中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040414
迴圈迷宮探索-一筆劃問題

國立武陵高級中學

作者姓名：
高二 林振倫 高二 林暐勛 高二 許詠晟
高二 戴瑋辰

指導老師：
王埄彬

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學

組　　別：高中組

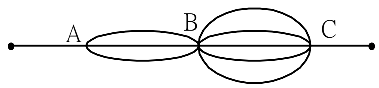
作品名稱：迴圈迷宮的探索—一筆劃問題

關鍵詞：一筆劃、組合數、遞迴

編號：

壹、研究動機

排列組合的題型有千千萬萬種，其中就屬一筆畫問題爲最有趣的了！在學排列組合時，老師曾經提到一筆畫走法數的算法。我們看著這麼多種類的圖形，心中頓時產生了一股強烈的慾望想要去研究它。於是，我們就挑了一些圖形來算看看，有的像〈圖一〉：走法數須討論到各系統間的組合數——來回走法。



〈圖一〉

→ A-B 之間：3!

B-C 之間：5!　　3!．5!．3 = 2160 種走法

組合數：$\frac{3!}{2!\cdot 1!}$

接著，我們便想到如果將圖形改成其他的連接方法又會如何呢？

一開始，我們基於好奇的心態畫畫寫寫的作了一些圖形，沒想到幾個出乎意料的答案竟然引領我們走向更深入的研究。

貳、研究目的

在一筆畫問題中，不外乎是些直線的圖形，面對這些圖形，不禁使我們感到乏味。於是我們便異想天開，將這些圖形的首尾相連，得到了一些新的迴圈圖形，更算出了一些有規律的數字。於是我們決定，一定要把這些規律找出。

參、研究設備及器材

紙無數張、筆四枝、計算機四台、電腦四台、印表機一台。

肆、研究內容

一、組合數

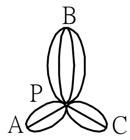
在此，我們先將組合數的定義重新再解釋一次：

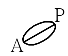
首先，我們有一個走法數已知的母圖形，當它與一個走法數已知的子圖形接在同一個點上時，這個新圖形的走法數會變成：

(母圖形的走法數)×(子圖形的走法數)×(組合數)

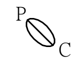
而組合數就是母圖形和子圖形在這個接觸點彼此來回的方法數。

例 1



此圖形可視為由母圖形 

子圖形 

子圖形 

所組成的

(A 為起點)

P 點的組合數：

當我們由 A 點走到 P 點後，分別可繞 PAP 一圈、PBP 兩圈、PCP 一圈，因 PBP 的兩圈均向上繞，為同一方向，故可視為相同物。將此四者作排列後，所得的數即為 P 點的組合數。

→P 點的組合數為 $\frac{4!}{2!}=12$

所以依上述的方法，可知此圖形的走法數為 $12\times 3!\times 4!\times 3!=10368$

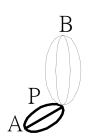
我們可由樹狀圖(見附錄表一)得知這個數值是正確的

二、組合數的另一種算法

在此範例中，我們也可由另一種角度探討組合數。

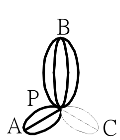
Step1

首先，我們先看母圖形。



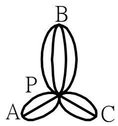
此圖形中，會到達 P 點兩次，由 P 點向上走子圖 PBP 兩圈，可視為「兩相同物分給兩人」的方法，為 $H_2^2=3$ 。

Step2



此圖形中，會到達 P 點四次，由 P 點向右走子圖 PCP 一圈，可視為「一物分給四人」的方法，為 $H_1^4=4$ 。

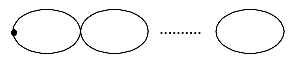
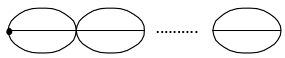
End

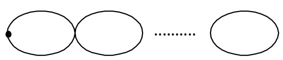


所以此圖的組合數爲 $H_2^2 \cdot H_1^4 = 12$

此法雖然較爲繁瑣，但在某些圖形中則會發揮出乎意料的效果。

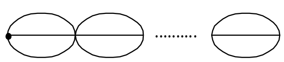
三、直鏈圖形的研究（‧代表該圖形的起點)

了解了組合數的概念後，我們就可以切入正題，算出  和  及其他更多層的直練圖形的通解。

（一） 的通解 (共有 n 個)

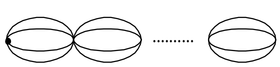
每一個子圖的走法數爲 $2!$
而每接一個子圖的組合數爲 $H_1^1 = 1$

所以總走法數是 $2!\times(2!\times1)^{n-1} = (2!)^n$

（二） 的通解 (共有 n 個)

每一個子圖的走法數爲 $3!$
而每接一個子圖的組合數爲 $H_1^2 = 2$

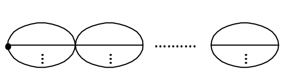
所以總走法數是 $3!\times(3!\times2)^{n-1} = (3!)^n \times 2^{n-1}$

（三） 的通解 (共有 n 個)

每一個子圖的走法數爲 $4!$
而每接一個子圖的組合數爲 $H_2^2 = 3$

所以總走法數是 $4!\times(4!\times3)^{n-1} = (4!)^n \times 3^{n-1}$

（四）推廣：每個子圖有 m 層

 的通解 (共有 n 個)

每一個子圖的走法數爲 $m!$

而每接一個子圖的組合數爲：

Case1 m 爲奇數

新接一個子圖形時，該接點兩邊各有 $\frac{m-1}{2}$ 圈，母圖形是因爲走到接點要用掉一條線，而子圖形則是因爲有一條線無法與其他線配成一圈。

→ 組合數爲 $\dfrac{(m-1)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{m-1}{2}\right)!}$

由 H 來看時，走母圖形會到達接點 $\frac{m+1}{2}$ 次，子圖形有 $\frac{m-1}{2}$ 圈要走，有 $H^{\frac{m+1}{2}}_{\frac{m-1}{2}}$ 種方法。

Case2 m 爲偶數

新接一個子圖形時，母圖形那邊爲了到達接點用掉了一條線之後，會有一條線無法與其他線配成一圈，所以有 $\frac{m-2}{2}$ 圈，子圖形則剛好有 $\frac{m}{2}$ 圈。

→ 組合數爲 $\dfrac{(m-1)!}{\left(\frac{m-2}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$

由 H 來看時，走母圖形會經過接點 $\frac{m}{2}$ 次，子圖形有 $\frac{m}{2}$ 圈要走，有 $H^{\frac{m}{2}}_{\frac{m}{2}}$ 種方法。

綜合 **Case1,2**，得到

$$\text{組合數 K} = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{m-1}{2}\right)!} \quad \vee \quad H^{\frac{m+1}{2}}_{\frac{m-1}{2}} \quad \text{(奇數型)} \\[2ex] \dfrac{(m-1)!}{\left(\frac{m-2}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!} \quad \vee \quad H^{\frac{m}{2}}_{\frac{m}{2}} \quad \text{(偶數型)} \end{cases}$$

(我們發現，這兩種解可用高斯函數來合併。由於高斯函數的值必小於或等於原來了數，所以上下標皆取較大者)

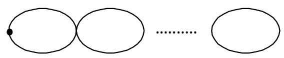
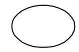
→ 組合數 $K = H^{[\frac{m+1}{2}]}_{[\frac{m}{2}]}$

所以總走法數是 $(m!)^n \cdot K^{n-1} = (m!)^n \cdot \left(H^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)^{n-1}$ (此式中的 [ ] 均表示高斯函數)

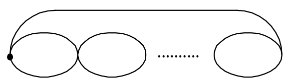
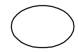
四、鏈的環狀圖形的研究

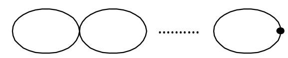
一直算著直鏈的圖形，好像沒什麼意思。那來算算看環狀圖形吧！

(一)兩層的鏈的環狀圈圖形

1.  的通解 (有 $n-1$ 個  形成一直鏈)

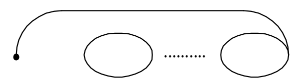
由之前的式子可知，其通解爲 2^{n-1}

2.  的通解 (有 $n-1$ 個  形成一直鏈，並在首尾連 1 線)

