

# 如何透過網路體驗數學？

陳敏皓

國立蘭陽女中數學教師

## 壹、前言：

105 年 4 月 27 日高中數學學科中心在國立台灣科學教育館舉行數學印象特展研習，過程中的兩大特點分別是李國偉教授的專題演講—「數學在實與虛的博物館」、及參觀「超越無限·數學印象」展覽，這個展覽有專屬的 FB，圖一為目前展出海報，眼尖的讀者可以細數海報中的「超越無限·數學印象」這八個字蘊含多少個數字或數學符號？



圖一、「超越無限·數學印象」海報。

由於「超越無限·數學印象」展覽的資料在網路上已經十分豐富，無須贅述，因此，筆者將重點放在李國偉教授的精闢演講內容上，教授極為用心準備，在演講結束後得到所有數學種子教師的一致讚賞與肯定，讚嘆李教授的見多識廣，並肯定他對數學界的全心投入。「數學在實與虛的博物館」一文中已經針對緣起與網頁特色做了詳實的推薦，<sup>1</sup>本文將接續介紹外國的數學博物館，讓大家透過網路去「體驗」數學，尤其著重於中學數學內容。

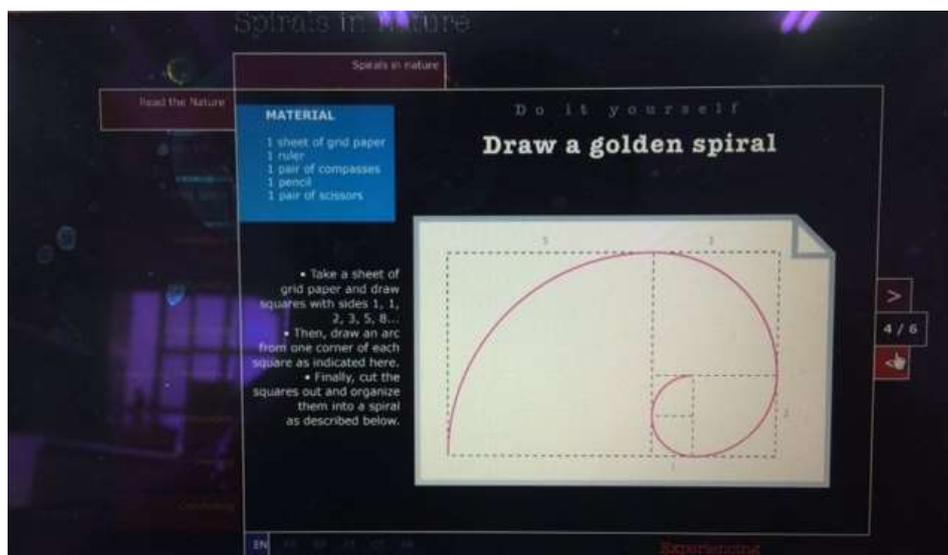
<sup>1</sup>文章載於《科學研習(Science Study Monthly)》第 55 卷第 3 期，2016 年 3 月。本期收錄的文章大部分都是數學實作，值得參閱。

貳、「體驗數學」<http://www.experiencingmaths.org/>：

網頁中包含十個項目：

### 1. 閱讀自然：

1.1 大自然的螺線(spiral)：包含松果的螺線、費氏數列、螺線圖形、畫出黃金螺線(圖二)、費氏數列的歷史、數學的相關工作六張生動的投影片。



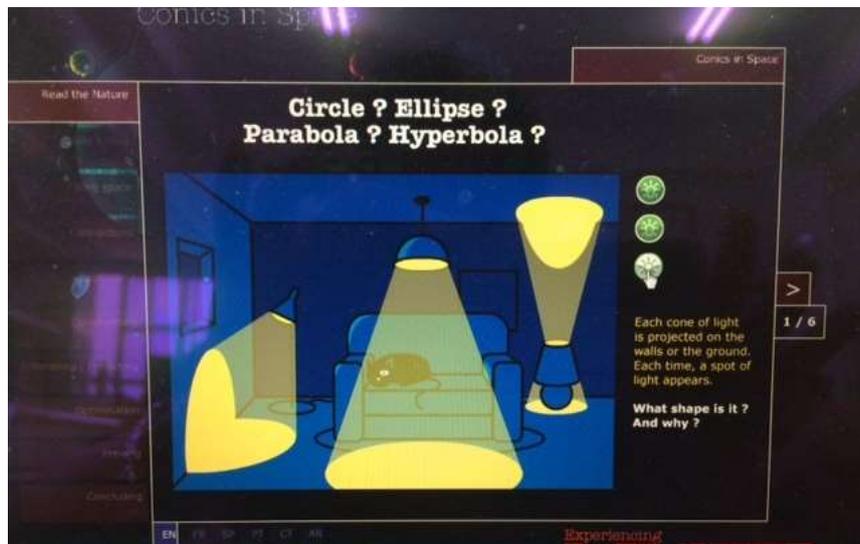
圖二、畫出黃金螺線。

1.2 碎形(fractal)世界：模數 3 的巴斯卡三角形(圖三)、將巴斯卡三角形著色、史賓斯基地毯(Sierpinski carpet)、虧格、碎形雪花、數學的相關工作。



