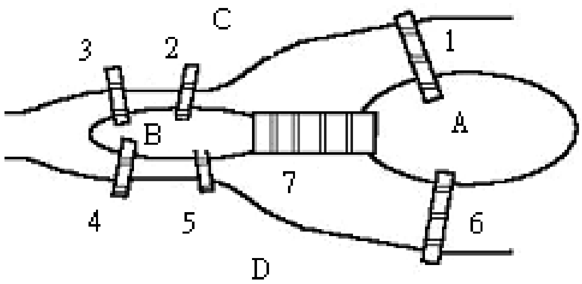
沿著歐拉的足跡——圖論初探

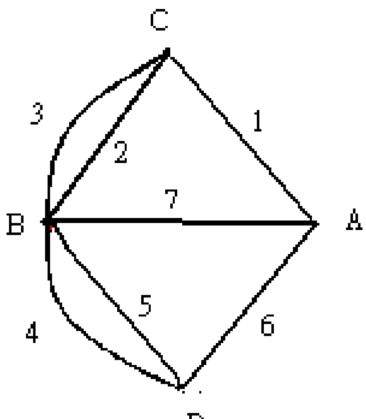
哥尼斯堡七橋問題



歐洲的普瑞格爾河(Pregel River)流過東普魯士(East Prussia)的古城哥尼斯堡(Konigsberg)市中心，河中有兩座島，築有七座古橋，如圖一所示。每逢節假日，市民們紛紛上島，扶老攜幼，遊玩散步，不知何日何人提出如下的智力問題：請走過每座橋恰一次，再返回出發點。反覆的奔走與失敗，使人們不知其所以然地猜想其答案是否定的。

1736 年，年 29 的數學家歐拉(Euler, 1707-1783)嚴格地證明了上述哥尼斯堡七橋問題無解，並且由此開創了圖論的典型思維方式及論證方式，1736 年遂被公認為圖論元年。

如圖一，我們把哥尼斯堡的七座橋編號為 1 號橋，2 號橋，…，7 號橋，河道中的小島標記為 A 與 B，北河岸為 C，南河岸為 D。歐拉為了解決七橋問題，把上圖抽象加工畫成圖二的形狀，把 A，B，C，D 四處用 A，B，C，D 四個點代表，而且這四個點的位置與題目的答案無關。1～7 號橋分別用直線段或曲線段表示，它們的直、曲、長、短也與題目的答案無關。例如 1 號橋連接著上河岸 C 與小島 A，反映在圖二上，則畫成 1 號線段的端點為點 A 與 C，其餘各橋在圖二中的安排與 1 號橋相似。



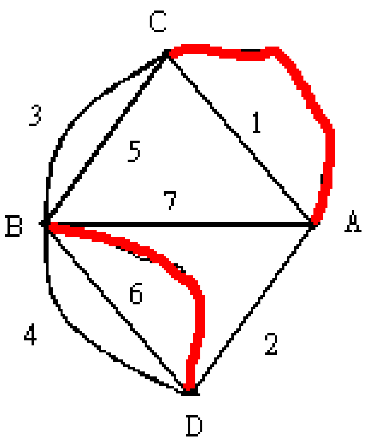
圖二

從圖二來分析，A，B，C，D 中每點皆有奇數條線段與它相連接，例如從 A 點出發，首先通過與它連接的一座橋，不妨設它為 1 號橋，經過一些時間，必須再通過 6 號與 7 號橋其中一座，如果通過的是 6 號橋，這時又回到 A 點處，然後從 A 出發再經過 7 號橋，因為每座橋只允許經過一次，這樣就永遠也回不到 A 點了。因為 B，C，D 中的每點也都有奇數條線段與它相連接，對於從點 B，C，D 出發的情形也和從 A 點出發雷同。可見七橋問題的答案是否定的。我們不難發現，之所以七橋問題無解，關鍵在於與同一地點相通的橋的數量是奇數。

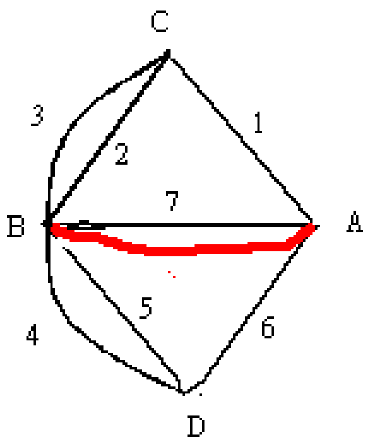
問題來了，如果提議在建造幾座便橋，那麼最少須要建造幾座，才能使每座橋恰通過一次，而且又能折返回原出發處？這些新建的橋該如何安排？