Case1 先走那條線—有 1 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= 2^{n-1}$

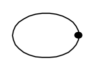
故此 Case 的走法數 $= 2^{n-1}$

Case2 先走鏈，走 i 個環後回頭—有 2^i 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= 2^{n-1-i}$

但 i 可以從 1 到 $n-2$，

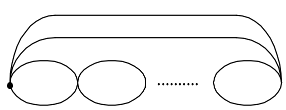
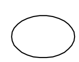
故此 Case 的走法數 $= \sum_{i=1}^{n-2} 2^i \cdot 2^{n-1-i} = (n-2)2^{n-1}$

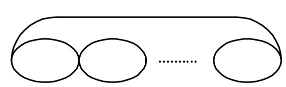
Case3 先走鏈，走至盡頭—有 2^{n-1} 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $=2$

故此 Case 的走法數 $= 2 \cdot 2^{n-1}$

綜合 **Case1,2,3**，可知通解爲 $(n+1)2^{n-1}$

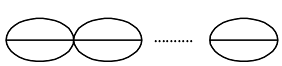
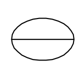
3.  的通解 (相當於 n 個  繞成一環)

任走一步—有 4 種走法，走完以後圖形變成 

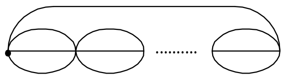
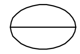
而此圖的走法數 $= (n+1)2^{n-1}$

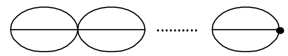
可知通解爲 $4 \cdot (n+1)2^{n-1} = (2n+2)2^n$

(二) 三層的鏈的環狀圖形

1.  的通解 (有 $n-1$ 個  形成一直鏈)

由之前的式子可知，其通解爲 $2^{n-2} \cdot (3!)^{n-1}$

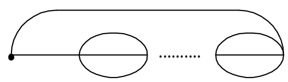
2.  (有 n-1 個  形成一直鏈，並在首尾連上 1 線)

Case1 先走那 1 線—有 1 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖走法數 $= 2^{n-2}\cdot(3!)^{n-1}$

故此 Case 的走法數 $= 2^{n-2}\cdot(3!)^{n-1}$

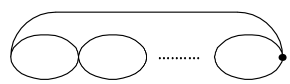
Case2 先走鏈，走 i 個環後，再回頭走 i 個環—有 $3^i\cdot 2^i$ 種走法，走完以後圖形變成



而此圖走法數 $= 2\cdot 2^{n-2-i}\cdot(3!)^{n-1-i} = 2^{n-1-i}\cdot(3!)^{n-1-i}$

但 i 可以從 1 到 $n-2$，

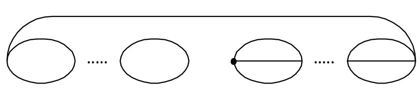
故此 Case 的走法數 $= \sum_{i=1}^{n-2} 3^i\cdot 2^i\cdot 2^{n-1-i}\cdot(3!)^{n-1-i} = (2^{n-1}-2)(3!)^{n-1}$

Case3 先走鏈，走至盡頭—有 3^{n-1} 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖走法數 $= (n+1)2^{n-1}$

故此 Case 的走法數 $= 3^{n-1}\cdot(n+1)2^{n-1} = (n+1)(3!)^{n-1}$

Case4 先走鏈，走 i 個環後，再回頭走 j 個環 $(i>j)$，然後再回頭走那 1 線—有 $3^i\cdot 2^j$ 種走法，

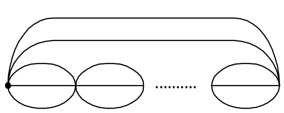
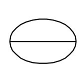
走完以後圖形變成 

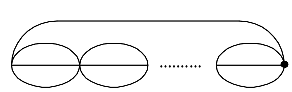
而此圖走法數 $= 2^{n-2-i}\cdot(3!)^{n-1-i}\cdot 2^{i-j} = 2^{n-2-j}\cdot(3!)^{n-1-i}$

但 i 可以從 2 到 $n-2$， j 可以從 1 到 $i-1$

故此 Case 的走法數 $= \sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=1}^{i-1} 3^i\cdot 2^j\cdot 2^{n-2-j}\cdot(3!)^{n-1-i} = (2^{n-2}-n+1)(3!)^{n-1}$

綜合 **Case1,2,3,4**，可知通解爲 $2^n\cdot(3!)^{n-1}$

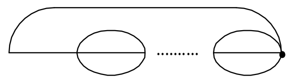
3.  的通解 (有 $n-1$ 個  形成一直鏈，並在首尾連 2 線)

Case1 先走上兩條線中的 1 線—有 2 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= 2^n\cdot(3!)^{n-1}$

故此 Case 的走法數 $= 2^{n+1}\cdot(3!)^{n-1}$

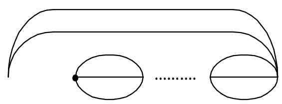
Case2 先走鏈，走 i 個環後，再回頭走 i 個環，然後再走上兩條線中的 1 線—有 $3^i\cdot 2^i\cdot 2$ 種走法，

走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= (3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-i}$

但 i 可以從 1 到 $n-2$，

故此 Case 的走法數 $= \sum_{i=1}^{n-2} 3^i\cdot 2^i\cdot 2\cdot(3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-i} = (2^{n+1}-8)(3!)^{n-1}$

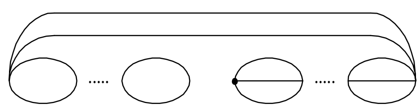
Case3 先走鏈，走 i 個環後，再回頭走 i 個環，然後再回頭走那 1 線—有 $3^i\cdot 2^i$ 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= (3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-2-i}\cdot \mathrm{H}_1^2\cdot 2 = (3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-i}$

但 i 可以從 1 到 $n-2$，

故此 Case 的走法數 $= \sum_{i=1}^{n-2} 3^i\cdot 2^i\cdot(3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-i} = (2^n-4)(3!)^{n-1}$

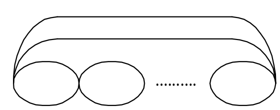
Case4 先走鏈，走 i 個環後，再回頭走 j 個環 $(i>j)$，然後再回頭走那 1 線—有 $3^i\cdot 2^j$ 種走法，

走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= (3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-2-i}\cdot \mathrm{H}_1^2\cdot 2^{1+i-j} = (3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-j}$

但 i 可以從 2 到 $n-2$， j 可以從 1 到 $i-1$

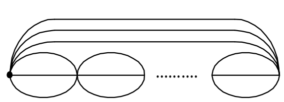
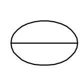
故此 Case 的走法數 $= \sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=1}^{i-1} 3^i\cdot 2^j\cdot(3!)^{n-1-i}\cdot 2^{n-j} = (2^n-4n+4)(3!)^{n-1}$

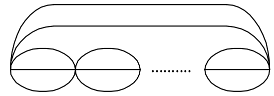
Case5 先走鏈，走至盡頭—有 3^{n-1} 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= (2n+2)2^n$

故此 Case 的走法數 $= (4n+4)(3!)^{n-1}$

綜合 **Case1,2,3,4,5**，可知通解爲 $(6\cdot 2^n-4)(3!)^{n-1}$

4.  的通解（相當於 n 個  繞成一環）

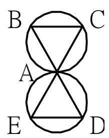
任走一步—有 6 種走法，走完以後圖形變成 

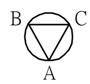
而此圖的走法數 = $\left(6\cdot 2^{n}-4\right)(3!)^{n-1}$

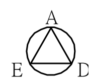
可知通解為 $6\cdot\left(6\cdot 2^{n}-4\right)(3!)^{n-1}$ = $\left(6\cdot 2^{n}-4\right)(3!)^{n}$

(四層以上的鏈的環狀圖形，推算過程需要討論很多種 Case，相當繁雜，因此我們算至三層的鏈的環狀圖形)

例 2：



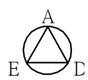
此圖形可視為由母圖形 

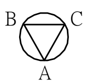
子圖形 

所組成的

(A 為起點)

A 點的組合數：

當只看圖形下半部 

時，會抵達 A 點三次(包括起點與終點)。而向上走的部分 

，在計算其走法數時，已將 A→B 及 A→C 的方向考慮進去，所以在計算組合數的時候，不能將其視為兩個方向，應為向上(一個方向)繞兩圈，否則會多算到重複的走法！

→A 點的組合數為 H_2^3

所以此圖形的走法數為：

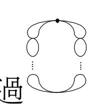
$$H_2^3\times\left(8\times 2^3\right)\times\left(8\times 2^3\right)=24576$$