圖三、模數 3 的巴斯卡三角形。

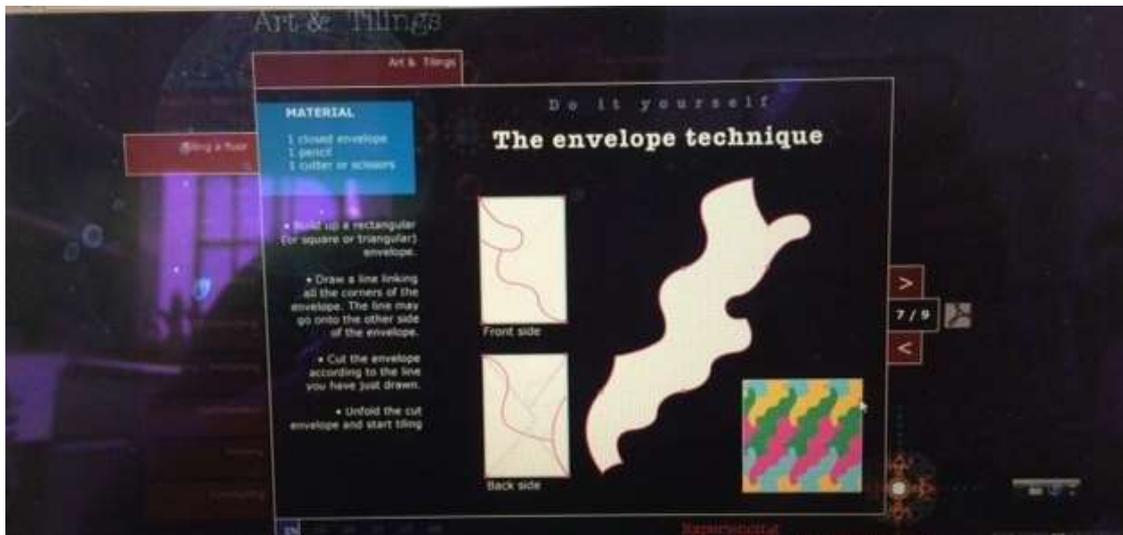
1.3 空間中的圓錐曲線：圓？橢圓？拋物線？雙曲線？(圖四)、光線與圓錐曲線、圓錐截痕、摺紙學圓錐曲線、天文學中的圓錐曲線、數學的相關工作。



圖四、圓？橢圓？拋物線？雙曲線？

## 2. 平鋪地板：

2.1 藝術和鋪磚(tiling)：用一片創造出最漂亮的鋪磚、用兩片創造出最漂亮的鋪磚、用一個圖形鋪磚、用兩個圖形鋪磚、介紹伽羅瓦(Evariste Galois, 1811-1832)的群論(group theory)、貓，魚，房子等形狀、封閉的技巧(圖五)、17個長方形鋪磚模式、數學的相關工作。



圖五、封閉的技巧。

2.2 萬花筒(kaleidoscope)：各種角度的萬花筒、製造兩個萬花筒、觀察萬花筒中的對稱性、介紹艾雪(Maurits Cornelis Escher, 1898-1972)、誰在鏡子後面？(圖六)、金字塔內的鏡子、數學的相關工作。