從圖二上可以看得很清楚，為了避免在 A，B，C，D 各點處對外連接的現段數為奇數，在點 A 與 C 之間及點 B 與 D 之間各多加一條連接兩點的線段（接通兩地的橋樑）即可。當然也可以考慮在點 A 與 D 及點 B 與 C 之間建造（是不是只有這二種方法，還是有其它解存在呢？）。例如在 A，C 之間與 B，D 之間各建造一座橋，則可以圖三示意表示。不妨從 A 點出發，下述路徑即是恰經過每座橋樑一次，又折返 A 點處：

A 1 C 8 A 7 B 2 C 3 B 4 D 5 B 9 D 6 A



圖三



圖四

從其他點出發，是否也存在這樣一種走遍每座橋的回路呢？如果有，那麼它是不是唯一的一條回路？

如果改變一下題意，一樣是要經過每座橋一次，但是不要求最後折返原出發處，那麼最少須要建造幾座橋？答案是在 A 與 C 或 A 與 D 或 A 與 B 或 B 與 C 或 B 與 D 之間任意造一座橋即可。例如在 A 與 B 之間加建一座橋，示意如圖四，那麼行走路線為

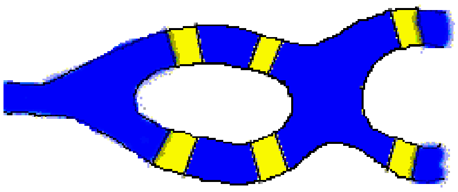
C 1 A 7 B 8 A 6 D 4 B 3 C 2 B 5 D

從圖四中可以發現只有點 C 與 D 之連接橋數是奇數，而正是這二個點可做為步行路線的起迄點，如果從 A 點出發就行不通了。

從上面這個具體問題的分析中，我們體會到，把一些事物用點來表示，當兩個事物之間有直接關係時，可以在這兩個事物相對應的點之間連上一條線段，這樣形成的圖形對於解決原來那個實際的問題大有幫助。再仔細來看圖二，它是一個封閉的圖，圖形的邊線只在端點有交點。把一枝鉛筆的筆尖看成是沿路徑散步的人，筆尖沿圖形走所留下的痕跡就是這個人走的路線，那麼原來的路徑問題更可以看成“對這樣一個封閉的圖形，是否可以一筆畫完成它”。

問題：

1. 假設哥尼斯堡市的居民將原先七座橋改建成六座，如右圖所示。現在請您描繪出行走的路線，使得此路線恰好只經過每座橋一次。



後記：

現在的哥尼斯堡市情形如何呢？

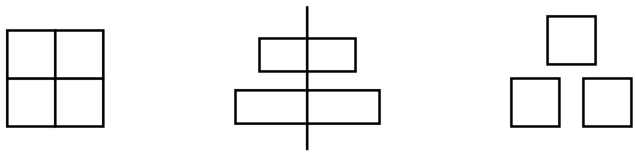
在 1875 年，哥尼斯堡市的居民在哥尼斯堡市建了第八座橋樑，這座橋從左岸到右岸，如此一來，哥尼斯堡市的居民便可以沿著這八座橋，不重複地在島上散步。

很不幸的，在 1944 年一場炸彈的襲擊幾乎毀滅了整個城市，之後的蘇聯政府重建了哥尼斯堡這座古城，並且將它命名為 Kaliningrad。令人惋惜的是，蘇聯政府對他們的數學歷史並不是很清楚，因為當他們重建完古城哥尼斯堡市後，橋的數量及位置都已經改變了。

一筆畫問題

一筆畫問題是什麼呢？什麼樣的圖形可以一筆畫完成，筆尖不離開紙面，而且每條線都只畫一次不重複呢？

例如下面圖五中的三個圖形，當您試過各種畫法後會斷定“田”和“品”不可能一筆畫完成，但是“串”卻可以。



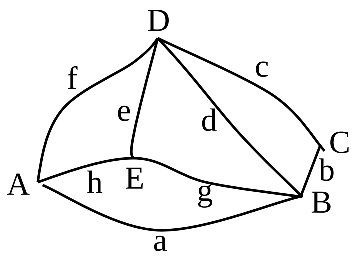
圖五

在討論一筆畫問題前，我們先看一下圖形構成之要件。從上面一節示意圖可知，圖形可以說是一些點與線所構成的。依實際問題中各要件的關係將它轉述為圖形，這樣的圖形無關線條長短、所圍成的區域面積大小，也不考慮孤立的點。我們以一個專有名詞來叫它，稱做網絡。