(母圖與子圖各自為兩層三段的迴圈。故可將 $n=3$ 代入 $(2n+2)\times 2^n$ 的式子，得到 8×2^3)

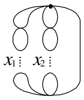
我們可由樹狀圖(見附錄表二)得知這個數值是正確的

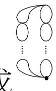
由此可知，凡是兩圖形相接於一點，均可運用組合數的概念。

五、兩層鏈的環狀迴圈圖形的延伸

先前我們已探討過  的圖形，但若從中再連接幾條鏈狀圖形，又會變的怎樣呢？

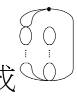
(一)支鏈較少的通解

1.  的通解（x_1, x_2 表其鏈  中的圓環個數)

Case1 先走那條線—有 1 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= [2(x_1 + x_2) + 2] \cdot 2^{x_1 + x_2}$

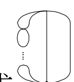
故此 Case 的走法數 $= [2(x_1 + x_2) + 2] \cdot 2^{x_1 + x_2}$

Case2-1 先走有 x_2 個環的路，走 i 個環後回頭—有 2^i 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= (x_1 + 2) \cdot 2^{x_1} \cdot 2^{x_2 - i} \cdot \mathrm{H}_1^2$

但 i 可以從 1 到 $x_2 - 1$，

所以此方法的走法數 $= \sum_{i=1}^{x_2 - 1} 2^i \cdot (x_1 + 2) \cdot 2^{x_1} \cdot 2^{x_2 - i} \cdot \mathrm{H}_1^2 = 2(x_1 + 2)(x_2 - 1) \cdot 2^{x_1 + x_2}$

Case2-2 先走有 x_2 個環的路，走至盡頭—有 2^{x_2} 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= [2(\mathrm{x}_1 + 1) + 2] \cdot 2^{x_1 + 1}$

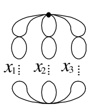
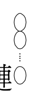
所以此方法的走法數 $= 2^{x_2} \cdot [2(\mathrm{x}_1 + 1) + 2] \cdot 2^{x_1 + 1} = 4(x_1 + 2) \cdot 2^{x_1 + x_2}$

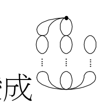
故此Case的走法數 $= 2(x_1 + 2)(x_2 - 1) \cdot 2^{x_1 + x_2} + 4(x_1 + 2) \cdot 2^{x_1 + x_2} = 2(x_1 + 2)(x_2 + 1) \cdot 2^{x_1 + x_2}$

Case3 先走有 x_1 個環的路

同 Case2，可得此 Case 的走法數 $= 2(x_1 + 1)(x_2 + 2) \cdot 2^{x_1 + x_2}$

綜合 **Case1,2,3**，可知通解為 $[4x_1x_2 + 8(x_1 + x_2) + 10] \cdot 2^{x_1 + x_2}$

2.  的通解（x_1, x_2, x_3 表其鏈  中的圓環個數)

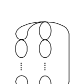
Case1-1 先走有 x_3 個環的路，走 i 個環後回頭—有 2^i 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= [2(x_1 + x_2) + 2] \cdot 2^{x_1 + x_2} \cdot 2^{x_3 - i} \cdot \mathrm{H}_1^2$

但 i 可以從 1 到 $x_3 - 1$，

所以此方法的走法數 $= \sum_{i=1}^{x_3 - 1} 2^i \cdot [2(x_1 + x_2) + 2] \cdot 2^{x_1 + x_2} \cdot 2^{x_3 - i} \cdot \mathrm{H}_1^2$

$= 4(x_1 + x_2 + 1)(x_3 - 1) \cdot 2^{x_1 + x_2 + x_3} = [4(x_1x_3 + x_2x_3) + 4(-x_1 - x_2 + x_3) - 4] \cdot 2^{x_1 + x_2 + x_3}$

Case1-2 先走有 x_3 個環的路，走至盡頭—有 2^{x_3} 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $= [4x_1x_2+8(x_1+x_2)+10]\cdot 2^{x_1+x_2}$

所以此方法的走法數= $[4x_1x_2+8(x_1+x_2)+10]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

故此 Case 的走法數

$= [4(x_1x_3+x_2x_3)+4(-x_1-x_2+x_3)-4]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}+[4x_1x_2+8(x_1+x_2)+10]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

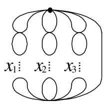
$= [4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+4(x_1+x_2+x_3)+6]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

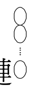
Case2,3 先走有 x_1, x_2 個環的路

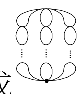
同 Case1，可得 Case2 的走法數 $= [4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+4(x_1+x_2+x_3)+6]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

Case3 的走法數 $= [4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+4(x_1+x_2+x_3)+6]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

綜合 **Case1,2,3**，可知通解為 $[12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

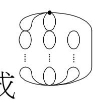
3. 

的通解（x_1, x_2, x_3 表其鏈中的圓環個數)

Case1 先走那條線—有 1 種走法，走完以後圖形變成

而此圖的走法數 $= [12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

故此 Case 的走法數 $= [12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

Case2-1 先走有 x_3 個環的路，走 i 個環後回頭—有 2^i 種走法，走完以後圖形變成

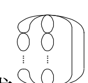
而此圖的走法數 $= [4x_1x_2+8(x_1+x_2)+10]\cdot 2^{x_1+x_2}\cdot 2^{x_3-i}\cdot \mathrm{H}_1^3$

但 i 可以從 1 到 x_3-1，

所以此方法的走法數 $= \sum_{i=1}^{x_3-1} 2^i\cdot[4x_1x_2+8(x_1+x_2)+10]\cdot 2^{x_1+x_2}\cdot 2^{x_3-i}\cdot \mathrm{H}_1^3$

$= 3(x_3-1)[4x_1x_2+8(x_1+x_2)+10]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

$= (12x_1x_2x_3-12x_1x_2+24x_1x_3+24x_2x_3-24x_1-24x_2+30x_3-30)\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

Case2-2 先走有 x_3 個環的路，走至盡頭—有 2^{x_3} 種走法，走完以後圖形變成

而此圖的走法數 $= [12(x_1x_2+x_1+x_2)+12(x_1+x_2+1)+18]\cdot 2^{x_1+x_2+1}$

所以此方法的走法數 $= 2^{x_3}\cdot[12(x_1x_2+x_1+x_2)+12(x_1+x_2+1)+18]\cdot 2^{x_1+x_2+1}$

$= [24x_1x_2+48(x_1+x_2)+60]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

故此 Case 的走法數

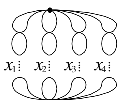
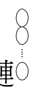
$= (12x_1x_2x_3+12x_1x_2+24x_1x_3+24x_2x_3+24x_1+24x_2+30x_3+30)\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

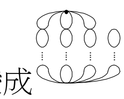
Case3,4 先走有 x_1, x_2 個環的路

同 Case2 可得類似的式子，為了方便計算，我們列表處理，如下：

	$x_1x_2x_3$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1	x_2	x_3	常數
Case1	0	12	12	12	12	12	12	18
Case2	12	12	24	24	24	24	30	30
Case3	12	24	24	12	30	24	24	30
Case4	12	24	12	24	24	30	24	30
Total	36	72	72	72	90	90	90	108

綜合 **Case1,2,3,4**，可知通解為 $\left[36x_1x_2x_3+72(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+90(x_1+x_2+x_3)+108\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

4.  的通解（x_1,x_2,x_3,x_4 表其鏈  中的圓環個數)

Case1-1 先走有 x_4 個環的路，走 i 個環後回頭—有 2^i 種走法，走完以後圖形變成 

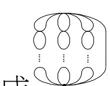
而此圖的走法數 $=\left[12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}\cdot 2^{x_4-i}\cdot \mathrm{H}_1^3$

但 i 可以從 1 到 x_4-1，

所以此方法的走法數

$$=\sum_{i=1}^{x_4-1}2^i\cdot\left[12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}\cdot 2^{x_4-i}\cdot \mathrm{H}_1^3$$

$$=3(x_4-1)\left[12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3+x_4}$$

Case1-2 先走有 x_4 個環的路，走至盡頭—有 2^{x_4} 種走法，走完以後圖形變成 

而此圖的走法數 $=\left[36x_1x_2x_3+72(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+90(x_1+x_2+x_3)+108\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

