例：請計算自行車競賽時，時速 80 公里的風阻及騎士所需的功率。

$$F = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A$$

$c_d = 0.88$，$u = 22.22$ m/sec，$A = 3.9$ ft^2 = 0.362 m^2，$\rho = 1.12$ kg/m^3

$$F = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A = 88 \text{ N} = 9 \text{ kgf}$$

$$\dot{W} = Fu = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^3 A$$

功率與車速的三次方成正比。

作業 4.1：自行車騎士將車輛加速到時速 80 公里，然後讓車輛自由滑行，若不考慮地面阻力與坡度的影響，請計算車速減為時速 40 公里時，共滑行多遠。已知車輛與騎士共重 80 kg。

$$F = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A$$

$$F = -c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A = m\frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{u^2} = -c_d \cdot \frac{1}{2m}\rho A dt$$

令 $u_\tau = \sqrt{\dfrac{2mg}{c_d \rho A}}$ ，$\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{g}{u_\tau}$

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{g}{u_\tau^2} dt$$

$$-\frac{1}{u} = --\frac{g}{u_\tau^2} t + c_1 \text{，} \quad -\frac{1}{u_0} = c_1$$

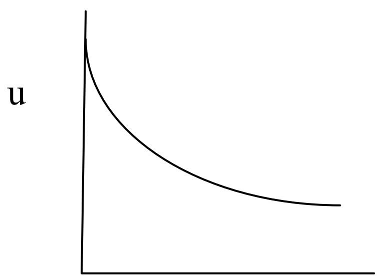
$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = \frac{g}{u_\tau^2} t$$

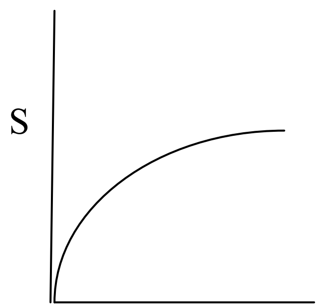
$$\frac{u_\tau}{u} - \frac{u_\tau}{u_0} = \frac{t}{\tau} \text{，} u = \frac{u_\tau}{\dfrac{u_\tau}{u_0} + \dfrac{t}{\tau}}$$

$$S = \int u dt = u_\tau \tau \int \frac{d(\frac{t}{\tau})}{\dfrac{u_\tau}{u_0} + \dfrac{t}{\tau}} = u_\tau \tau \ln\left(\frac{u_\tau}{u_0} + \frac{t}{\tau}\right) + c$$

$$t = 0,\ S = u_\tau \tau \ln\left(\frac{u_\tau}{u_0}\right) + c = 0 \text{，} c = -u_\tau \tau \ln\left(\frac{u_\tau}{u_0}\right)$$

$$S = u_\tau \tau \ln\left(1 + \frac{u_0 t}{u_\tau \tau}\right)$$





$c_d = 0.88$ ，$u = 22.22$ m/sec ，$A = 0.362\ \text{m}^2$ ，$\rho = 1.12\ \text{kg/m}^3$

$\boxed{\text{例}}$：已知子彈正向投影面積為 0.2 cm^2，子彈離開槍膛時，速度為 100 m/sec，請計算子彈的阻力。

$F = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A$= 0.295*0.5*1.185*(100)^2*0.2*10^{-4} = 0.035 N

$\boxed{例}$：已知子彈正向投影面積為 0.2 cm^2，重量為 10 g。若舉槍垂直往上射擊，子彈離開槍膛時，速度為 100 m/sec，請計算子彈飛到最高點所需時間及飛行的距離。

$$F = -c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A - mg = ma = m\frac{du}{dt}$$

若不考慮空氣阻力

$$m\frac{du}{dt} = -mg$$

$$\frac{du}{dt} = -g$$

$$u = u_0 - gt$$

當子彈達到最高點時，u=0 ，$t = \frac{u_0}{g}$= 10.20 sec

子彈飛行的距離：$S = \int u dt = \int (u_0 - gt)dt = u_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$t = \frac{u_0}{g}$ ，$S = u_0\frac{u_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{u_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2g}u_0^2$=510.2 m