網絡的明確定義是指：由有限條線段所組成的圖形，每條線段都要求有兩個相異的端點。這些線段稱為網絡的弧，這些端點稱為它的頂點，這些線段只在端點處有交集。

為什麼要用這樣比較抽象的方式題出網絡的概念呢？這是因為，有了這種概念，可以使我們描述一件事情更容易、更方便，而且它可以擴大適用的範圍。因為這種網絡概念不光只用在紙上描繪的圖形，在實際物品，例如大到國家的鐵公路網、河川水運路線、市區的街道簡圖，小至家電用品電子 IC 板上的電路，都可以看成網絡。更進一步，網絡的運用還可以從平面的研究到空間的應用上。這都顯示出抽象方式的網絡概念的適用性。

在網絡中，互相銜接的一串弧，稱為一條路徑。這些弧彼此兩兩不相同，而且每條弧都以一個端點與另一條弧連接。例如在圖六中，(a, d, g, e)不是一條路徑，(a, d, e, g)才是路徑。如果一條路徑的起始端點等於終迄端點，那麼稱它為一條封閉的路徑。例如(a, g ,h, f, c, b, d, e, h)不是一條封閉的路徑。因為 h 出現了二次；(a, b, c, e, g, d, f)是一條封閉的路徑。如果這一條封閉的路徑所經過的端點都不重複，那麼稱它為一個圈。例如(a, d, e, h)是一個圈。

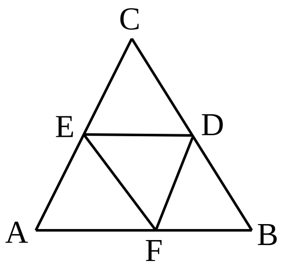


圖六

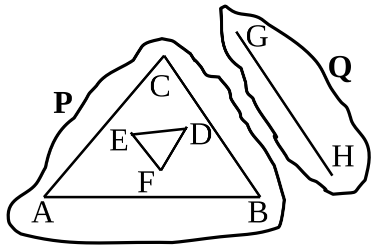
現在不難看出來，一筆畫問題相當於：給定一個網絡，問有沒有可能將所有的弧排成一條路徑（又稱為歐拉路徑）。而要求一筆畫完成後又回到原出發點，就相當於要求把全部的弧排成一條封閉的路徑（又稱為封閉的歐拉路徑）。如此看來，一筆畫問題就可以用網絡的概念明確地定義出來。原先的一筆畫問題是對平面的圖形討論的，在此時卻擴大到對任何網絡都有意義，不限於平面上的網絡。如果一個網絡全部的弧可以排成一條路徑（不必是封閉的），那麼就稱這網絡為一個一筆畫。

回到圖五的問題上，例如“品”字，所以不能一筆畫完成的原因，顯然因為圖形不是相連在一起的。所以，能夠一筆畫的圖形必定是連成一片的。所謂連成一片是什麼意思呢？這裡我們定義為：一個網絡稱為連通的，如果它的任意二個頂點都可以用一條路徑連接起來；

否則稱它爲不連通的（另一種定義方式：一個網絡稱爲不連通的，如果它可被二個不相交的封閉迴路所包含，如圖八，可以分別爲 **P**、**Q** 二個封閉的迴路所含蓋，而 **P**、**Q** 彼此不相交。）。如圖七是連通的。



圖七



圖八

如果某個網絡是由幾個網絡聯結成的，這幾個網絡彼此沒有公共的頂點和弧，那麼這個網絡就一定是不連通的。反過來，您可不可以證明：不連通的網絡總是由幾個互不相交的連通的網絡所聯結而成的。在這裡，這幾個連通的網絡稱做這個不連通網絡的分支。例如圖八中，這個不連通網絡的分支有三個，分別是：三角形 ABC、三角形 DEF 及線段 GH。連通的網絡只有一個分支。

在七橋問題中，我們發現一筆畫的問題和頂點連接的弧數有關，也就是和頂點處的分岔情形有關。我們將以某個頂點爲端點的弧數稱爲這個頂點的叉數，或稱爲該點的自由度，所以每個頂點的自由度不是奇數就是偶數。因此我們稱自由度是奇數的頂點爲奇頂點；自由度是偶數的頂點爲偶頂點。例如在圖七中，每個頂點都是偶頂點；在圖六中，B 是偶頂點，E 是奇頂點。從七橋問題中我們還可以看到，在一個網絡中，奇頂點的數量和這個網絡能否一筆畫有極大的關係。沒有奇頂點的網絡稱爲一個偶網絡，如圖七即爲一偶網絡。