圖六、誰在鏡子後面？

2.3 我在何處：如何鋪滿球體？球體鋪色(圖七)、最佳衛星個數與球體鋪色的關係、進一步討論球面三角、製造紙板的球、數學的相關工作。



圖七、球體鋪色。

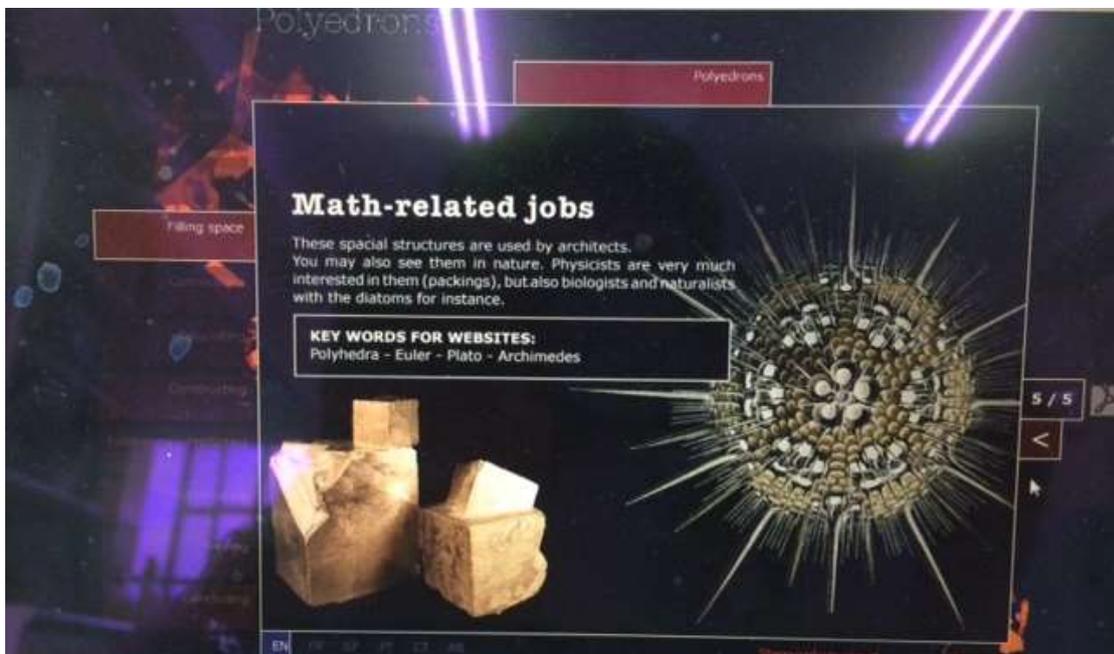
### 3. 填滿空間：

3.1 堆疊橘子：你如何擺放最大量的橘子？繼續堆疊(圖八)、不同堆疊密度的比較、繼續比較密度、提出三個問題、三個正立方體與六角柱體的密度比較、數學的相關工作。



圖八、繼續堆疊。

3.2 多面體：幾個面？幾個頂點？幾個邊？你自己數一數個數、柏拉圖正多面體與歐拉公式、動手做與下結論、數學的相關工作(圖九)。



圖九、數學的相關工作。

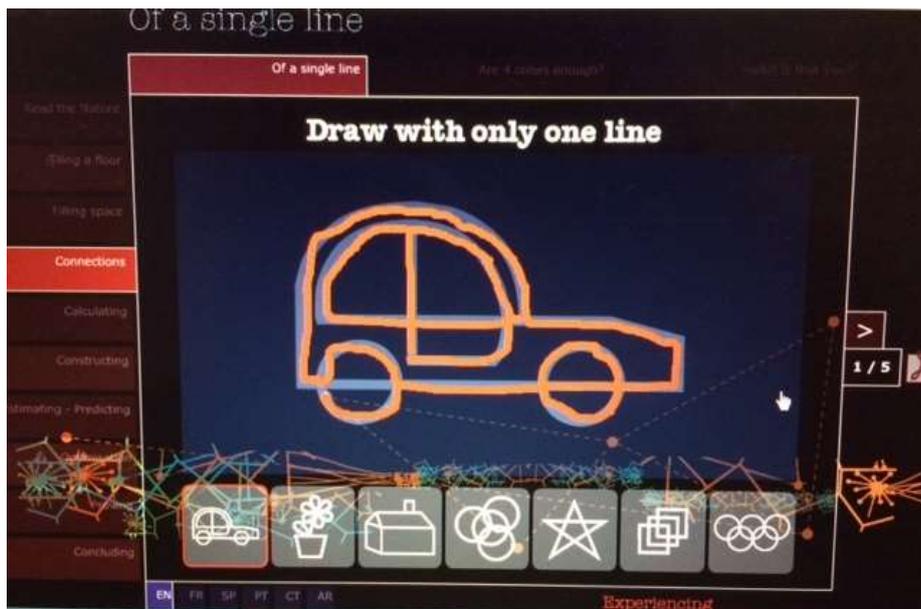
3.3 複雜的問題：你能把牠們都塞進去？填滿箱子(圖十)、數學家心中的複雜問題、帆布背包的最佳化、最大體積的金字塔、錐體體積公式、數學的相關工作。



圖十、填滿箱子。

4. 連結：

4.1 單一直線：一筆劃(圖十一)、只用一條直線、歐拉的哥尼斯堡七橋問題、骨牌對應歐拉路徑(Eulerian Path)、數學的相關工作—圖論(Graph theory)。



圖十一、一筆劃。

4.2 四個顏色足夠嗎：相鄰異色，只需要用四個顏色(圖十二)、請你用蠟筆在地圖上塗色，相鄰必須異色，只有四個顏色可用、四色理論、換成多面體如何？、三戶人家對三口井、問題：「岸邊有一隻狼、一隻羊、一顆高麗菜，船夫想帶牠們三個全部順利過河，但是，船一次只能帶一個，又狼會吃羊、羊會吃高麗菜，請問船夫該如何渡河？」數學的相關工作。



圖十二、相鄰異色，只需要用四個顏色。

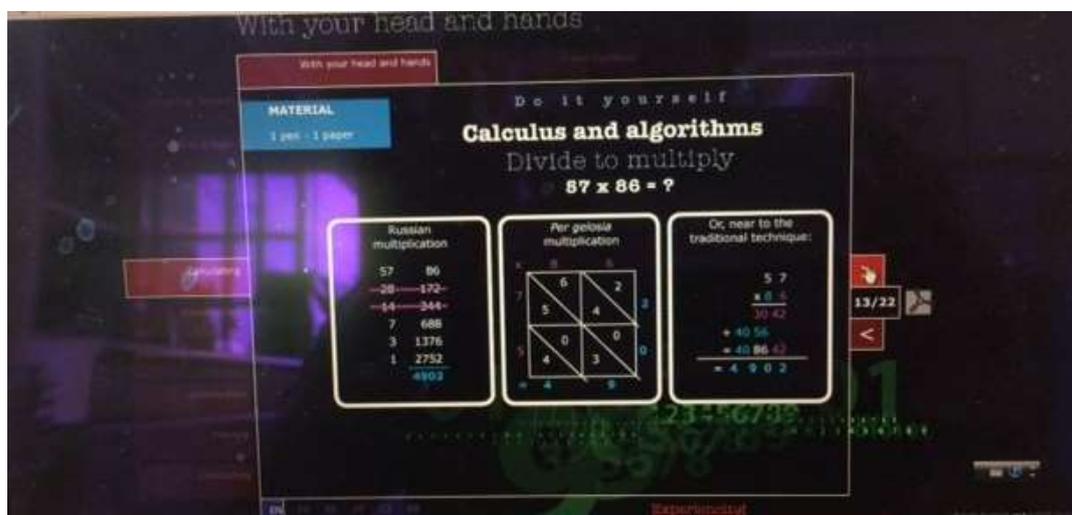
4.3 哈囉！是你嗎：甚麼是最短路徑？(圖十三)、業務員的旅程、注意、世界上四處走走、回憶漢米爾頓路徑(Hamiltonian Path)、擊破女王？(Checkmate the Queens?)、從 Beef 每次換一個字母後，會變成 Lids、數學的相關工作。