考慮空氣阻力

$$\frac{du}{dt} = -g - c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 \frac{A}{m}$$

$$\frac{du}{u^2 + \frac{2mg}{c_d \rho A}} = -\frac{c_d \rho A}{2m}dt$$

$$\frac{du}{u_\tau^2 + u^2} = -\frac{g}{u_\tau^2}dt$$

$$\frac{d\frac{u}{u_\tau}}{1 + \left(\frac{u}{u_\tau}\right)^2} = -\frac{g}{u_\tau}dt = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\tan^{-1}\frac{u}{u_\tau} = -\frac{t}{\tau} + c$$

$t = 0$ ， $u = u_0$

$$\tan^{-1}\frac{u_0}{u_\tau} - \tan^{-1}\frac{u}{u_\tau} = \frac{t}{\tau}$$

$$\frac{u}{u_\tau} = \tan\left(\tan^{-1}\frac{u_0}{u_\tau} - \frac{t}{\tau}\right)$$

當子彈達到最高點時，u=0， $\tan^{-1}\frac{u_0}{u_\tau} - \frac{t}{\tau} = 0$

$$t = \tau\tan^{-1}\frac{u_0}{u_\tau}$$

$c_d = 0.295$ ， $m = 0.01\ \text{kg}$， $A = 0.2\ \text{cm}^2$， $\rho = 1.12\ \text{kg/m}^3$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{2mg}{c_d\rho A}} = 172.2\ \text{m/sec}$$

$$\tau = \frac{u_\tau}{g} = 17.57\ \text{sec}$$

$$t = \tau\tan^{-1}\frac{u_0}{u_\tau} = 9.24\ \text{sec}$$

參考資料：

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\int\frac{dx}{a + b\tan x} = \frac{ax + b\ln(a\cos x + b\sin x)}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{u}{u_\tau} = \tan\left(\tan^{-1}\frac{u_0}{u_\tau} - \frac{t}{\tau}\right) = \frac{\frac{u_0}{u_\tau} - \tan\frac{t}{\tau}}{1 + \frac{u_0}{u_\tau}\tan\frac{t}{\tau}} = \frac{\frac{u_0}{u_\tau} + \frac{u_\tau}{u_0}}{1 + \frac{u_0}{u_\tau}\tan\frac{t}{\tau}} - \frac{u_\tau}{u_0}$$

$$\int\frac{\frac{u_0}{u_\tau} + \frac{u_\tau}{u_0}}{1 + \frac{u_0}{u_\tau}\tan\frac{t}{\tau}}d(\frac{t}{\tau}) = (\frac{u_0}{u_\tau} + \frac{u_\tau}{u_0})\int\frac{d(\frac{t}{\tau})}{1 + \frac{u_0}{u_\tau}\tan\frac{t}{\tau}} = (\frac{u_0}{u_\tau} + \frac{u_\tau}{u_0})\frac{\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\ln\left(\cos\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\sin\frac{t}{\tau}\right)}{1 + \left(\frac{u_0}{u_\tau}\right)^2}$$

$$= \frac{u_\tau}{u_0}\left[\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\ln\left(\cos\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\sin\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

$$S = \int u dt = u_\tau \tau \int \frac{u}{u_\tau} d(\frac{t}{\tau})$$

$$= u_\tau \tau \frac{u_\tau}{u_0}\left[\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\ln\left(\cos\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\sin\frac{t}{\tau}\right)\right] - u_\tau \frac{u_\tau}{u_0} t = u_\tau \tau \ln\left(\cos\frac{t}{\tau} + \frac{u_0}{u_\tau}\sin\frac{t}{\tau}\right)$$

u_τ = 172.2 m/sec， τ = 17.57 sec， t = 9.24 sec

S =172.2×17.57×0.1453=439.6 m

	不考慮空氣阻力	考慮空氣阻力
飛行時間	10.20 sec	9.24 sec
飛行距離	510.2 m	439.6 m

例：該子彈往下掉落時，請計算所需時間。

當子彈往下掉落時，空氣阻力方向與眾力方向相反。

$$\frac{du}{dt} = g - c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 \frac{A}{m}$$

$$\frac{du}{u_\tau^2 - u^2} = \frac{g}{u_\tau^2} dt$$

$$\frac{d\frac{u}{u_\tau}}{1-\left(\frac{u}{u_\tau}\right)^2} = \frac{dt}{\tau}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{u}{u_\tau}} + \frac{1}{1+\frac{u}{u_\tau}}\right) d\frac{u}{u_\tau} = \frac{dt}{\tau}$$

$$\ln\left(1+\frac{u}{u_\tau}\right) - \ln\left(1-\frac{u}{u_\tau}\right) = \ln\left(\frac{u_\tau + u}{u_\tau - u}\right) = \frac{2t}{\tau} + c_1$$