我們所關注的是：具有那些特徵的網絡一定可以一筆畫完成，而具有那些特徵的網絡一定無法一筆畫完成。要證明一個網絡是不是一筆畫，就應該證明在這網絡中全部的弧**不可能**排成一條路徑，或者這個網絡中**不存在**一條路徑包括全部的弧。也就是說，不能只是承認你自己沒能找到這樣的路，還要能斷言別人也不會找到；不但是至今沒人找到過，而且將來任何時候也不會有人找得到。這種不存在性的定理在數學中有很多。有的很容易證，譬如說：不存在三邊長度分別爲 2，3，4 的直角三角形，因爲直角三角形三邊長必須滿足勾股弦定理，而 $2^2+3^2=13\neq 4^2$。也有的很不容易證，譬如說：不能用圓規和直尺三等分一個任意角。因爲不存在性的問題不易被掌握，所以，要證明一個網絡是不是一筆畫，要先掌握住能一筆畫完成的網絡必須有那些特性。以下給出幾個有關一筆畫網絡的定理：

定理一　一筆畫必須是連通的，並且奇頂點的個數是 0 或 2。

這個定理使我們能夠斷定：不連通的，或者奇頂點個數不是 0 或 2 的網絡，一定不是一筆畫。那麼，如果一個網絡是連通的，其奇頂點個數又恰巧是 0 或 2 時，它一定是一筆畫嗎？歐拉給的答案是：是的。

歐拉提出的二個判斷定理：

定理二　若 G 是一個連通的網絡圖，那麼 G 的全部弧可以排成一條封閉的路徑。

定理三　如果一個連通網絡的奇頂點個數是 2，這網絡必定是一筆畫。

定理一告訴我們，一筆畫必須是連通的，而奇頂點的個數是 0 或 2。定理二和定理三告

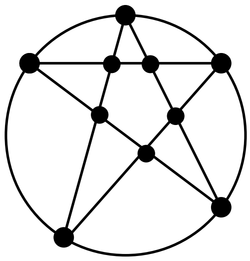
訴我們，從這兩個性質就足以斷定一個網絡是一筆畫。合起來說就是

一筆畫定理　一個網路是一筆畫的充份且必要的條件是：它是連通的且奇頂點的個數等於 0 或 2。

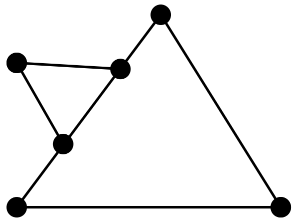
問題：

1. 在下面這些網絡圖中，是否存在一條歐拉路徑。如果有，請找出一條歐拉路徑來。

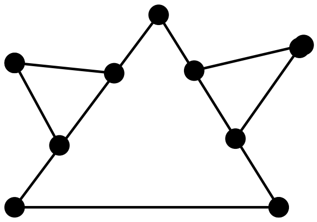
(a)



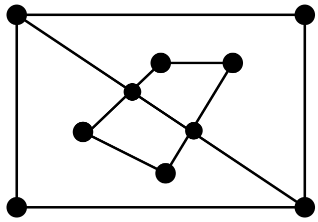
(b)



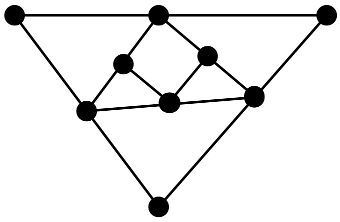
(c)



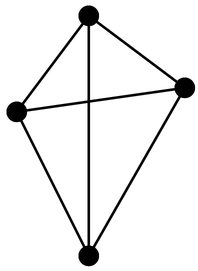
(d)



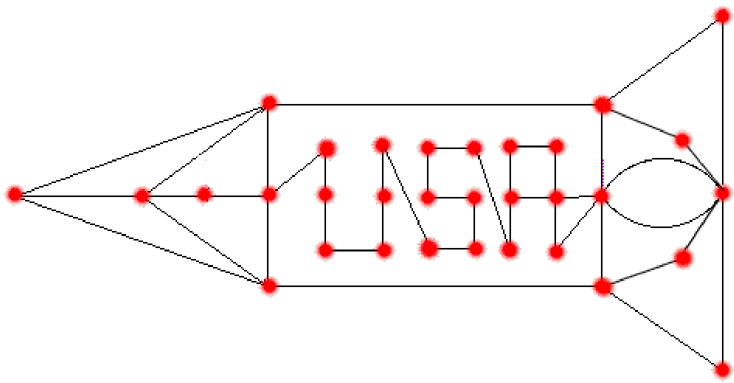
(e)



(f)