圖十三、甚麼是最短路徑？

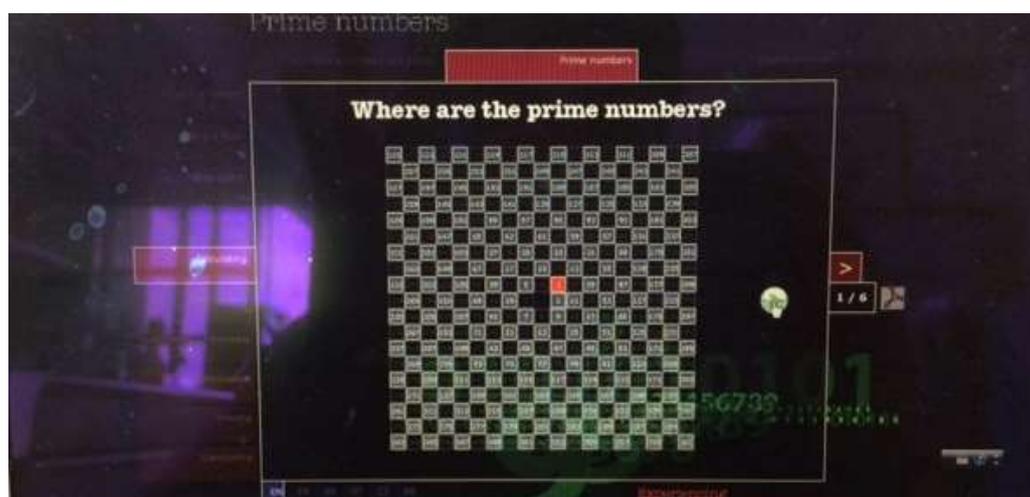
## 5. 計算：

- 5.1 使用你的頭和手：9 的倍數、介於 5 和 10 的兩個數字乘法、介於 10 和 15 的兩個數字乘法、介於 15 和 20 的兩個數字乘法、用手指頭計算、介於 15 和 20 的兩個數字乘法理論介紹、代數原理、快速心算、介紹印度數學家卡布列克(Kaprekar Routine, 1905-1988)、乘法與除法的心算、令人震驚的乘法、敘拉古猜想(The Syracuse Conjecture)<sup>2</sup>、介紹三種乘法(俄羅斯乘法、鋪地錦乘法、傳統乘法)(圖十四)、俄羅斯數學家卡拉蘇巴(Anatolii Karatsuba, 1937-2008)的乘法原理、利用比例的快速乘法、利用雙重比例的快速乘法、計算和幾何、泰利斯(Thales)和比例、自變數的平移與伸縮、計算的近似值、我的電腦戲弄我、數學的相關工作。



圖十四、介紹三種乘法。

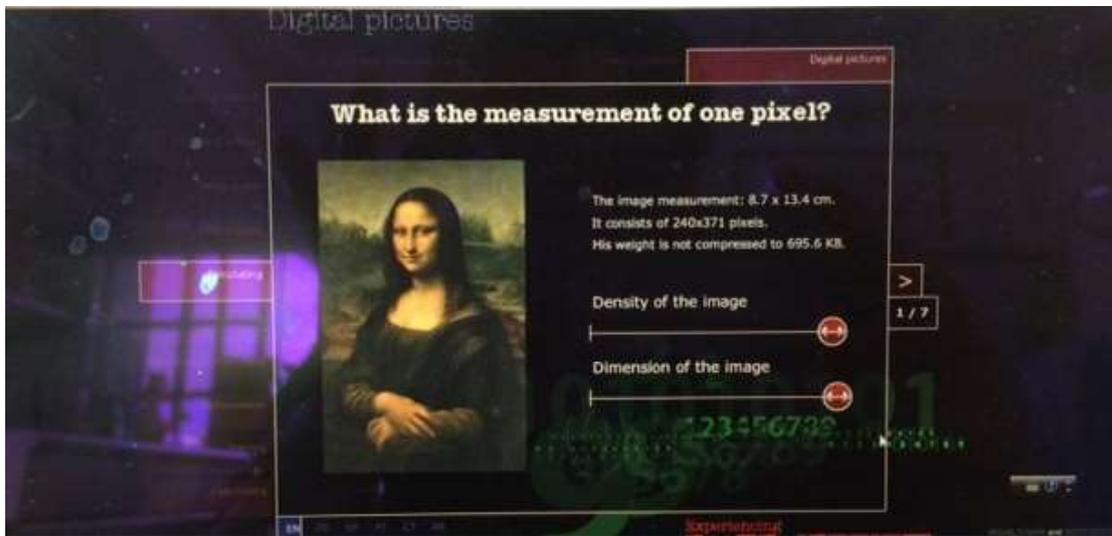
- 5.2 質數：質數在哪裡？(圖十五)、質數的軌跡、讓我們以 421 為例、質數的大家庭、整數的大家庭、數學的相關工作。