$t = 0$ ， $u = u_0$ ， $c_1 = 0$

$$\ln\left(\frac{u_\tau + u_0}{u_\tau - u_0}\right) = c_1$$

$$\ln\left(\frac{u_\tau+u}{u_\tau-u}\frac{u_\tau-u_0}{u_\tau+u_0}\right)=\frac{2t}{\tau}$$

$$\frac{u_\tau+u}{u_\tau-u}\frac{u_\tau-u_0}{u_\tau+u_0}=e^{\frac{2t}{\tau}}$$

$$\frac{u_\tau+u}{u_\tau-u}=\frac{u_\tau+u_0}{u_\tau-u_0}e^{\frac{2t}{\tau}}=\xi e^{\frac{2t}{\tau}}$$

$$\frac{u}{u_\tau}=\frac{\xi e^{\frac{2t}{\tau}}-1}{\xi e^{\frac{2t}{\tau}}+1}=\frac{\xi-e^{-\frac{2t}{\tau}}}{\xi+e^{-\frac{2t}{\tau}}}=\frac{2\xi-\xi-e^{-\frac{2t}{\tau}}}{\xi+e^{-\frac{2t}{\tau}}}=\frac{2\xi}{\xi+e^{-\frac{2t}{\tau}}}-1$$

$t\to\infty$，$u=u_\tau$，此為子彈下落的終端速度。

子彈飛行的距離：

$$S=\int u\,dt=u_\tau\tau\int\left(\frac{2\xi}{\xi+e^{-\frac{2t}{\tau}}}-1\right)d\left(\frac{t}{\tau}\right)=u_\tau\tau\left(\xi\int\frac{d\left(\frac{2t}{\tau}\right)}{\xi+e^{-\frac{2t}{\tau}}}-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$S=\int u\,dt=u_\tau\tau\int\tanh\frac{t}{\tau}\,d\left(\frac{t}{\tau}\right)=u_\tau\tau\ln\left(\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)=439.6\text{ m}$$

$\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)=1.156$， $\frac{t}{\tau}=0.552$， $t=9.70$ sec

子彈落地時，速度為

$\frac{u}{u_\tau}=\tanh\frac{t}{\tau}=0.502$，$u=86.4$ m/sec

經過上升與下降兩次摩擦阻力的消耗，子彈的動能已大為減少。

	不考慮空氣阻力	考慮空氣阻力
飛行時間	10.20 sec	9.70 sec
著地速度	100 m/sec	86.4 m/sec

$\boxed{例}$：從 100 m 的高處擲下一顆木球，木球直徑 1 cm，密度為 980 kg/m^3，阻力係數為 0.35，空氣密度為 1.194 kg/m^3，擲下的初速度為 0 m/sec，請計算到達地面所需時間及速度。

$$m = \rho V = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

$$\frac{2mg}{c_d\rho_a A} = \frac{2\frac{4\pi}{3}R^3\rho g}{c_d\rho_a\pi R^2} = \frac{8}{3}\frac{R\rho g}{c_d\rho_a} = 306.32$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{2mg}{c_d\rho A}} = 17.50 \text{ m/sec}$$

$$\tau = \frac{u_\tau}{g} = 1.786 \text{ sec}$$

$$S = \int u dt = u_\tau\tau\int \tanh\frac{t}{\tau}d(\frac{t}{\tau}) = u_\tau\tau\ln\left(\cosh(\frac{t}{\tau})\right) = 100 \text{ m}$$

$$\cosh(\frac{t}{\tau}) = 24.52, \quad \frac{t}{\tau} = 3.892, \quad t = 6.95 \text{ sec}$$

$$\frac{u}{u_\tau} = \tanh\frac{t}{\tau} = 0.9991$$

$$u = 17.49 \text{ m/sec}$$

$\boxed{例}$：從 100 m 的高處往上擲一顆棒球，棒球直徑 7.4 cm，重量為 145 g，阻力係數為 0.35，上擲的速度為 25 m/sec，請計算到達地面所需時間及速度。並比較沒有空氣阻力所需時間及到達地面的速度。

$\boxed{例}$：從 100 m 的高處擲下一顆木球，木球直徑 1 cm，密度為 980 kg/m^3，阻力係數為 0.35，擲下的速度為 10 m/sec，請計算到達地面所需時間及速度。