2. 在不要求找出歐拉路徑下，您能不能判段下面網絡圖是否可一筆畫完成？



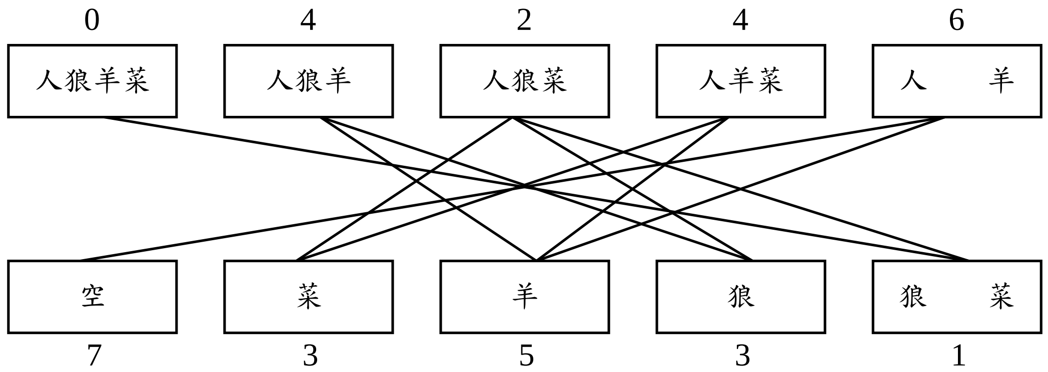
渡河問題

利用圖論的方法，我們可以用來處理「渡河問題」:

河岸上有狼、羊和白菜，擺渡人要將它們送過河去。由於船容量小，每次只能載一樣東西，並且狼和羊，羊和白菜都不能在無人看管的情況下留在一起，否則狼會吃了羊，羊會吃光白菜，問如何安全且地最快地把它們都運過河去？

方法是將不可能的條件去除，將可能的條件一一列出，在這些條件之間尋求一種關係，進而將問題以網絡圖形的形式呈現，再應用圖形理論來解決它。

解 人、狼、羊、菜 4 種的任意組合共計有 $2^4 = 16$ 種，其中狼羊菜、羊菜、狼羊三種不允許出現，所以人、人狼、人菜這三種對應的情形也不會出現。於是，剩下的十種情形爲：人狼羊菜、人狼羊、人狼菜、人羊菜、人羊、狼菜、菜、羊、狼、空。將這十種情形看成是點，只有在兩種狀態可以互相轉變時才在它們之間建立一條邊線。譬如說，人狼菜與菜是可以互相轉變的，菜與人羊菜也是可以互相轉變的，所以可以分別在它們之間建立一條連線。因此，我們可以得到圖九的示意圖。



圖九

問題至此轉化成從圖九中找出從“人狼羊菜”到“空”的最短路徑。將各頂點與“人狼羊菜”這一點的距離標示在圖九頂點處，於是可以知道有二種最迅速而且又安全的運送方案：

(1) 人狼羊菜 **à** 狼菜 **à** 人狼菜 **à** 狼 **à** 人狼羊 **à** 羊 **à** 人羊 **à** 空。

(2) 人狼羊菜 **à** 狼菜 **à** 人狼菜 **à** 菜 **à** 人羊菜 **à** 羊 **à** 人羊 **à** 空。

每種方案都要渡河七次。以第(1)個方案爲例，第一次把羊從**岸邊**送到**對岸**，**岸邊**剩下狼與菜；第二次人空船回**岸邊**，**岸邊**出現人狼菜；第三次把菜送到**對岸**，**岸邊**剩下狼；第四次把羊從**對岸**送回**岸邊**，**岸邊**出現人狼羊；第五次把狼送到**對岸**，**岸邊**剩下羊；第六次人空船回**岸邊**，**岸邊**出現人羊；第七次人羊以起渡河到**對岸**，從而任務完成。

上述解法稱爲“狀態轉移法”，用這種方法還可以解不少有趣的問題，由於解法中使用的距離算法，不僅能給出可行的方案，而且所給出的方案執行起來最節省時間。

中國郵路問題

“一個郵差每次送信，要走遍他負責投遞範圍內的街道，完成任務後回到郵局。問他按怎樣的路線走，所走的路程最短？”

這個實際的問題是每一位郵差每天都要碰到的。在 1959 年，發明了一種最短郵遞路線的數學方法——奇偶點圖上作業法。據說在某地試用這個方法後，郵遞的效率大大提高了。

奇偶點圖上作業法的步驟如下：

(1) 找出投遞範圍的街道圖；

(2) 找出街道圖上的奇頂點；

(3) 添加重複弧把奇頂點對對相連；

(4) 如果一個解有重疊的重複弧，即在某條弧上有多於一條的重複弧，那麼消去重疊的重複弧；

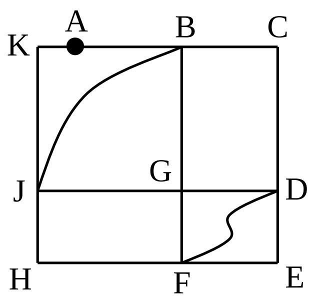
(5) 沒有一個解，沒有重疊的重複弧，它在原網絡的某個圈上的重複弧長度的和超過圈長的一半，那麼可以反覆修改，直到不能在改；

