第一章

010103

_末_減_初_ (或是後減前)

進階思考：

1. 平常講的超『速』，是指那一個『速』？瞬時速率
2. 平均速率與平均速度(average velocity)何者較大？平均速率
3. 瞬時速率(instantaneous speed)與瞬時速度(instantaneous velocity)何者較大？相等

010104 加速度(acceleration)的感覺 – Part I

	第 1 秒	第 2 秒	第 3 秒	第 4 秒	第 5 秒		加速度
甲	5 m/s	5	5	5	5	…………	0
乙	1	2	3	4	5	…………	1
丙	4	7	10	13	16	…………	3
丁	11	9	7	5	3	…………	–2
結論	用♥感覺加速度(acceleration)的意義：每秒增加的速度						

進階思考：

1. 何謂 $g=9.8m/s^2$？ 因重力的影響每秒速度增加 9.8m/s
2. (B)
3. 一汽車的加速度(acceleration)爲 3km/hr·s，意義爲何？ 每秒增加時速 3km

010105 加速度(acceleration)的感覺 – Part II

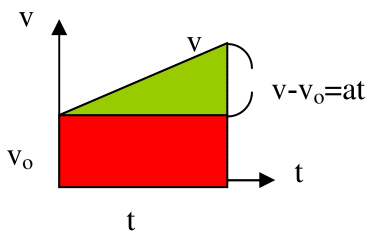
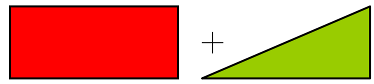
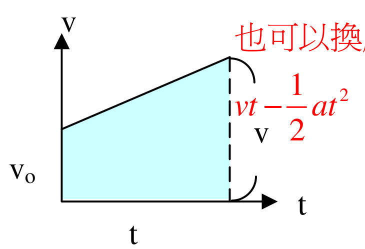
	第 1 秒	第 2 秒	第 3 秒	第 4 秒	第 5 秒		加速度
A	1	3	5	7	9	…………	2
B	9	7	5	3	1	…………	–2
C	–1	–3	–5	–7	–9	…………	–2
D	–9	–7	–5	–3	–1	…………	2
結論	速度與加速度的方向 _無關_ [但加速度與力同向：F=ma] F=ma 問 a 的方向(direction)就想 F 的方向，a 是由 F 造成的						

010201 運動學(kinematics)(3+1)基本公式

【等加速度運動（uniformly accelerated motion）】

$(1)\ v=v_o+at\quad (2)\ S=v_ot+\frac{1}{2}at^2\quad (3)\ v^2=v_o^2+2aS\quad (4)\ S=\frac{v_o+v}{2}t$

推導與證明

公　式	所利用的觀念	推導過程
第一公式	加速度的定義 $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_o}{t-0}$	$a=\frac{v-v_o}{t-0}\Rightarrow v=v_o+at$
第二公式	v－t 圖及其觀念 	位移(displacement)=曲線下面積 ＝  長方形面積$=v_0t$ 三角形面積$=\frac{1}{2}at^2$ 故總面積 $v_0t+\frac{1}{2}at^2$
第三公式	(1)將第一公式的 t 代入第二公式 (2)外力作功=動能變化	(1) $t=\frac{v-v_0}{a}$, $S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ $\Rightarrow S=v_0\frac{v-v_0}{a}+\frac{1}{2}a(\frac{v-v_0}{a})^2$ $\rightarrow v^2=v_0^2+2aS$ (2) $w=F\cdot S=\Delta E_k$ $(\cancel{m}a)\cdot s=\frac{1}{2}\cancel{m}(v^2-v_0^2)$ $2as=v^2-v_0^2\rightarrow v^2=v_0^2+2as$
第四公式	v－t 圖及其觀念 	梯形面積$=\frac{(v_o+v)}{2}\times t$=S $(\frac{v_0+v}{2})\times\frac{v-v_0}{a}=S$ $v^2-v_0^2=2as\quad \therefore v^2=v_0^2+2as$

010301 直線拋體運動(1):自由落體(自由的意義: $v_0=0$)