圖十五、質數在哪裡？

<sup>2</sup> 亦稱為考拉茲猜想(Collatz Conjecture)。

5.3 數位照片：像素的大小是什麼？(圖十六)、二進位的運算、二進位系統影響我們的日常生活、72 畫素或 300 畫素？、彩色畫素、照片的大小、數學的相關工作。



圖十六、像素的大小是什麼？

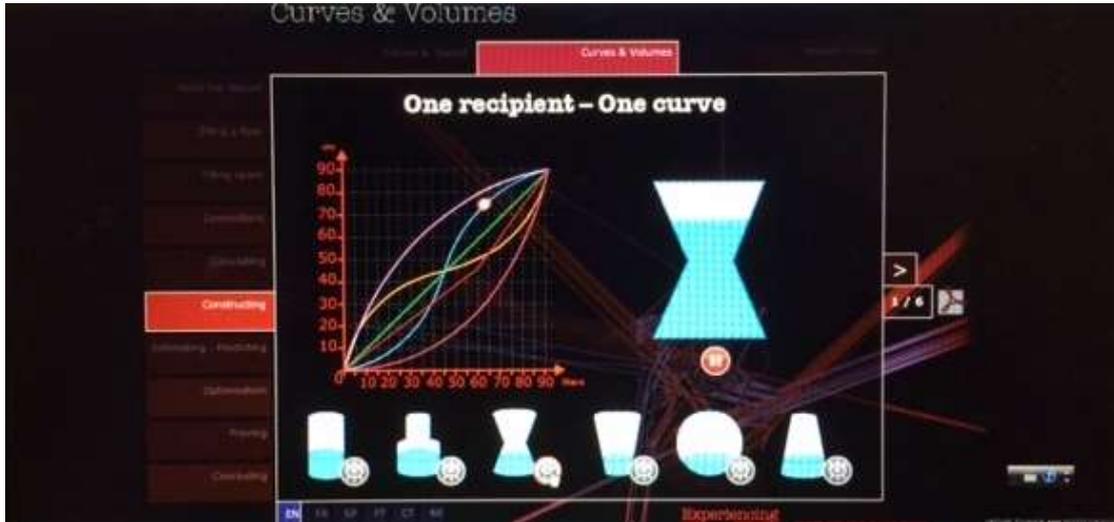
## 6. 構造：

6.1 曲線和速度：它是哪一個的賽車道？你在哪一個賽車道？(圖十七)你能閱讀曲線嗎？回憶速度和加速度、降低你的速度和及時煞車、數學的相關工作。



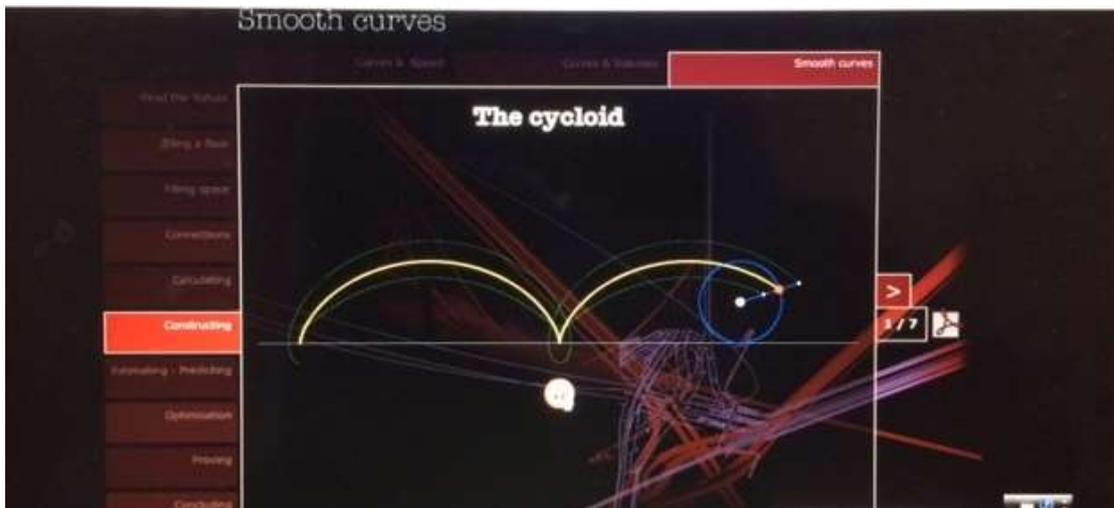
圖十七、你在哪一個賽車道？

6.2 曲線和體積：容器—單一曲線(圖十八)、桶子的體積、你能閱讀圖形嗎？  
一個一個測量、有趣的公式、數學的相關工作。



圖十八、容器—單一曲線。