(6) 將所得的有重複弧的網絡一筆畫出。

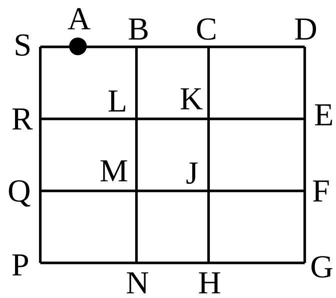
這種方法就是奇偶點圖上作業法。

對於這個實用又有趣的問題，最理想的路線當然是從郵局出發，走遍每條街，而且都只走一次，最後又回到郵局。這種路線如果存在的話，顯然它是最短的。不過，這種理想的路線一定找得到嗎？

以下面圖十及圖十一來說明，假設點 A 是郵局所在的位置，如圖十及圖十一分別呈現兩地區的街道平面圖，從 A 出發要走過每條街道，而且只走過一次，在圖十上是做的到的，例如,AàBàCàDàEàFàGàBàJàGàDàFàHàJàKàA 或 AàBàCàDàFàEàDàGàJàBàGàFàHàJàKàA，等等。但圖十一卻不行。



圖十



圖十一

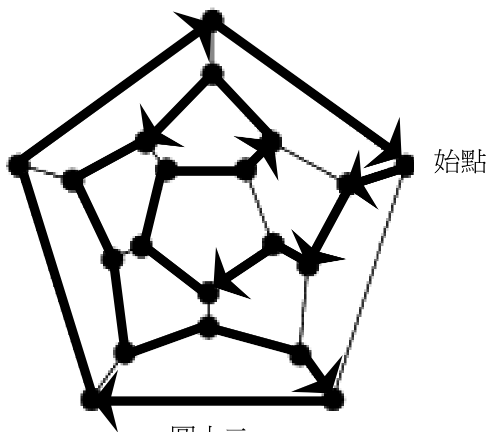
奇偶點圖上作業法雖然提供了可行的方法，但是不夠理想。原因是步驟(5)可能是相當費時，不容易檢驗的一個步驟。像圖十一這類的網絡，圈數可能多達幾百個，檢查起來就不勝其繁了。從這個角度看來，用一筆畫定理來處理中國郵路問題要比用奇偶點圖上作業法容易方便許多。

哈密頓（Hamilton）周遊世界問題：

1857 年，英國數學家哈密頓發明了一種遊戲：在正十二面體的 20 個頂點上分別標記 20 個不同的世界著名城市，要求從某城市出發，沿正十二面體的稜邊行走，每城市恰只經過一次，而且又折返回原出發點。

這問題和七橋問題一樣，都要求一次性走遍，不同在周遊世界問題要求市走遍各頂點，而非路徑，難度上相對較高。將此問題在紙上畫成網絡圖形，就是右邊圖十二的樣子。雖然它看起來不像一個正十二面體，但這對於給出周遊世界問題的解答沒有任何影響，因爲我們所關心的是能否周遊，對於所走的路線是何種形狀，有多遠，都不是我們過問的事。

在圖十二粗線表示一條周遊世界的路徑，每一個城市（頂點）恰好經過一次，而且又回到原出發點。

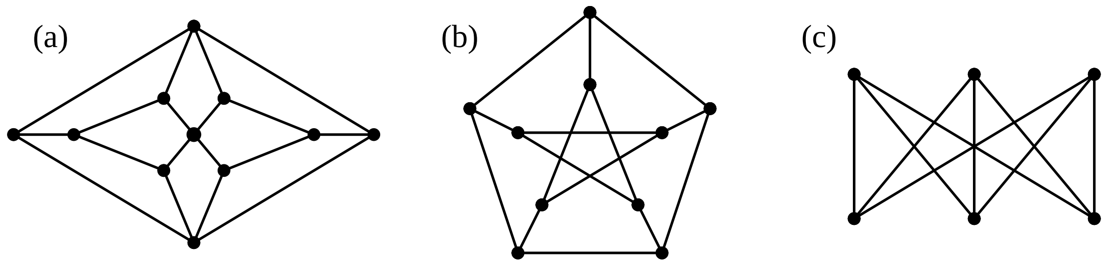


圖十二

當然，滿足題意的這種路線並不是唯一的。您可以試著找出更多的周遊路線。圖十二這個周遊路線的特點是，它是一個圈，而且含有網絡中所有的頂點。這種圈被稱之爲「哈密頓圈」，而含有哈密頓圈的網絡稱爲「哈密頓圖」。所以，正十二面體就是一個哈密頓圖。周遊世界問題屬於走遍各頂點的問題，走遍各頂點的一般化問題則是當今最難判定的問題之一，至今尚無有效方法來解決！