	物理量	解題思路	公式
1	著地時間	【如何解著地時間】 ❶只有第 1、2 公式有 t ❷已知 v_o=0 及 H ❸故應選第 2 公式解 t	向上即為"+" 向下即為"−" $-H=0+\frac{1}{2}(-g)t^2$ $\therefore t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$，與 m 無關
2	著地速度	【如何解著地速度①】 ❶只有第 1、3 公式有 v ❷已知 v_o=0 及 H ❸故應選第 3 公式解 v 【如何解著地速度②】 減少的位能=增加的動能	$v^2=0^2+2(-g)(-H)$ $\therefore v=\sqrt{2gH}$ $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2=\cancel{m}gH$

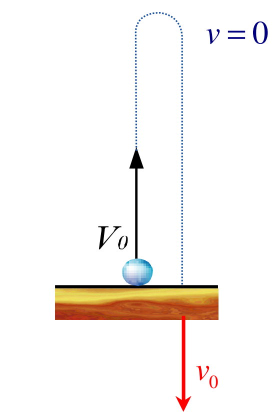
010401 直線拋體運動(2):鉛直上拋

	物理量	解題思路	公式
1	到達最高點時間	【如何解達最高點時間？】 ①只有第❶、❷公式有 t ②已知最高點速度 v=0 ③故應選第 1 公式解 t	$0=v_0+(-g)t$ $\therefore t=\frac{v_0}{g}$
2	著地時間	【如何解著地時間？】 運動的對稱性	$T=2\cdot\frac{v_0}{g}$
3	最大高度	【如何解最大高度？】 ①只有第❷、❸公式有 S ②已知最高點速度 v=0 ③故應選第 3 公式解 H	$0^2=v_0^2+2(-g)H$ $\therefore H=\frac{v_0^2}{2g}$
4	著地速度	【如何解著地速度？】 運動的對稱性	$-v_0$