所以此方法的走法數

$$=\left[36x_1x_2x_3+72(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+90(x_1+x_2+x_3)+108\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3+x_4}$$

Case1 的走法如下表：

	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4
Case1-1	0	36	36	36	-36	-36	36	-36	36	36
Case1-2	36	0	0	0	72	72	0	72	0	0
Total	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36

	x_1	x_2	x_3	x_4	常數
Case1-1	-36	-36	-36	54	-54
Case1-2	90	90	90	0	108
Total	54	54	54	54	54

由此表可知先走有 x_4 個環的路的方法數。

Case2,3,4 先走有 x_1, x_2, x_3 個環的路

可用輪換的觀念，求出先走有 x_1, x_2, x_3 個環的路的方法數。

又因此式爲對稱式(同次方的係數相同)，故輪換之後係數仍相同。

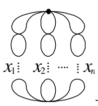
綜合 **Case1,2,3,4**，可知通解爲

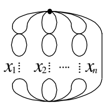
$$\left[144\left(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4\right) + 144\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) + 216\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) + 216\right] \cdot 2^{x_1+x_2+x_3+x_4}$$

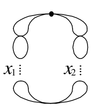
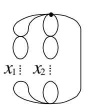
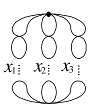
5.結論

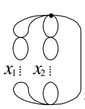
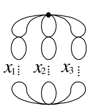
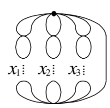
由以上的推導過程,我們發現了一些事情：

(1)每個通解都是對稱式

(2)  一類的圖形，最高次是 n-1 次；

而  一類的圖形,最高次是 n 次

(3)用  和  的公式才可推出  的公式

用  和  的公式才可推出  的公式

6.過程的簡化

由以上結論，我們認爲可以導出其遞迴關係，不過計算過程稍嫌繁雜，因此我們定義了下列的式子：

$\mathrm{A}_{3,0} = 1$

$\mathrm{A}_{3,1} = x_1 + x_2 + x_3$

$\mathrm{A}_{3,2} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$\mathrm{A}_{3,3} = x_1x_2x_3$

$\mathrm{A}_{4,0} = 1$

$\mathrm{A}_{4,1} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$\mathrm{A}_{4,2} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$\mathrm{A}_{4,3} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

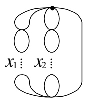
$\mathrm{A}_{4,4} = x_1x_2x_3x_4$

寫成通式即爲：

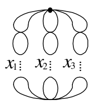
$$\mathrm{A}_{n,k} = \sum_{a_1=1}^{n-k+1} \sum_{a_2=a_1+1}^{n-k+2} \cdots\cdots \sum_{a_k=a_{k-1}+1}^{n} x_{a_1} x_{a_2} \cdots\cdots x_{a_k} \qquad n, k \in \mathbf{N}$$

$$\mathrm{A}_{n,0} = 1 \qquad n \in \mathbf{N}$$

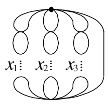
則前述的通解便可簡化爲：



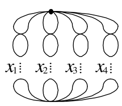
：$\left(4\mathrm{A}_{2,2}+8\mathrm{A}_{2,1}+10\mathrm{A}_{2,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{2,1}}$



：$\left(12\mathrm{A}_{3,2}+12\mathrm{A}_{3,1}+18\mathrm{A}_{3,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{3,1}}$



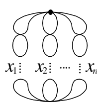
：$\left(36\mathrm{A}_{3,3}+72\mathrm{A}_{3,2}+90\mathrm{A}_{3,1}+108\mathrm{A}_{3,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{3,1}}$



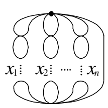
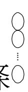
：$\left(144\mathrm{A}_{4,3}+144\mathrm{A}_{4,2}+216\mathrm{A}_{4,1}+216\mathrm{A}_{4,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{4,1}}$

(二)推廣

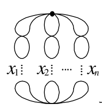
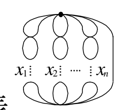
1.第一遞迴式

 (有 n 條，其中的圓環個數分別為 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$)

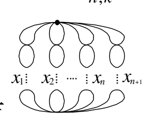
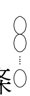
令其走法 $=\left(\alpha_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+\alpha_{n,n-2}\mathrm{A}_{n,n-2}+\ldots+\alpha_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

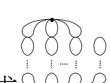
 (有 n 條，其中的圓環個數分別為 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ，和 1 條線)

令其走法 $=\left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n}+\beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+\ldots+\beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

$\alpha_{n,k}$ 表一類圖形 $\mathrm{A}_{n,k}$ 的係數，而 $\beta_{n,k}$ 表一類圖形 $\mathrm{A}_{n,k}$ 的係數

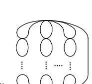
假設已知 $\alpha_{n,k}$ 及 $\beta_{n,k}$

欲求 (有 n+1 條，其中的圓環個數分別為 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n+1}$)的通解。

Case1-1 先走有 x_{n+1} 個環的路，走 i 個環後回頭—有 2^i 種走法，走完以後圖形變成

所以此方法的走法數 $=\sum_{i=1}^{x_{n+1}-1} 2^i \cdot n \cdot 2^{x_{n+1}-i}\cdot\left(\alpha_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+\alpha_{n,n-2}\mathrm{A}_{n,n-2}+\ldots+\alpha_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

$=n\left(x_{n+1}-1\right)\left(\alpha_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+\alpha_{n,n-2}\mathrm{A}_{n,n-2}+\ldots+\alpha_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$

Case1-2 先走有 x_{n+1} 個環的路，走至盡頭—有 $2^{x_{n+1}}$ 種走法，走完以後圖形變成

所以此方法的走法數 $= 2^{x_{n+1}} \cdot \left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n} + \beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1} + \ldots + \beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right) \cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$
$= \left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n} + \beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1} + \ldots + \beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right) \cdot 2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$

由 Case1 可知先走有 x_{n+1} 個環的路的方法數。

由輪換的觀念，亦可得到先走有 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ 個環的路的方法數。
同樣的，我們列表處理：

$\mathrm{A}_{n+1,n}$ 的係數 $\alpha_{n+1,n}$ ：

	$x_1x_2\cdots x_n$	$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_{n+1}$	…	$x_2x_3\cdots x_{n+1}$
走 x_{n+1}	$\beta_{n,n}$	$n\alpha_{n,n-1}$	…	$n\alpha_{n,n-1}$
走 x_n	$n\alpha_{n,n-1}$	$\beta_{n,n}$	…	$n\alpha_{n,n-1}$
…	…	…	…	…
走 x_1	$n\alpha_{n,n-1}$	$n\alpha_{n,n-1}$	…	$\beta_{n,n}$

觀察每一行有幾個 $n\alpha_{n,n-1}, \beta_{n,n}$ 便可知 $\mathrm{A}_{n+1,n}$ 的係數爲何：

走 x_{n+1}(第一列)時，$\mathrm{A}_{n+1,n}$ 內含有 x_{n+1} 的項的係數都是 $n\alpha_{n,n-1}$，而不含 x_{n+1} 的項的係數爲 $\beta_{n,n}$。因爲 $\mathrm{A}_{n+1,n}$ 中的每一項都是 n 次式，所以由表可知，$\mathrm{A}_{n+1,n}$ 中的每一項的係數均爲 n 個 $n\alpha_{n,n-1}$ 加上 1 個 $\beta_{n,n}$，所以係數 $\alpha_{n+1,n} = n^2\alpha_{n,n-1} + \beta_{n,n}$

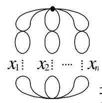
$\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 的係數 $\alpha_{n+1,n-1}$ ：

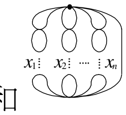
	$x_1x_2\cdots x_{n-1}$	$x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n$	…	$x_3x_4\cdots x_{n+1}$
走 x_{n+1}	$\beta_{n,n-1} - n\alpha_{n,n-1}$	$\beta_{n,n-1} - n\alpha_{n,n-1}$	…	$n\alpha_{n,n-2}$
走 x_n	$\beta_{n,n-1} - n\alpha_{n,n-1}$	$n\alpha_{n,n-2}$	…	$n\alpha_{n,n-2}$
…	…	…	…	…
走 x_1	$n\alpha_{n,n-2}$	$n\alpha_{n,n-2}$	…	$\beta_{n,n-1} - n\alpha_{n,n-1}$

