

投稿類別：數學類

篇名：神奇的一筆畫之探討

作者：

李俊賢。武陵高中。高二 1 班

指導老師：陳銘欽 老師

壹●前言

從古至今，有許多數學家致力於討論「一筆畫」，也就是如何利用一筆畫將圖片中的要素一次連起來。在此，我們對於一些特定而有規律的一筆畫，發表一些見解以及想法。

一、研究動機

不久前，我們剛複習到高一下數學中「排列組合」這單元，裡面有一種經典題型，也就是運用一筆畫將圖形要素全部連起來，滿腹好奇心的我們決定對其中一種類型作探討，並給出一個適當的結論。

二、研究目的

對於一筆畫做出定義，且針對本論文所探討的類型做一個推廣，添加我們的想法以及觀點，以滿足我們對數學的熱情。

三、研究方法

利用紙、筆，作出構思、猜測，之後再利用數學方法加以證明，給出一個適當的結論。

貳●正文

一、定義一筆畫

其實一筆畫的定義有很多種，為了方便接下來我們所要討論的題型，我們給出一個最適當的定義：「起點任選，只能一筆完成，且不能超出圖形本身，過程中只可以橫向或是縱向移動，不能覆蓋到已行走過的路徑，且終點不需與起點相同」

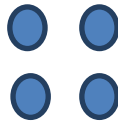
二、定義題型

將 $n \times n$ 個圓形($n \geq 2$)，排列成方陣狀，並拿走任意一個圓形，探討其是否可以用「一筆畫」畫完。若可以，則該圓形稱為「藍色圈」，反之則是「紅色圈」。

三、研究過程

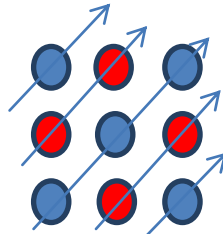
(一)為了方便推廣，我們採先討論 2×2 、 3×3 、 4×4 及 5×5 的情形

1、



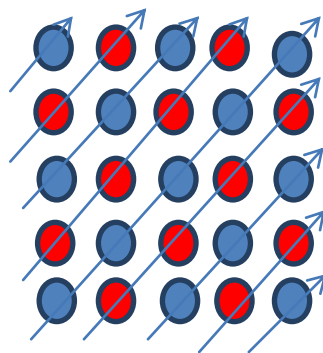
這是一個 2×2 的方陣，顯然，不管我們拿掉左上、左下、右上或是右下的圓圈時，都有辦法已「一筆畫」完成剩下的圖形。

2、



這是一個 3×3 的方陣，先拿掉四個角的圓圈，接下來要利用「一筆畫」畫完並不困難。再來拿掉正中間那顆圓圈也是一樣，很顯然可以用「一筆畫」畫完。不過接下來問題來了，剩下的那四個圓圈(即圖中的紅色圈)卻找不到方法可以利用「一筆畫」完成，而觀察一下紅色圈在圖中的位置可以發現，它貌似位於圖中箭頭中的第偶數個箭頭上(從上往下數，在這裡稱它為「斜排」)，依此可以先做個推測，「當 n 為奇數時，紅色圈會在第偶數個斜排上」

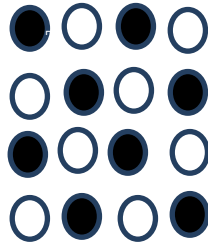
3、



4×4 及 5×5 的以同樣方法，一個一個慢慢試， 5×5 的是在偶數個斜排上，很符合剛剛的推測。則 4×4 的每個都是藍色圈。於是我們可以再推測「當 n 為偶數時，每個圈都是藍色圈」。做到這裡其實已經能看出其大致上的脈絡了，接下來就是要想辦法證明這規律，不過此證明乍看之下不容易，於是我們重新回到題目條件，尋找看看是否有較為簡便又淺顯易懂的證明。

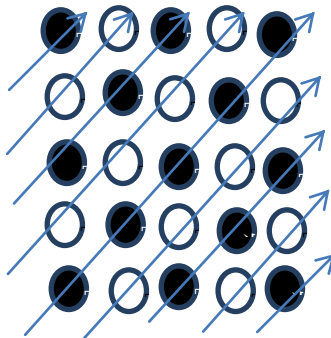
(二)接下來我們要利用「過程中只可以橫向或是縱向移動，不能覆蓋到已行走過的路徑」這句話來導出證明，首先，由上至下，由左至右，的填入黑色和白色的顏料於圓圈中。

1、當 n 為偶數時



明顯的，經過黑白塗色之後，「從任一起點出發後的下一步，必會踏到與起點異色的圓圈。」也就是說，行走的路徑必定為「白→黑→白→黑…」或是「黑→白→黑→白…」又當我們拿掉任一點之後黑和的總個數必會相差一個，在這裡不失一般性的假，設黑的個數比白的個數多一個，如此一來，必可找到型如「黑→白→黑→…→黑」的一條路徑，使一筆畫成立。故得證了「當 n 為偶數時，每個圈都是藍色圈」。也就是當 n 為偶數時，任取一個圓圈後，必可以用「一筆畫」來完成。

2、當 n 為奇數時



這時，若我們取掉的點為「奇數斜排」上的點，則黑色和白色的總個數相等，則由上一部份的方法易知「當 n 為奇數時，取奇數斜排上的圓圈後，必可以用一筆畫完成」。但當取的是「偶數斜排」上的圓圈時，結果就不一樣了，這時黑色的總個數會比白色的總個數多兩個，如此一來可以發現，路徑絕對不可能以「黑→白→黑→白…」或「白→黑→白→黑…」的方式排完，必定至少會有一個黑色多出來，如此一來也就說明了「當 n 為奇數時，紅色圈會在地偶數個斜排上」也就是當 n 為奇數時，若取掉的點在偶數斜排上時，絕對不可能以一筆畫完成，若取掉的點在奇數斜排上時，則必可以用一筆畫完成。

參●結論

(一) 當 n 為奇數時，若取掉的點在偶數斜排上時，絕對不可能以一筆畫成，若取掉的點在奇數斜排上時，則必可以用一筆畫完成。

(二) 當 n 為偶數時，任取掉一個圓圈後，必可以用「一筆畫」來完成。

肆●引註資料

註一、《數學奧林匹克初一分卷》。p.169。單樽著。凡異出版社。

註二、一筆畫問題<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%80%E7%AC%94%E7%94%BB%E9%97%AE%E9%A2%98>

註三、高中基礎分卷I。p.170。張秀平著。北京師範大學出版社。