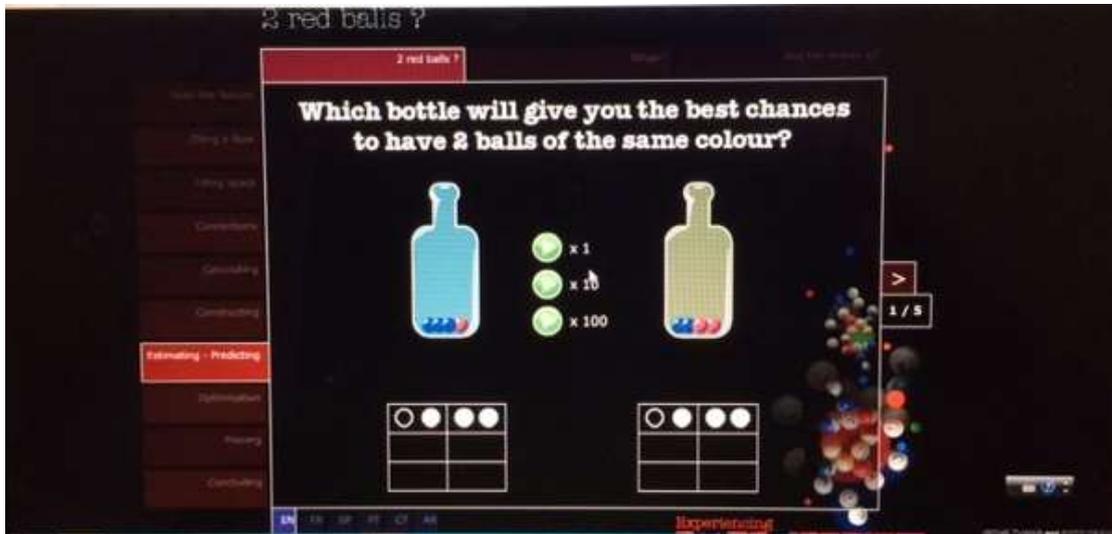
6.3 平滑曲線：擺線(圖十九)、小圓輪和擺線、直線，曲線和迴路、最短路徑、  
擺線的歷史、碰撞問題、數學的相關工作。



圖十九、擺線。

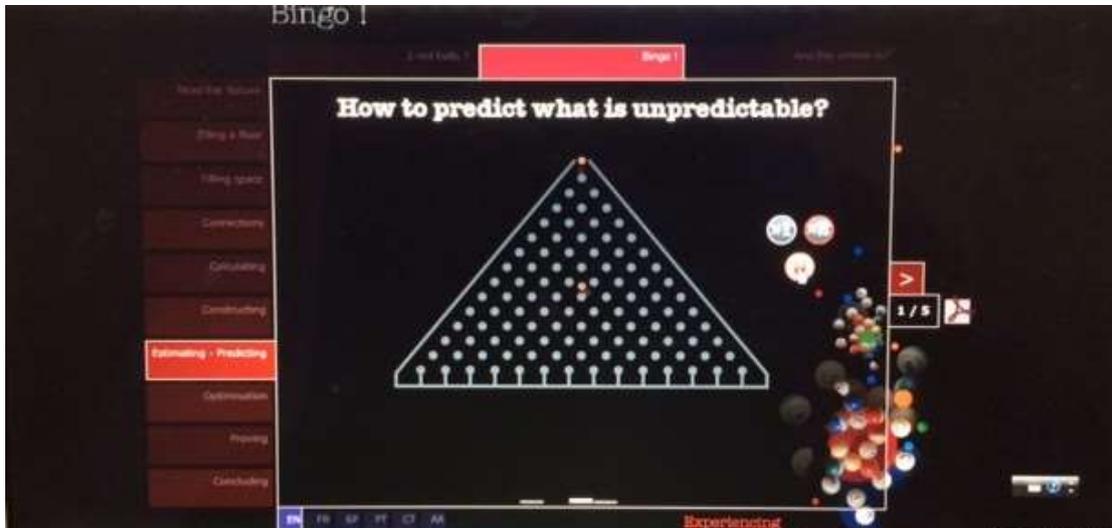
## 7. 估計和預測：

7.1 兩個紅球：哪一個瓶子出現兩個同色球的機率較大？(圖二十)兩個同色球或兩個異色球？注意估計和預測、球數和得票數、數學的相關工作。



圖二十、哪一個瓶子出現兩個同色球的機率較大？

7.2 賭博遊戲：當你無法預測時，你如何預測？(圖二十一)機率可計算嗎？介紹高斯曲線、選擇正確的箱子、數學的相關工作。



圖二十一、當你無法預測時，你如何預測？

7.3 贏家是誰：剪刀石頭布、兩個玩家的剪刀石頭布、先到 20 者為贏家(圖二十二)、巧克力條遊戲、遊戲，機率和策略、放上你的賭注、賽局理論介紹、數學的相關工作。