從 S 的高度往下掉，初速度為 u_0，相當於 $S+S_0$ 從的高度往下掉，初速度為 0，而到達 S 的高度時，速度正好為 u_0。

$$\frac{u_0}{u_\tau} = \tanh\frac{t_0}{\tau}$$

$$S_0 = u_\tau \tau \ln\left(\cosh(\frac{t_0}{\tau})\right)$$

$$S_0 + S = u_\tau \tau \ln\left(\cosh(\frac{t_f}{\tau})\right)$$

$$t = t_f - t_0$$

$$\frac{u_f}{u_\tau} = \tanh\frac{t_f}{\tau}$$

作業 4.2，從 100 m 的高處往上擲一顆木球，木球直徑 1 cm，密度為 980 kg/m^3，阻力係數為 0.35，往上擲的速度為 10 m/sec，請計算到達地面所需時間及速度。

作業 4.3，兩顆球同時由 150 m 的高處往下掉，一顆為棒球，密度 680kg/m^3，一顆為鋁球，密度 2700kg/m^3，兩顆球的直徑都是 7 cm，阻力係數為 0.35。

(1). 若不考慮空氣阻力，請計算兩顆球到達地面的時間相差幾秒。

(2). 考慮空氣阻力，請計算兩顆球到達地面的時間相差幾秒。

例：若舉槍水平射擊，槍口高度 10m，請計算子彈飛行的距離。

$$F_x = -c_d \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 A\cos\theta = m\frac{du}{dt}$$

$$F_y = -c_d \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 A\sin\theta + mg = m\frac{dv}{dt}$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\cos\theta = \frac{u}{V} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\frac{du}{dt} = -c_d \cdot \frac{1}{2}\frac{\rho A}{m} u\sqrt{u^2 + v^2} = -\frac{1}{\tau u_\tau} u\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - c_d \cdot \frac{1}{2}\frac{\rho A}{m} v\sqrt{u^2 + v^2} = g - \frac{1}{\tau u_\tau} v\sqrt{u^2 + v^2}$$

$t = 0$ ， $u_0 = V_0 \cos\alpha$ ， $v_0 = V_0 \sin\alpha$

(4.3). 車輛加速與減速過程

車輛加速與減速過程受到引擎扭力，路面阻力，與空氣阻力的影響。

$$m\frac{du}{dt}=F_D-A-Cu^2$$

其中 F_D 為車輛驅動力，A 為路面阻力，C 為空氣阻力係數。

當車輛達到極速時，$\frac{du}{dt}=0$，則

$$u^2=\frac{F_D-A}{C}$$

$u_m=\sqrt{\frac{F_D-A}{C}}$，此為車輛的極速。

加速過程中

$$\frac{du}{F_D-A-Cu^2}=\frac{dt}{m}$$

$$\frac{d(u/u_m)}{1-(u/u_m)^2}=\frac{F_D-A}{mu_m}dt=\frac{F_D-A}{C}\frac{C}{mu_m}dt=\frac{Cu_m}{m}dt$$

將上式積分，可得

$$\ln\left(\frac{1+u/u_m}{1-u/u_m}\right)=\frac{2Cu_m}{m}t+c_1=\frac{t}{\tau_a}+c_1$$