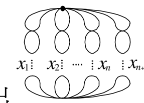
走 x_{n+1}(第一列)時，$\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 內含有 x_{n+1} 的項的係數都是 $n\alpha_{n,n-2}$，而不含 x_{n+1} 的項的係數爲 $\beta_{n,n-1} - n\alpha_{n,n-1}$。因爲 $\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 中的每一項都是 n-1 次式，所以由表可知，$\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 中的每一項的係數均爲 n-1 個 $n\alpha_{n,n-2}$ 加上 2 個 $\beta_{n,n-1} - n\alpha_{n,n-1}$，
所以係數 $\alpha_{n+1,n-1} = (n-1)n\alpha_{n,n-2} - 2n\alpha_{n,n-1} + 2\beta_{n,n-1}$。
$\mathrm{A}_{n+1,k}$ 的係數 $\alpha_{n+1,k}$ ：

因爲 $\mathrm{A}_{n+1,k}$ 中的每一項都是 k 次式，所以由相同的方法可得知，$\mathrm{A}_{n+1,k}$ 中的每一項的係數均爲 k 個 $n\alpha_{n,k-1}$ 加上 n-k+1 個 $\beta_{n,k} - n\alpha_{n,k}$，

故係數$\alpha_{n+1,k}=kn\alpha_{n,k-1}-(n-k+1)n\alpha_{n,k}+(n-k+1)\beta_{n,k}$。

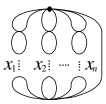
上式即為第一遞迴式(由

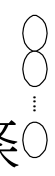
和

的係數，推出

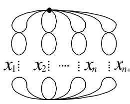
的係數)。

2.第二遞迴式



(有 n 條，其中的圓環個數分別為$x_1,x_2,......x_n$，和 1 條線)

同上，令其走法 $=\left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n}+\beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+...+\beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

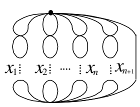


(有 n+1 條，其中的圓環個數分別為$x_1,x_2,......x_{n+1}$)

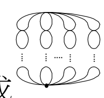
令其走法 $=\left(\alpha_{n+1,n}\mathrm{A}_{n+1,n}+\alpha_{n+1,n-1}\mathrm{A}_{n+1,n-1}+...+\alpha_{n+1,0}\mathrm{A}_{n+1,0}\right)2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$

(第一遞迴中已算出其係數$\alpha_{n+1,k}=kn\alpha_{n,k-1}-(n-k+1)n\alpha_{n,k}+(n-k+1)\beta_{n,k}$)

假設已知$\beta_{n,k}$及$\alpha_{n+1,k}$

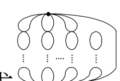
欲求

(有 n+1 條，其中的圓環個數分別為$x_1,x_2,......x_{n+1}$，和 1 條線)的通解。

Case1 先走那條線—有 1 種走法，走完以後圖形變成

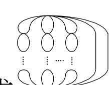
而此圖的走法數 $=\left(\alpha_{n+1,n}\mathrm{A}_{n+1,n}+\alpha_{n+1,n-1}\mathrm{A}_{n+1,n-1}+...+\alpha_{n+1,0}\mathrm{A}_{n+1,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$

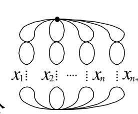
故此 Case 的走法數 $=\left(\alpha_{n+1,n}\mathrm{A}_{n+1,n}+\alpha_{n+1,n-1}\mathrm{A}_{n+1,n-1}+...+\alpha_{n+1,0}\mathrm{A}_{n+1,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$

Case2-1 先走有x_{n+1}個環的路，走i個環後回頭—有2^i種走法，走完以後圖形變成

所以此方法的走法數 $=\sum_{i=1}^{x_{n+1}-1}2^i\cdot(n+1)\cdot 2^{x_{n+1}-i}\cdot\left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n}+\beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+...+\beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

$=(n+1)(x_{n+1}-1)\left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n}+\beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+...+\beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$

Case2-2 先走有x_{n+1}個環的路，走至盡頭—有$2^{x_{n+1}}$種走法，走完以後圖形變成

(此圖相當於

，而將 1 代入x_{n+1}罷了)

所以此方法的走法數 $=\left(\alpha_{n+1,n}\mathrm{A}_{n+1,n}+\alpha_{n+1,n-1}\mathrm{A}_{n+1,n-1}+...+\alpha_{n+1,0}\mathrm{A}_{n+1,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n+1,1}}$，

而將 1 代入x_{n+1}。

但代入後會破壞原有的對稱性，故須慢慢展開研究：

$A_{n+1,n}$ 展開後共有 C_n^{n+1} 項，而其中含 x_{n+1} 的項有 C_{n-1}^n 個，而不含 x_{n+1} 的項有 C_n^n 個。
在含 x_{n+1} 的 C_{n-1}^n 個項中，將 1 代入 x_{n+1} 後，總和爲 $A_{n,n-1}$ 。
不含 x_{n+1} 的 C_n^n 個項，總和爲 $A_{n,n}$ 。
$\therefore$將 1 代入 x_{n+1} 後，可使 $A_{n+1,n} = A_{n,n-1} + A_{n,n}$

$A_{n+1,n-1}$ 展開後共有 C_{n-1}^{n+1} 項，而其中含 x_{n+1} 的項有 C_{n-2}^n 個，而不含 x_{n+1} 的項有 C_{n-1}^n 個。
在含 x_{n+1} 的 C_{n-2}^n 個項中，將 1 代入 x_{n+1} 後，總和爲 $A_{n,n-2}$ 。
不含 x_{n+1} 的 C_{n-1}^n 個項，總和爲 $A_{n,n-1}$ 。
$\therefore$將 1 代入 x_{n+1} 後，可使 $A_{n+1,n-1} = A_{n,n-2} + A_{n,n-1}$

$A_{n+1,k}$ 展開後共有 C_k^{n+1} 項，而其中含 x_{n+1} 的項有 C_{k-1}^n 個，而不含 x_{n+1} 的項有 C_k^n 個。
在含 x_{n+1} 的 C_{k-1}^n 個項中，將 1 代入 x_{n+1} 後，總和爲 $A_{n,k-1}$ 。
不含 x_{n+1} 的 C_k^n 個項，總和爲 $A_{n,k}$
$\therefore$將 1 代入 x_{n+1} 後，可使 $A_{n+1,k} = A_{n,k-1} + A_{n,k}$

故此 Case 的走法數

$$= 2^{x_{n+1}} \cdot \left[\alpha_{n+1,n}\left(A_{n,n-1} + A_{n,n}\right) + \alpha_{n+1,n-1}\left(A_{n,n-2} + A_{n,n-1}\right) + \ldots + \alpha_{n+1,0}\left(A_{n,0}\right)\right] \cdot 2^{A_{n,0}+A_{n,1}}$$

$$= 2\left[\alpha_{n+1,n}A_{n,n} + \left(\alpha_{n+1,n} + \alpha_{n+1,n-1}\right)A_{n,n-1} + \ldots + \left(\alpha_{n+1,1} + \alpha_{n+1,0}\right)A_{n,0}\right] \cdot 2^{A_{n+1,1}}$$

由 Case2 可知先走有 x_{n+1} 個環的路的方法數。

由輪換的觀念，亦可得到先走有 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ 個環的路的方法數。

同樣的，我們列表處理：

$A_{n+1,n+1}$ 的係數：

	$x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$
走 x_{n+1}	$(n+1)\beta_{n,n}$
走 x_n	$(n+1)\beta_{n,n}$
…	…
走 x_1	$(n+1)\beta_{n,n}$

由表可知，$A_{n+1,n+1}$ 的係數爲 $n+1$ 個 $(n+1)\beta_{n,n}$ ，
所以係數爲 $(n+1)^2\beta_{n,n}$

$A_{n+1,n}$ 的係數：

	$x_1 x_2 \cdots x_n$	$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_{n+1}$	…	$x_2 x_3 \cdots x_{n+1}$
走 x_{n+1}	$2\alpha_{n+1,n} - (n+1)\beta_{n,n}$	$(n+1)\beta_{n,n-1}$	$\cdots$	$(n+1)\beta_{n,n-1}$
走 x_n	$(n+1)\beta_{n,n-1}$	$2\alpha_{n+1,n} - (n+1)\beta_{n,n}$	$\cdots$	$(n+1)\beta_{n,n-1}$
…	…	…	…	…
走 x_1	$(n+1)\beta_{n,n-1}$	$(n+1)\beta_{n,n-1}$	$\cdots$	$2\alpha_{n+1,n} - (n+1)\beta_{n,n}$