問題：

下圖中的網絡圖，那些是「哈密頓圖」？



貨郎問題：

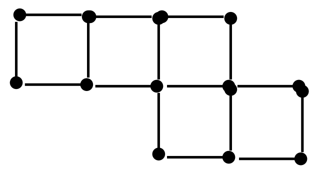
一位貨郎到各村去賣貨，再返回出發地，要求到過每個村，請設計一種路線，使得貨郎走過全程的時間最短。

假設每兩個村子之間都有一條已知長度的路相通，如果把這幾個村子進行全排列（abcd 與 dcba 視爲等同），在以全排列爲序分別求出相應的總路程，在從總路程當中取最小值所對應的那條路線。由於村子的數量是有限的，所以貨郎問題的最優解是存在的，而且從上面敘述來看，似乎是可以找到一種方法求得此解。但是，在實際的運算中，如果有 128 個村子，就算是用巨型的超級電腦來算，有要連續運算 10^{700} 個世紀以上！所以上述的解法是不可取的。

圖論的運用：

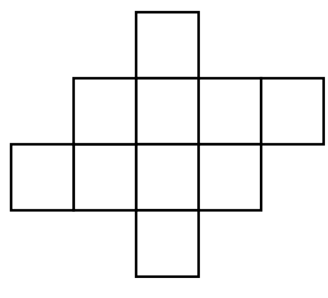
A. 捉烏龜遊戲

甲乙兩人玩“捉烏龜”遊戲，先將 52 張撲克牌藏起一張，於是剩下的有一張沒有“對兒”，它稱爲“烏龜”。再將牌任意分給兩人，每人把手中的“對兒”都抛出來，你能否判斷烏龜在誰手上呢？爲什麼？



B. 火柴遊戲

用 16 根火柴排成右圖的 5 個方格，方格的每邊上有一根火柴，能否移動兩根火柴，使方格數由 5 減至 4？存在有多少種解法呢？（不允許把兩根火柴放在同一邊上）



C. 多明諾骨牌覆蓋棋盤遊戲

能否用多明諾骨牌覆蓋右圖，使得每張骨牌對覆蓋兩個鄰接的方格？

D. 那些小朋友喜歡一起玩

一群小孩，有些很要好，有些則不怎麼合得來，而且甲對乙有好感，乙未必也對甲有好感，怎樣判斷哪些孩子經常成群結伙一起玩，而有無孩子比較孤獨呢？

迷宮

在古典小說《三國演義》中，講到東吳大將陸遜曾爲諸葛亮的“八陣圖”所困。這一段故事寫得非常神奇。據我們想來，“八陣圖”也許是一個相當複雜的迷宮。迷宮屬於建築學中造庭的一支，其中有一類迷宮的結構較爲質樸，途中並無歧路，沿線而行便能直達目的地，不過路徑甚爲曲折，往往遍及全部。如有一種八角形迷宮，即屬此類。這一類迷宮的特點是道路特別曲折。例如有一個康孟山迷宮，直徑不過 18 公尺，而全部道路長達 372 公尺。

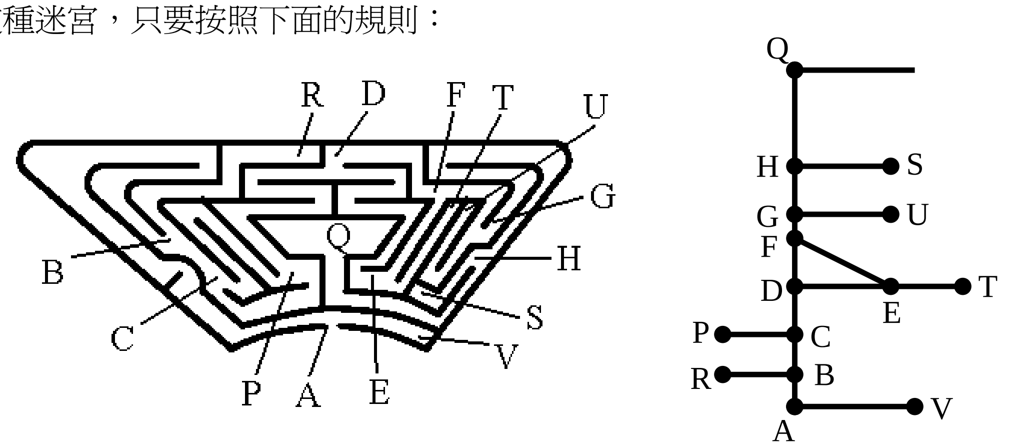
另一類迷宮要複雜的多，它的內部有著許多歧路和死胡同，但它的各部份都互相連通，因此只要採取“手靠牆壁”的方法，用一隻手緊靠牆壁，走到每一條死胡同的盡頭時就轉彎，再到其他一邊。如此行事，我們就一定會遍歷這個迷宮的各部份，而到達一個出口，並且總能到達迷宮的中央。但每一條死胡同都要走過 2 次。