其中 τ_a 為加速過程的特徵時間，$\frac{1}{\tau_a}=\frac{2Cu_m}{m}$ 。

$t=0$，$u=0$

$$\frac{u_m+u}{u_m-u}=e^{\frac{t}{\tau_a}}$$

此為車輛從靜止開始加速，且加速過程沒有換檔的車速變化。

若車輛最大馬力為P，則

$$P=u_mF=(A+Cu_m^2)u_m$$

$C \approx P/u_m^3$

$\boxed{\text{例}}$：有一輛汽車，已知最大馬力為，極速為，車重為，請計算從0加速到100kph所需時間。

P = 200 hp= 149.3 kW，u_m=200 kph= 55.56 m/sec

$C \approx P/u_m^3$ = 0.87，m=1500 kg，

$\tau_a = \dfrac{m}{2Cu_m}$ = 15.5 sec，

則從0加速到100kph約需17 sec。

但其實車輛驅動力並非定直，而是與車速有關，可表示為

$$F_D = \frac{T_q \gamma_{GR} \eta_{TR}}{R_W}$$

其中T_q為引擎輸出扭力，γ_{GR}為減速比，η_{TR}為傳動效率，R_W為輪胎半徑。

引擎轉速與車輪轉速的關係為

$$\frac{\omega_E}{\omega_W} = \gamma_{GR}$$

車速與車輪轉速的關係為

$$u = \omega_W 2\pi R_W$$

故引擎轉速與車速的關係為

$$u = \frac{\omega_E}{\gamma_{GR}} 2\pi R_W$$

引擎輸出功率為 $P = T_q \omega_E = F_D u \eta_{TR}$

故驅動力可表示為 $F_D = \dfrac{P}{u}\eta_{TR}$

令$P_r = P\eta_{TR}$代表真實的輪胎功率輸出，則

$$m\frac{du}{dt}=\frac{P_r}{u}-A-Cu^2$$

$$\frac{du}{\frac{P_r}{u}-A-Cu^2}=\frac{udu}{P_r-Au-Cu^3}=\frac{dt}{m}$$

當引擎轉速高於所對應的車速，輪胎會打滑，常發生於加速時與緊急剎車時。

車輛減速過程中：

$$m\frac{du}{dt}=-A-Cu^2$$

$$\frac{du}{-A-Cu^2}=\frac{dt}{m}$$

$$\frac{d(u/u_s)}{1+(u/u_s)^2}=\frac{-A}{mu_s}dt=\frac{-Cu_s}{m}dt=-\frac{t}{\tau_d}$$

$u_s=\sqrt{\frac{A}{C}}$ ， $\frac{1}{\tau_d}=\frac{Cu_s}{m}$

將上式積分，可得 $\tan^{-1}(\frac{u}{u_s})=-\frac{t}{\tau_d}+c_2$

$t=0$，$u=u_1$， $c_2=\tan^{-1}(\frac{u_1}{u_s})$

$$u=u_s\tan\left(\tan^{-1}(\frac{u_1}{u_s})-\frac{t}{\tau_d}\right)$$

$$\frac{1}{\tau_d}=\frac{Cu_s}{u}=\frac{Cu_m}{m}\frac{u_s}{u_m}=\frac{1}{\tau_a}\sqrt{\frac{A}{F_D-A}}$$

$$\frac{\tau_a}{\tau_d}=\sqrt{\frac{A}{F_D-A}}$$

(4.4). 球體與圓柱的阻力係數：

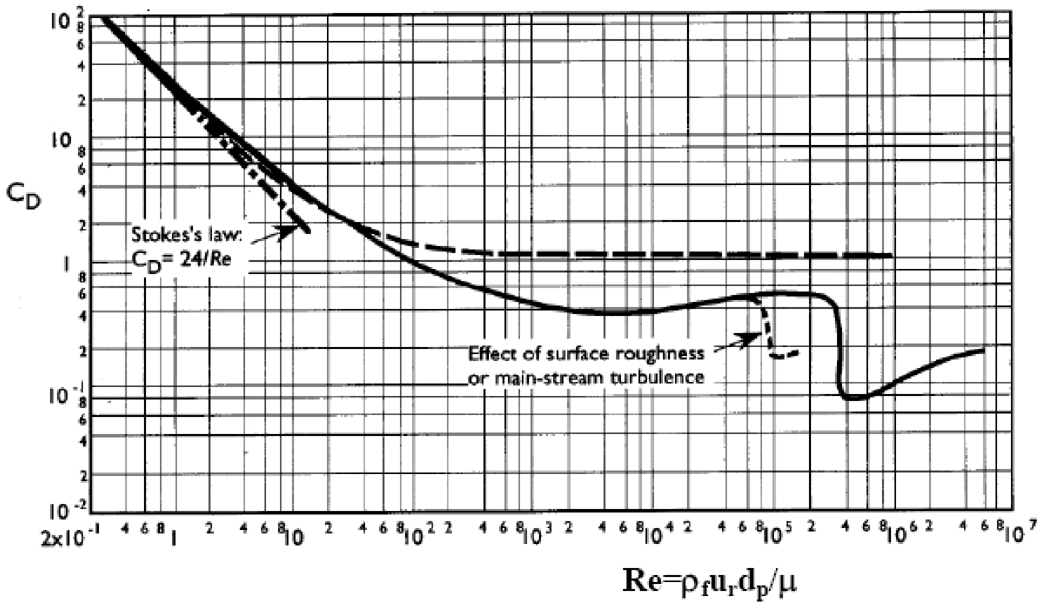
$$F = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A$$