圖二十二、先到 20 者為贏家。

## 8. 最佳化：

8.1 肥皂泡泡：表面最小化(圖二十三)、懶散的天性、泡泡到泡泡、泡泡數學、數學的相關工作。



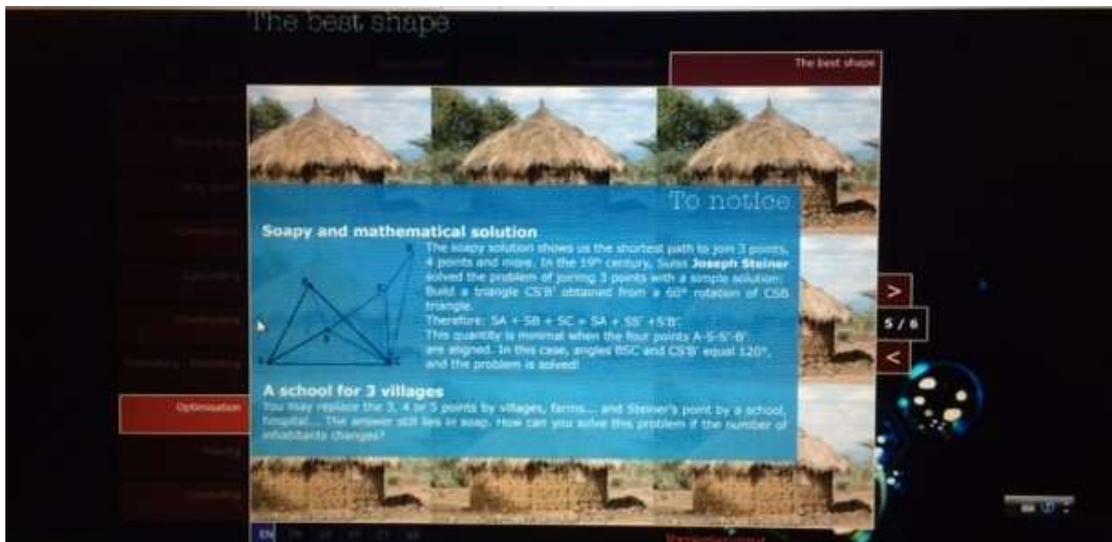
圖二十三、表面最小化。

8.2 最短路徑：跨兩條河流的最短路徑(圖二十四)？從 A 點到 B 點的最短路徑是什麼？表面的最短路徑、球面的最短路徑、高斯的球面測量、數學的相關工作。



圖二十四、跨兩條河流的最短路徑。

8.3 最佳形狀：最短路徑是連結三點？還是連結四點？三點之間的最短路徑、蜂巢數學問題、兩個圓之間的最小表面、最短路徑和的數學解法(圖二十五)、數學的相關工作。



圖二十五、最短路徑和的數學解法。

## 9. 求證：

9.1 畢達哥拉斯：畢氏定理證明(圖二十六)、切割證明法、中國的《周髀算經》、相同面積從多邊形到長方形、相同面積從長方形到正方形、畢氏定理結論、介紹無理數 $\sqrt{2}$ 、沙發問題、數學的相關工作。

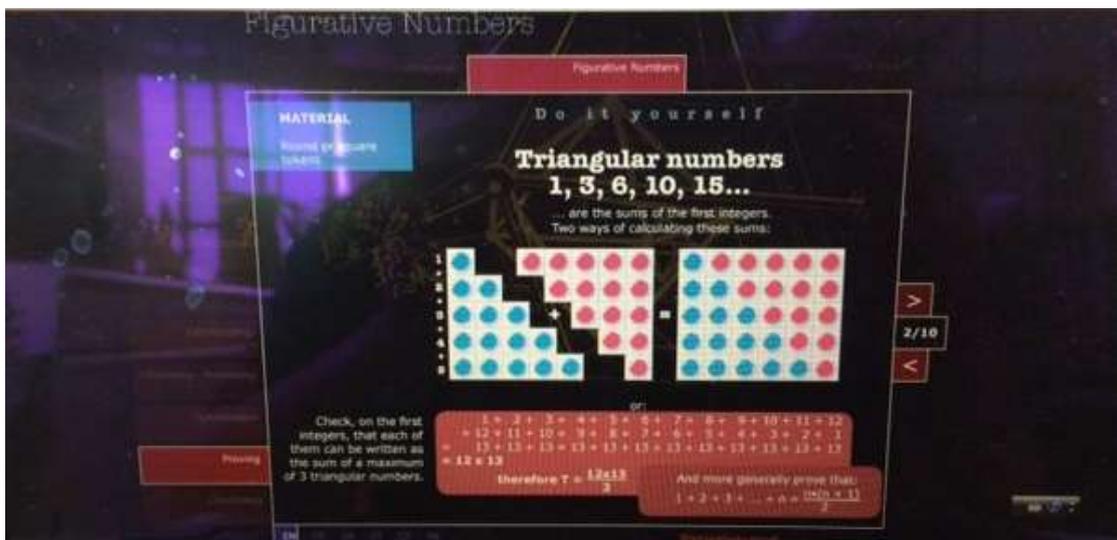


圖二十六、畢氏定理證明。

9.2 有形數： $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$  三角形數(圖二十七)、正方形數、五邊形數

與六邊形數、從畢達哥拉斯到丟番圖再到巴斯卡、代數與幾何、不證自明  
 $(1+2+3+4+\dots)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$ 、無言的證明

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 、從猜想到證明、數學的相關工作。



圖二十七、三角形數。

9.3 真的嗎： $64 = 65$ ？(圖二十八)、 $63 = 64 = 65$ ？圖示或真實？從畢達哥拉斯到懷爾斯、費瑪最後定理、改變點的看法、數學的相關工作。