走 x_{n+1} (第一列)時，$\mathrm{A}_{n+1,n}$ 內含有 x_{n+1} 的項的係數都是 $(n+1)\beta_{n,n-1}$，而不含 x_{n+1} 的項的係數為 $2\alpha_{n+1,n}-(n+1)\beta_{n,n}$。因為 $\mathrm{A}_{n+1,n}$ 中的每一項都是 n 次式，所以由表可知，$\mathrm{A}_{n+1,n}$ 中的每一項的係數均為 n 個 $(n+1)\beta_{n,n-1}$ 加上 1 個 $2\alpha_{n+1,n}-(n+1)\beta_{n,n}$ ，
所以係數為 $n(n+1)\beta_{n,n-1}-(n+1)\beta_{n,n}+2\alpha_{n+1,n}$ 。

$\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 的係數：

	$x_1x_2\cdots x_{n-1}$	$x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n$	…	$x_3x_4\cdots x_{n+1}$
走 x_{n+1}	$2\alpha_{n+1,n}+2\alpha_{n+1,n-1}$ $-(n+1)\beta_{n,n-1}$	$2\alpha_{n+1,n}+2\alpha_{n+1,n-1}$ $-(n+1)\beta_{n,n-1}$	…	$(n+1)\beta_{n,n-2}$
走 x_n	$2\alpha_{n+1,n}+2\alpha_{n+1,n-1}$ $-(n+1)\beta_{n,n-1}$	$(n+1)\beta_{n,n-2}$	…	$(n+1)\beta_{n,n-2}$
…	…	…	…	…
走 x_1	$(n+1)\beta_{n,n-2}$	$(n+1)\beta_{n,n-2}$	…	$2\alpha_{n+1,n}+2\alpha_{n+1,n-1}$ $-(n+1)\beta_{n,n-1}$

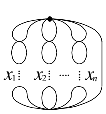
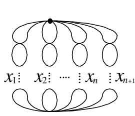
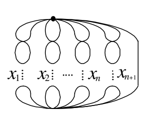
走 x_{n+1} (第一列)時， $\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 內含有 x_{n+1} 的項的係數都是 $(n+1)\beta_{n,n-2}$ ，而不含 x_{n+1} 的項的係數為 $2\alpha_{n+1,n}+2\alpha_{n+1,n-1}-(n+1)\beta_{n,n-1}$。因為 $\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 中的每一項都是 n-1 次式，所以由表可知，$\mathrm{A}_{n+1,n-1}$ 中的每一項的係數均為 n-1 個 $(n+1)\beta_{n,n-2}$ 加上 2 個 $2\alpha_{n+1,n}+2\alpha_{n+1,n-1}-(n+1)\beta_{n,n-1}$ ，
所以係數為 $(n-1)(n+1)\beta_{n,n-2}-2(n+1)\beta_{n,n-1}+4\alpha_{n+1,n}+4\alpha_{n+1,n-1}$

$\mathrm{A}_{n+1,k}$ 的係數：

因為 $\mathrm{A}_{n+1,k}$ 中的每一項都是 k 次式，所以由相同的方法可得知， $\mathrm{A}_{n+1,k}$ 中的每一項的係數均為 k 個 $(n+1)\beta_{n,k-1}$ 加上 n-k+1 個 $2\alpha_{n+1,k+1}+2\alpha_{n+1,k}-(n+1)\beta_{n,k}$ ，
故係數為 $k(n+1)\beta_{n,k-1}-(n-k+1)(n+1)\beta_{n,k}+2(n-k+1)\alpha_{n+1,k+1}+2(n-k+1)\alpha_{n+1,k}$ 。

綜合 **Case1,2**，可知：

$$\beta_{n+1,n+1}=(n+1)^2\beta_{n,n}$$
$$\beta_{n+1,n}=n(n+1)\beta_{n,n-1}-(n+1)\beta_{n,n}+2\alpha_{n+1,n}+\alpha_{n+1,n}$$
$$\beta_{n+1,n-1}=(n-1)(n+1)\beta_{n,n-2}-2(n+1)\beta_{n,n-1}+4\alpha_{n+1,n}+4\alpha_{n+1,n-1}+\alpha_{n+1,n-1}$$
$$\beta_{n+1,k}=k(n+1)\beta_{n,k-1}-(n-k+1)(n+1)\beta_{n,k}+2(n-k+1)\alpha_{n+1,k+1}+2(n-k+1)\alpha_{n+1,k}+\alpha_{n+1,k}$$

上式即為第二遞迴式(由  和  的係數，推出  的係數)。

由以上可知：

$$\alpha_{n,k}=k(n-1)\alpha_{n-1,k-1}-(n-k)(n-1)\alpha_{n-1,k}+(n-k)\beta_{n-1,k}$$
$$\beta_{n,k}=kn\beta_{n-1,k-1}-(n-k)n\beta_{n-1,k}+2(n-k)\alpha_{n,k+1}+(2n-2k+1)\alpha_{n,k}$$

(三) $\alpha_{n,k}$ 及 $\beta_{n,k}$ 的解

1. $\alpha_{n,k}$ 的解

經過不斷的計算後(可參考表三)，我們發現 $\alpha_{n,k}$ 之中的規律性。如下：

$$\alpha_{n,n-1}=\frac{(n!)^2}{n} \qquad \alpha_{n,n-2}=\frac{(n!)^2}{n}$$
$$\alpha_{n,n-3}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{3}{2} \qquad \alpha_{n,n-4}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{3}{2}$$
$$\alpha_{n,n-5}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} \qquad \alpha_{n,n-6}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$$
$$\alpha_{n,n-7}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6} \qquad \alpha_{n,n-8}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}$$

… …

(爲了方便計算，我們用 *n-l* 來代替 *k*)

Case1 *l* 爲奇數

由上述的規律可知 $\alpha_{n,n-l}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{l-2}{l-3}\cdot\frac{l}{l-1}}_{\text{有}\frac{l-1}{2}\text{個}}$

$$=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(l-3)\cdot(l-1)\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(l-2)\cdot l}{(2\cdot4\cdot\ldots\cdot(l-3)\cdot(l-1))^2}$$

$$=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{l!}{2^{2\cdot\frac{l-1}{2}}\cdot\left(1\cdot2\cdot\ldots\cdot\frac{l-3}{2}\cdot\frac{l-1}{2}\right)^2}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{\left(2\cdot\frac{l-1}{2}+1\right)!}{2^{2\cdot\frac{l-1}{2}}\cdot\left(\frac{l-1}{2}!\right)^2}$$

Case2 *l* 爲偶數

由上述的規律可知 $\alpha_{n,n-l}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{l-3}{l-4}\cdot\frac{l-1}{l-2}}_{\text{有}\frac{l-2}{2}\text{個}}$

$$=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(l-4)\cdot(l-2)\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(l-3)\cdot(l-1)}{(2\cdot4\cdot\ldots\cdot(l-4)\cdot(l-2))^2}$$

$$=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{(l-1)!}{2^{2\cdot\frac{l-2}{2}}\cdot\left(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{l-4}{2}\cdot\frac{l-2}{2}\right)^2}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{\left(2\cdot\frac{l-2}{2}+1\right)!}{2^{2\cdot\frac{l-2}{2}}\cdot\left(\frac{l-2}{2}!\right)^2}$$

綜合 **Case1,2**，可知在 $l\in\mathbf{N}$ 時

$$\alpha_{n,n-l}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{\left(2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)!}{2^{2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]}\cdot\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]!\right)^2}$$ (此式中的 [ ] 均表示高斯函數)

2. $\beta_{n,k}$ 的解

同樣地，我們發現 $\beta_{n,k}$ 之中的規律性。如下：

$\beta_{n,n}=(n!)^2$

$\beta_{n,n-1}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}$

$\beta_{n,n-2}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}.\frac{5}{4}$

$\beta_{n,n-3}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}$

$\beta_{n,n-4}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}$

$\beta_{n,n-5}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}$

$\beta_{n,n-6}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{13}{12}$

$\beta_{n,n-7}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{14}{13}$

$\beta_{n,n-8}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{17}{16}$

…

…

(爲了方便計算，我們用 *n-l* 來代替 *k*)