若物體為球形，C_D 可表示如下：

$$C_D = F(\mathrm{Re}) \text{，} \mathrm{Re} = \frac{\rho u_{rel} D_p}{\mu}$$

其中 Re 為雷諾數，ρ為流體密度，D_P 為顆粒直徑，μ 為流體黏度。C_D 與 Re 的關係如圖 5.1 所示。由圖可看出 C_D 隨著雷諾數增加而降低，在低雷諾數時 $(\mathrm{Re} < 1)$，$C_D = \dfrac{24}{\mathrm{Re}}$ ，此稱為低雷諾數流體。

Variation of drag coefficient with Reynolds number for a circular disk (dashed line) and a sphere (full line)



C_D 與 Re 的關係可表示如下：

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} + \frac{6}{1+\sqrt{\mathrm{Re}}} + 0.4 \text{，} 0 < \mathrm{Re} < 2\times10^5$$

$$C_D = \frac{1.0967\times10^{21}}{\mathrm{Re}^{4.0414}} \text{，} 2\times10^5 < \mathrm{Re} < 3\times10^5$$

$C_D = 0.000366 \times \mathrm{Re}^{0.4275}$ ，$3\times10^5 < \mathrm{Re} < 2\times10^6$

$C_D = 0.18$ ， $\mathrm{Re} > 2\times10^6$

$\boxed{例}$：計算颱風天中，電線桿所受的力。假設風速為 20 m/sec，電線桿高 15m，直徑 30 cm。

$\boxed{例}$：計算颱風天中，電線所受的力。電線長 50m，直徑 0.5 cm。

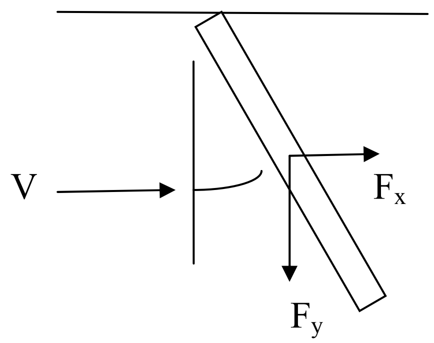
$\boxed{例}$：有一條海底管線，直徑3m，兩個固定基座之間的距離為100m，若洋流速度為0.3 m/sec，請計算管線所受的力。

ρ=1000 kg/m^3，$\mu = 8.6\times10^{-4}$ m^2/sec，d = 3 m，u = 0.3 m/sec

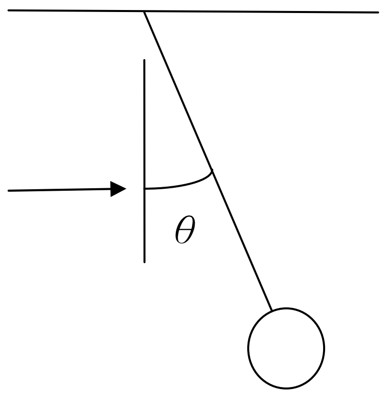
Re = 1046512，c_d= 1.0

$$F = c_d \cdot \frac{1}{2}\rho u^2 A = 13500 \text{ N}$$

$\boxed{例}$：有一根木桿，長度 10m，直徑 3cm，密度 980 kg/m^3，風速 10 m/sec 時，請計算木桿被風舉起的角度。已知木桿的阻力係數為 1.2。



作業 4.4，有一根木桿，懸掛一顆鋁球，已知木桿長度 10m，直徑 3cm，密度 980 kg/m^3，鋁球直徑 30 cm，密度 2700 kg/m^3，風速 20m/sec 時，請計算木桿被風揚起的角度 θ。



(4.5). 終端速度

固體在流體中受到重力影響往下降，當重力與阻力加上浮力相同時，不再加速，最後達到的平衡速度。

伽利略比薩斜塔的實驗：1590 年，伽利略於比薩斜塔上做了一個實驗。實驗中，他把兩個重量不同的鉛球從高處拋下，兩個鉛球同時著地,藉此推翻阿里士多德的重物比輕物更快下落的理論。

亞里斯多德(Arisotle, B.C.384~322)認為二個重量不等的球，從同一個高度，同時落下時，重的會先到達地面。他認為落體的速度和它的重量成正比。亞里斯多德的說法，被認為是天經地義而流傳了二千年。