圖二十八、 $64 = 65$ ？。

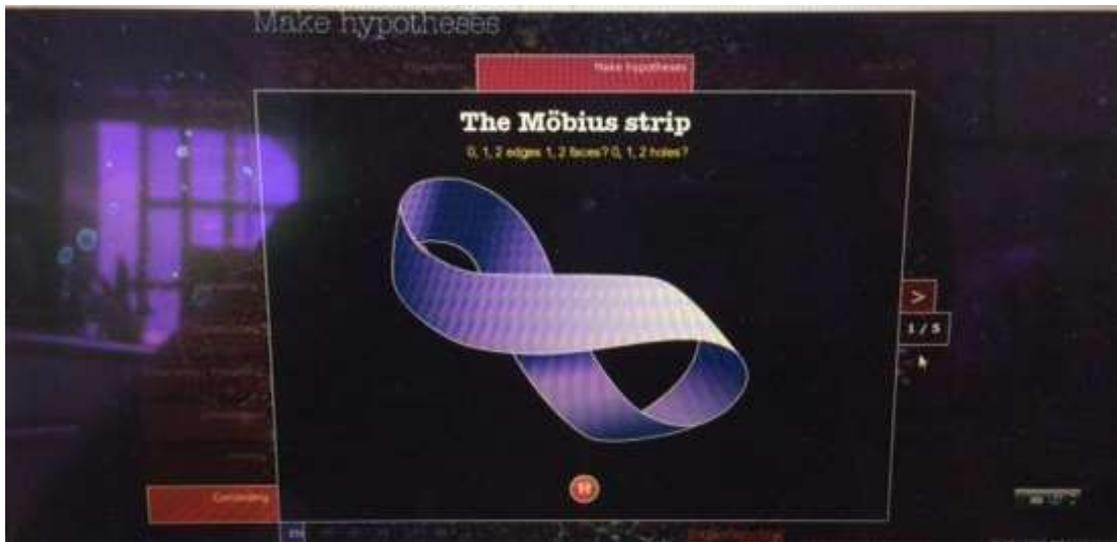
## 10. 結論：

10.1 實驗：數學在哪裡？沙堆幾何(圖二十九)、摺紙和數學、實驗數學、數學的相關工作。



圖二十九、沙堆幾何。

10.2 提出假設：莫比烏斯帶(圖三十)、小疑問大問題(1)、小疑問大問題(2)、隱藏模式、數學的相關工作。



圖三十、莫比烏斯帶。

10.3 證明它：透過一個平坦螢幕、平面國、生活在平面國(圖三十一)、面對四維、實驗方法、數學的相關工作。

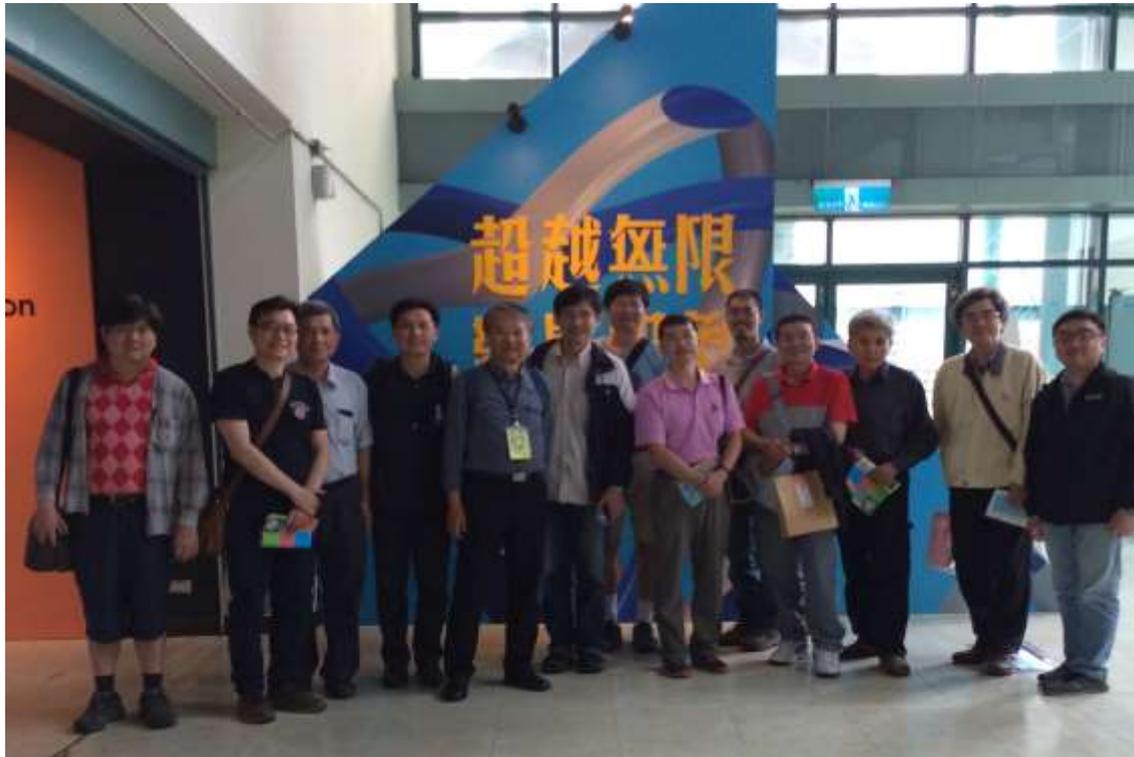


圖三十一、生活在平面國。

### 參、結論：

笛卡爾(René Descartes, 1596-1650)曾說：「越學習，越發現自己的無知。」這句話就是我看過體驗數學網站的體悟，這個網站令人驚艷並具有國際化的視野，因為它可以用英語、法語、西班牙語、葡萄牙語、阿拉伯語切入，可見這個網頁的企圖心，此外，它在每一個單元結束前都有一頁「數學的相關工作」，目的是為了告訴讀者這個數學領域的發展性與職業相關探索，這個研習令筆者收穫滿滿，

參與教師如圖三十二，感謝李國偉教授的介紹體驗數學網站，也謝謝高中數學學科中心同仁的付出。



圖三十二、參加數學印象特展研習的教授與老師。