Case1 *l* 爲奇數

由上述的規律可知 $\beta_{n,n-l}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2l-1}{2l-2}\cdot\frac{2l}{2l-1}$

$$=(n!)^2\cdot 2\underbrace{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{l-2}{l-3}\cdot\frac{l}{l-1}\right)}_{\text{有}\frac{l-1}{2}\text{個}}$$

$$=(n!)^2\cdot 2\cdot\frac{\left(2\cdot\frac{l-1}{2}+1\right)!}{2^{2\cdot\frac{l-1}{2}}\cdot\left(\frac{l-1}{2}!\right)^2}\cdot 1$$

Case2 *l* 爲偶數

由上述的規律可知 $\beta_{n,n-l}=(n!)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2l-3}{2l-4}\cdot\frac{2l-2}{2l-3}\cdot\frac{2l+1}{2l}$

$$=(n!)^2\cdot 2\underbrace{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{l-3}{l-4}\cdot\frac{l-1}{l-2}\right)}_{有\frac{l-2}{2}個}\cdot\left(1+\frac{1}{2l}\right)$$

$$=(n!)^2\cdot 2\cdot\frac{\left(2\cdot\frac{l-2}{2}+1\right)!}{2^{2\cdot\frac{l-2}{2}}\cdot\left(\frac{l-2}{2}!\right)^2}\cdot\left(1+\frac{\frac{1^l+(-1)^l}{2}}{2l}\right)$$

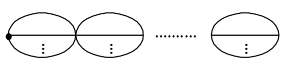
綜合 **Case1,2**，可知在 $l\in\mathbf{N}$ 時

$$\beta_{n,n-l}=(n!)^2\cdot\frac{\left(2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)!}{2^{2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]}\cdot\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]!\right)^2}\cdot\left(2+\frac{1^l+(-1)^l}{2l}\right)$$

(此式中的［］均表示高斯函數)

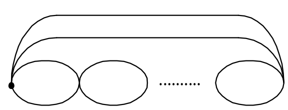
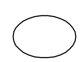
伍、結論

一、鏈狀之通解

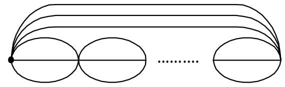
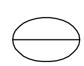
 的通解（共有 m 層、有 n 個)

走法數是 $(m!)^n\cdot\left(H^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)^{n-1}$

二、環狀之通解

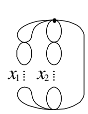
(一)  的通解（n 個  繞成一環)

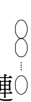
走法數是 $(2n+2)2^n$

(二)  的通解（n 個  繞成一環)

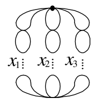
走法數是 $(6\cdot 2^n-4)(3!)^n$

三、兩層鏈的環狀迴圈圖形的延伸

(一) 

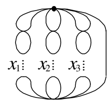
的通解（x_1,x_2 表其鏈  中的圓環個數)

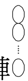
走法數是 $\left[2(x_1+x_2)+2\right]\cdot 2^{x_1+x_2}$

(二) 

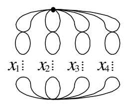
的通解（x_1, x_2, x_3 表其鏈  中的圓環個數)

走法數是 $\left[12(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+12(x_1+x_2+x_3)+18\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

(三) 

的通解（x_1, x_2, x_3 表其鏈  中的圓環個數)

走法數是 $\left[36x_1x_2x_3+72(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+90(x_1+x_2+x_3)+108\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3}$

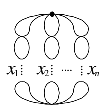
(四) 

的通解（x_1, x_2, x_3, x_4 表其鏈  中的圓環個數)

走法數是 $\left[144(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)+144(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\right.$

$\left.+216(x_1+x_2+x_3+x_4)+216\right]\cdot 2^{x_1+x_2+x_3+x_4}$

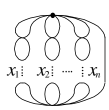
四、兩層鏈的環狀迴圈圖形的延伸之遞迴公式及通解

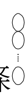


(有 n 條  ，其中的圓環個數分別爲 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$)

走法 $=\left(\alpha_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+\alpha_{n,n-2}\mathrm{A}_{n,n-2}+\ldots+\alpha_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

則 $\alpha_{n,k}=k(n-1)\alpha_{n-1,k-1}-(n-k)(n-1)\alpha_{n-1,k}+(n-k)\beta_{n-1,k}$



(有 n 條  ，其中的圓環個數分別爲 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ，和 1 條線)

走法 $=\left(\beta_{n,n}\mathrm{A}_{n,n}+\beta_{n,n-1}\mathrm{A}_{n,n-1}+\ldots+\beta_{n,0}\mathrm{A}_{n,0}\right)\cdot 2^{\mathrm{A}_{n,1}}$

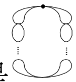
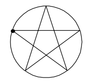
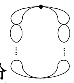
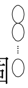
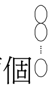
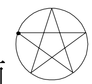
則 $\beta_{n,k}=kn\beta_{n-1,k-1}-(n-k)n\beta_{n-1,k}+2(n-k)\alpha_{n,k+1}+(2n-2k+1)\alpha_{n,k}$

而 $\alpha_{n,k}$ 及 $\beta_{n,k}$ 通解如下

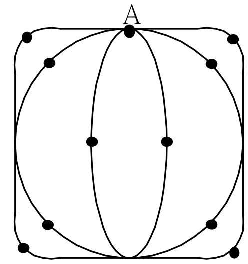
$$\alpha_{n,n-l}=\frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{\left(2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)!}{2^{2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]}\cdot\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]!\right)^2}\qquad \beta_{n,n-l}=(n!)^2\cdot\frac{\left(2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)!}{2^{2\cdot\left[\frac{l-1}{2}\right]}\cdot\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]!\right)^2}\cdot\left(2+\frac{1^l+(-1)^l}{2l}\right)$$

伍、討論

我們發現，任意的兩個(以上)圖形，只要接在同一個點上的話，均可應用組合數的概念

來解題。但是像是，甚至是的圖形，就沒辦法用那麼簡單的算法來解題了。雖然說是由一個，將其首尾相連後，所得到的圖形，但其實它是由兩個，在首、尾各作一次連結，接於兩個點上，所得到的圖形。所以我們必須用另外的方法來計算它的走法數，而不是單純的使用組合數來計算。而，為中間的星星與外圍的圓相連於 5 個點，因此計算上又更為複雜了，必須分成相當多種情形來討論，所以在此並不予以說明！

陸、應用



　　一筆畫的問題，當然不只是簡單的數學遊戲而已，其實它可應用於各種路線規劃的問題上。例如，右圖為某國的地圖，圖中的點為該國的觀光景點。臺灣的某旅行社想以 A 區為起點，規劃出一條旅行路線，最後再從 A 區返回臺灣。為了吸引更多的人來，該旅行社於是決定，要規劃出一條可以將所有景點都走過的路線，但又不能走已走過的路程。此時，就可以利用「一筆劃」的概念，列出各種可能的走法，再從中選出最符合經濟效益的路線，作為本次旅行的方案。