最早挑戰這個看法的，並且做實驗來否定亞里斯多德的，並不是伽利略。早在 1586 年，荷蘭的力學家西蒙史蒂芬(SimonStevin,1548~1620) 就做了落體實驗，並且在他的《論力學》中寫到：

我們拿二個球，其中一個比另一個重十倍。我們把他們從 30 英尺的高度同時丟下來，落在一塊木板或者是什麼會發出清晰聲響的東西上面，我們發現，輕的球所花的時間並不是重球的十倍，而是當它們落地時，它們發出的聲音聽起來就像是一個聲音一樣。

那伽利略到底有沒有在比薩斜塔上，當著許多人的面做這個實驗呢？這件事的記載是來自維維安尼 (Vincenzo Viviani,1622~1703)在 1654 年寫的《伽利略生平的歷史故事》，這本書在 1717 年出版。維維安尼是伽利略晚年的得意門生和親密助手，他到伽利略身邊時才 18 歲，3 年後，伽利略就過世了。在書中，維維安尼說，伽利略在 1590 年的一天，當著全校師生的面前，在比薩斜塔的七層陽台上做了落體實驗。但是根據科學史家們的考證，伽利略、比薩大學和同時代的人都沒有關於這次實驗的的記載和說明。

那到底有沒有人在比薩斜塔上做過這個實驗？根據記載，1612 年有一個人在比薩斜塔上做過這個實驗。不過這個人是支持亞里斯多德觀點的。他是為了反駁伽利略而作這個實驗的。結果呢？二者並沒有同時到達地面。

$$F_v + F_b = F_g$$

$$\frac{1}{2} C_D A_P \rho u_{ter}^2 + V_p \rho g = V_p \rho_p g$$

若顆粒為球形，$V_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3$，$A_p = \pi R_p^2$，其中 R_p 為顆粒半徑。

$$u_{ter} = \sqrt{\frac{2V(\rho_p - \rho)g}{C_D A_P \rho}} = \sqrt{\frac{2\frac{4}{3}\pi R_p^3(\rho_p - \rho)g}{C_D \pi R_p^2 \rho}} = \sqrt{\frac{8R_p g}{3C_D}(\frac{\rho_p}{\rho} - 1)}$$

$\boxed{\text{例}}$：計算雨滴在大氣中的終端速度。假設風速為零。

$$\frac{1}{2}C_D A_P \rho_a u^2 + \rho_a V g = mg = \rho V g$$

$$\frac{1}{2}C_D \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \rho_a u^2 = (\rho - \rho_a)\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 g$$

$$C_D u^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right) dg$$

$$C_D\left(\frac{du}{\nu_a}\right)^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right)\frac{d^3}{\nu_a^2} g$$

$$C_D \,\mathrm{Re}^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right)\frac{d^3}{\nu_a^2} g$$

若 $\rho = 1000$ kg/m^3，$\rho_a = 1$ kg/m^3，$\nu_a = 15.69\times10^{-6}$ m^2/sec，

d = 0.01 m，Re = 10739，u = 16.85 m/sec

d = 0.001 m，Re = 250，u = 3.92 m/sec

d = 0.0001 m，Re = 1.8，u = 0.28 m/sec

$\boxed{\text{例}}$：有一個金屬球，直徑為 30 cm，比重 8900 kg/m^3，沉往海底，請計算終端速度。

$\boxed{\text{作業 4.5}}$，有一個金屬球，直徑為 10 cm，比重 2700 kg/m^3，沉往海底，請計算終端速度。

$\boxed{\text{例}}$：同時從 50 m 的高處擲下一顆木球與一顆鐵球，直徑皆為 1 cm，阻力係數皆為 0.35，木球密度為 980 kg/m^3，鐵球密度為 7800 kg/m^3，擲下的初速度皆為 0 m/sec，請計算哪一個先到達地面。