更複雜一點的迷宮是，其中有一個或幾個與其他部份完全分離的部份（如漢普頓庭園的迷宮圖），這時我們如果仍沿用上面的方法，那就將亂轉圈子，永遠不能到達它的中心了。因此我們必須要有另外的、更爲有效的方法。

不管什麼樣的迷宮，只要它們是畫在平面上的，人們總是不難按圖索驥，找到它們的出入道路的。可是一座真實、立體的迷宮，有許多牆壁、籬笆擋在前面，道路的分歧與曲折不能猶如平面般一眼看到，那就會時時碰壁，東拐西穿，弄得一進去就出不來。

下面我們介紹一個一般性的方法。

我們把迷宮碰壁的地方與分岔的地方分別稱爲**絕點**與歧點，例如在圖十三的迷宮，A、B、C、D、E、F、G、H 等八處是歧點，而 P、Q、R、S、T、U、V 等七處是絕點。這裡 A 是進出口，D、E、F 是一條誘人的壞路，如果不小心的話，就會在這條路上來回的兜圈子。要走通過這種迷宮，只要按照下面的規則：



圖十三

1. 走到絕點，立刻退回；
2. 遇到第一次的歧點時，不必退回，可向任何一條新路前進；
3. 遇到第二次的歧點（就是已經碰到過一次）時，可照下列辦法行事：

a. 如果來路只走過一次的，則從原路退回；

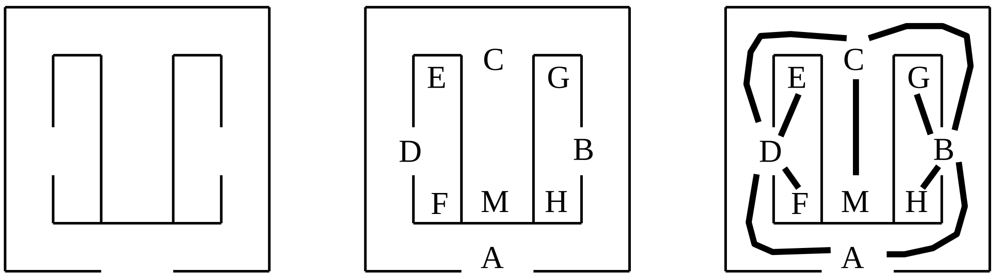
b. 如果來路是走過二次的，則由未曾走過的路前進；

c. 如果來路是走過二次的，並且未曾走過的路又沒有，則可向只走過一次的去路前進。

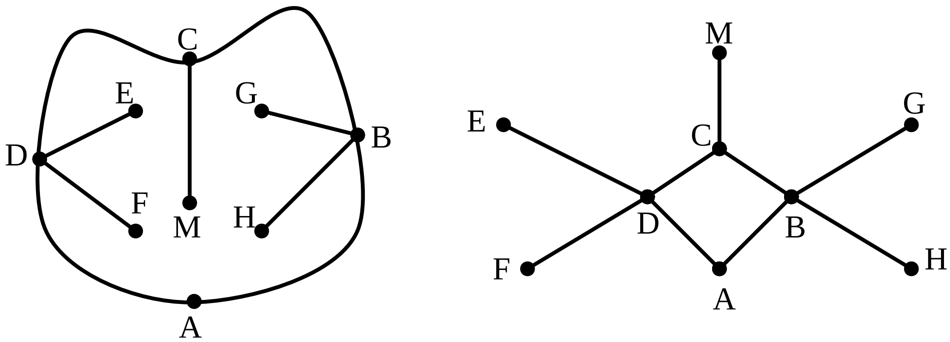
如果我們在歧點與絕點處做上一些記號，以識別那些是首次遇到的“新交”，那些是重複遇上的“舊友”，我們便可順利到達迷宮中心了。

如何把迷宮轉化成網絡圖？

在圖十三中將漢普頓庭園轉化成網絡圖的形式，有助於我們解決迷宮問題。那麼，如何把迷宮轉化持成網絡圖？舉個例來說，設有一個迷宮（圖十四(a)），我們先把各岔路口和絕點標上英文字母（圖十四(b)），再把通道點用邊現連接起來（圖十四(c)），這樣就得到此迷宮的網絡圖了。



(a) (b) (c)



問題：

試將下面迷宮表示成網絡圖形。