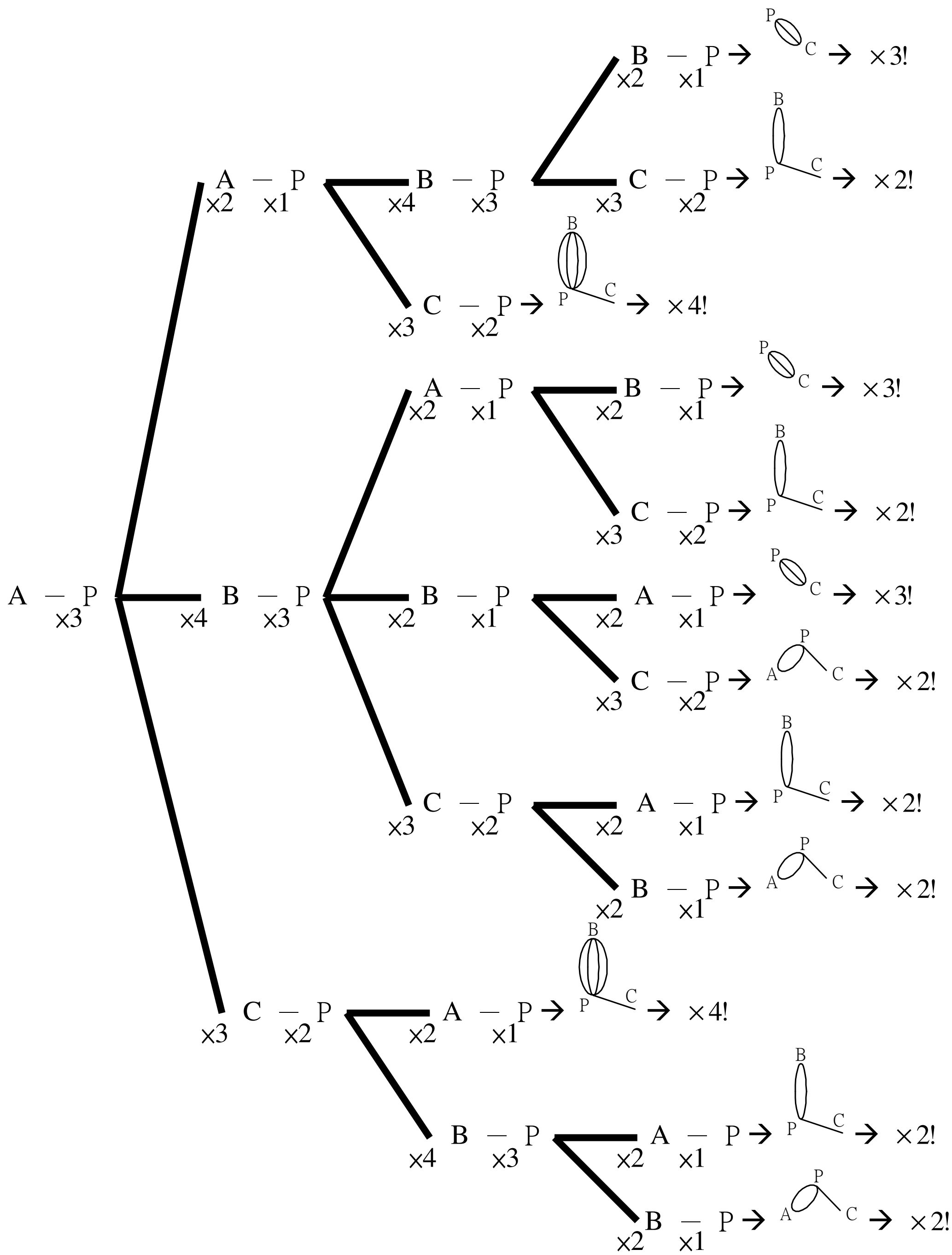
柒、參考資料

王埄彬（ 民 93)。 高中數學第四冊，第二章，排列組合。 桃園市（ p.2-2-44~p.2-2-49)

嚴鎮軍（ 民 91)。 高中數學競賽教程。 台北市：九章出版社（ p.309~p.324)

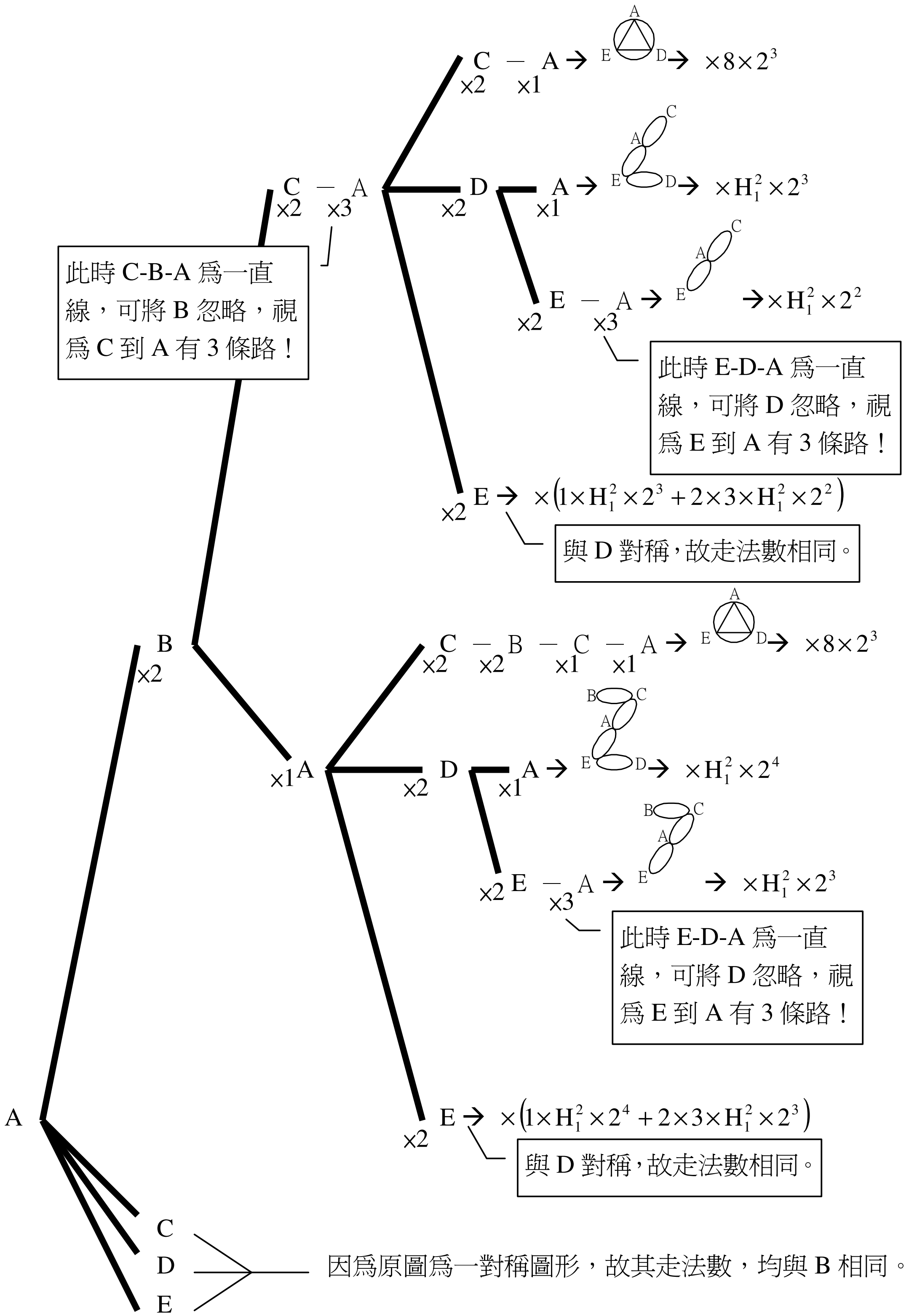
捌、附錄

表一：



加總後，得到走法數爲 10368。

表二：



加總後((B 的走法數)x4)，得到走法數爲 24576。

表三：

k \ $\alpha_{n,k}$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
0	1	2	18	216	5400	162000	7938000	444528000	36006768000	3240609120000
1		2	12	216	4320	162000	6804000	444528000	32006016000	3240609120000
2			12	144	4320	129600	6804000	381024000	32006016000	2880541440000
3				144	2880	129600	5443200	381024000	27433728000	2880541440000
4					2880	86400	5443200	304819200	27433728000	2469035520000
5						86400	3628800	304819200	21946982400	2469035520000
6							3628800	203212800	21946982400	1975228416000
7								203212800	14631321600	1975228416000
8									14631321600	1316818944000
9										1316818944000
10										

k \ $\beta_{n,k}$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
0	2	10	108	1944	54000	2106000	111132000	7556976000	648121824000	68052791520000
1	1	8	90	1728	48600	1944000	103194000	7112448000	612115056000	64812182400000
2		4	72	1440	43200	1749600	95256000	6604416000	576108288000	61211505600000
3			36	1152	36000	1555200	85730400	6096384000	534957696000	57610828800000
4				576	28800	1296000	76204800	5486745600	493807104000	53495769600000
5					14400	1036800	63504000	4877107200	444426393600	49380710400000
6						518400	50803200	4064256000	395045683200	44442639360000
7							25401600	3251404800	329204736000	39504568632000
8								1625702400	263363788800	32920473600000
9									131681894400	26336378880000
10										13168189440000

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

佳作

040414
迴圈迷宮探索--一筆劃問題

國立武陵高級中學

評語：

1. 透過煩瑣的數學實驗，而獲得畫龍點晴之雙重遞迴關係
2. 本研究可視為高中教材抽象理論的具體應用。