$\boxed{\text{作業 4.6}}$：若擲下木球與鐵球直徑為 10 cm，請計算哪一個先到達地面。

(4.6). 風場中的微粒運動

本文主要考慮一微小顆粒受氣流帶動，所產生的加速現象。本文所考慮的顆粒為球形，質量固定，不會變形。

顆粒在流體中所承受的阻力有兩種，一種是流體黏滯性所產生的表面摩擦力，一種是顆粒在迎風處與背風處的壓力差。這兩種力都與顆粒在流體中的相對速度有關，阻力可以表示如下：

$$f=\frac{1}{2}C_D A_P \rho u_{rel}^2$$

其中 C_D 為阻力係數，ρ為流體密度(kg/m^3)，A_P 為顆粒截面積(m^2)，u_{rel} 為顆粒在流體中的相對速度(m/sec)。

若流體速度為 u，顆粒速度為 u_P，則顆粒在流體中的加速度為

$$f=m_p\frac{du_p}{dt}=\frac{1}{2}C_D A_P \rho\left(u-u_p\right)^2$$

上式中 m_P 與 A_P 為顆粒的性質，若顆粒為球形，$m_p=\frac{4}{3}\pi R_p^3\rho_p$，$A_p=\pi R_p^2$，其中 R_p 為顆粒半徑，ρ_p 為顆粒的密度。至於ρ與 u 為流體的性質，C_D 則與顆粒及流體有關，可表示如下：

$$C_D=F\left(\mathrm{Re}\right)，\mathrm{Re}=\frac{\rho u_{rel}D_p}{\mu}=\frac{\rho\left|u-u_p\right|D_p}{\mu}$$

其中 Re 為雷諾數，ρ為流體密度，D_P 為顆粒直徑，μ 為流體黏度。

顆粒在移動時，所遭遇的流體速度固定，C_D 值也不變：

$$\frac{du_p}{dt}=\frac{du_p}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=u_p\frac{du_p}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du_p^2}{dx}$$

$$\frac{du_p^2}{dx}=\frac{A_P}{m_p}C_D\rho\left(u-u_p\right)^2=\frac{3}{4}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}\left(u-u_p\right)^2$$

但顆粒在噴嘴中不一定是加速，也可能是減速，這會發生在顆粒的速度高於流體速度時，此時顆粒反而會減速。故顆粒在流體中的加速度應表示為：

$$\frac{du_p^2}{dx}=\frac{3}{4}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}\left(u-u_p\right)^2$$ ，當 $u>u_p$

$$\frac{du_p^2}{dx}=-\frac{3}{4}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}\left(u-u_p\right)^2$$ ，當 $u<u_p$

首先考慮 $u>u_p$ 的情況。若 C_D 為固定值，則

$$\frac{u_p}{\left(u_p-u\right)^2}\frac{du_p}{dx}=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}$$

$$\left(\frac{u_p-u}{\left(u_p-u\right)^2}+\frac{u}{\left(u_p-u\right)^2}\right)\frac{du_p}{dx}=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}$$

$$\frac{d(u_p-u)}{u_p-u}+\frac{ud(u_p-u)}{\left(u_p-u\right)^2}=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}dx$$

$$\ln(u_p-u)-\frac{u}{u_p-u}=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}x+c$$

$x=0$ ， $u_p=u_{p0}$

$$c=\ln(u_{p0}-u)-\frac{u}{u_{p0}-u}$$

$$\ln\frac{u_p-u}{u_{p0}-u}+\frac{u}{u_{p0}-u}-\frac{u}{u_p-u}=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}x$$

$x\rightarrow\infty$ ， $u_p\rightarrow u$

若 $u<u_p$ ，則

$$\ln\frac{u_{p0}-u}{u_p-u}-\frac{u}{u_{p0}-u}+\frac{u}{u_p-u}=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}x$$

$\boxed{例}$：有一塊靜止木屑，直徑為 1 mm，比重 980 kg/m^3，被風捲起，風速為 10m/s，請計算木屑速度為 5m/s 時，所飛行的距離。

$$\ln\frac{5}{10}-\frac{10}{10}-\frac{10}{5-10}=0.3069=\frac{3}{8}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}x$$

顆粒在移動時，所遭遇的流體速度，流體密度，流體溫度會隨所在位置而迅速改變，流體黏度與流體溫度有關，C_D 值也會隨顆粒所在位置而不同，故顆粒在流體中的加速度可改以速度隨位置而改變。

若以 u_p^2 為該方程式的變數，令 $u_p^2=y$，則顆粒在流體中的加速度可表示為：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}\left(u^2-2u\sqrt{y}+y\right)，當 u^2>y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}\frac{C_D}{R_p}\frac{\rho}{\rho_p}\left(u^2-2u\sqrt{y}+y\right)，當 u^2<y$$

其中 R_p 與 ρ_p 為固定值，$u=u(x)$，$\rho=\rho(x)$，$C_D=C_D(x,y)$