❶ $v=v_o+at$

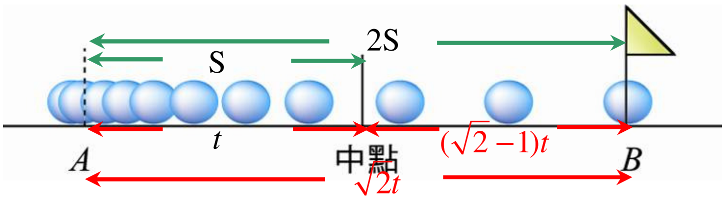
❷ $S=v_ot+\frac{1}{2}at^2$

❸ $v^2=v_o^2+2aS$



010404 距離中點 vs 時間中點

(1) 距離中點，時間比： $1:\sqrt{2}-1$

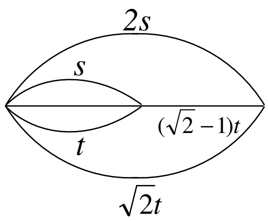


$s=\frac{1}{2}at^2 \quad \therefore t \propto \sqrt{S}$

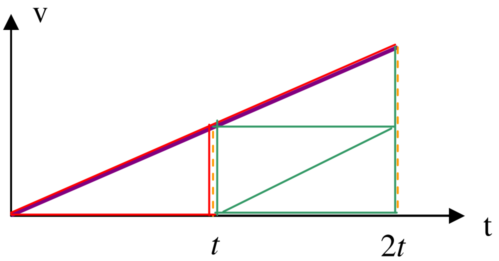
$t_{前半}:t_{後半}$

$=1:\sqrt{2}-1=1:0.414$

$=\sqrt{2}+1:1=2.414:1$

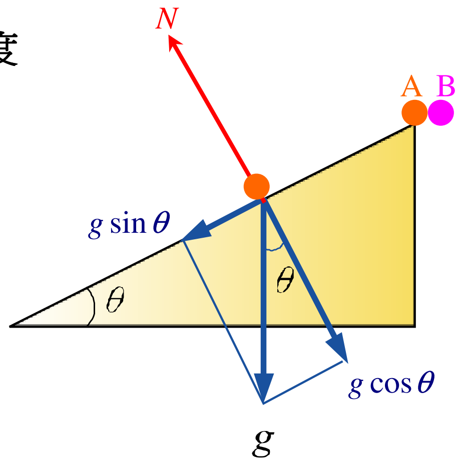


(2) 時間中點，距離比： $1:3$



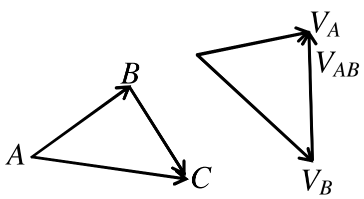
010501 解題關鍵－分解重力加速度

- 沿(平行)斜面加速度分量： $g\sin\theta$
- 垂直斜面加速度分量： $g\cos\theta$

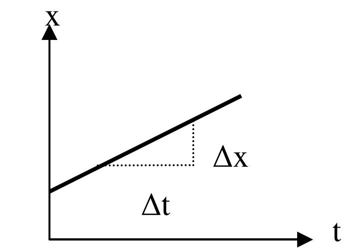
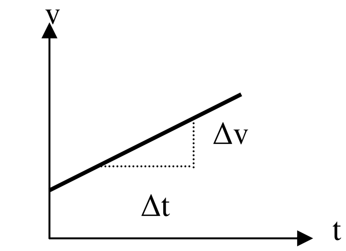
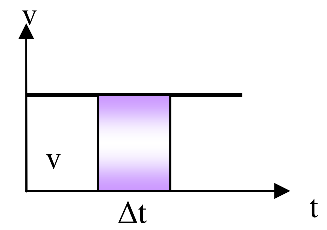
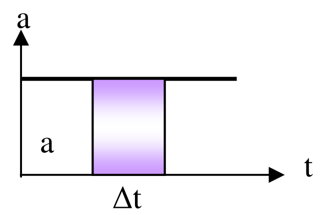


010601 相對運動公式(亦可推廣到平面上的運動)

- 公式(1)： $\overline{V_{AB}}=\overline{V_A}-\overline{V_B}$
- 公式(2)： $\overline{V_{AC}}=\overline{V_{AB}}+\overline{V_{BC}}$
- 公式(3)： $\overline{V_{AB}}=-\overline{V_{BA}}$
- 公式(4)： $V_{AA}=V_A \qquad V_A=0$



010701 理論推導 Part I

圖　　形	推　　導	結　　論
	➲數學意義： $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ =斜率(slope) ➲物理意義： $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ =速度	(1)x－t 圖的斜率 =___速度___
	➲數學意義： $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ =斜率(slope) ➲物理意義： $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ =加速度	(3)v－t 圖的斜率 =___加速度___
	➲數學意義： $v\times\Delta t$ =面積(area) ➲物理意義： $v\times\Delta t$ =位移=Δx	(2)v－t 圖下的面積 =__位移≠位置__
	➲數學意義： $a\times\Delta t$ =面積(area) ➲物理意義： $a\times\Delta t$ =速度變化=Δv	(4)a－t 圖下的面積 =_速度變化量≠速度_

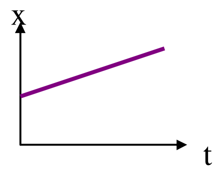
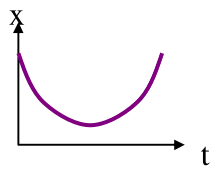
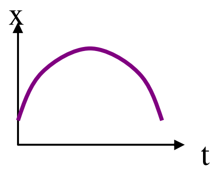
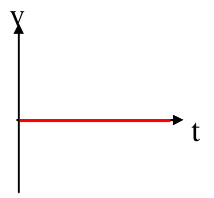
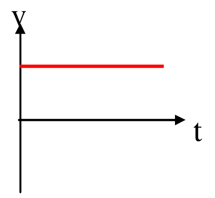
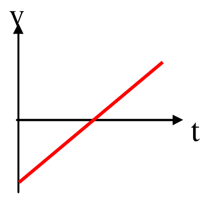
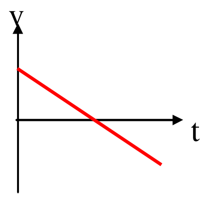
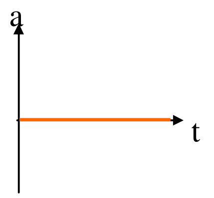
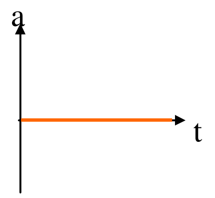
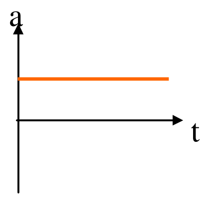
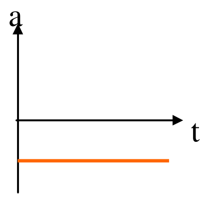
P.52

x－t 圖、v－t 圖、a－t 圖總整理

求斜率(slope)=____微分____

求面積(area)=____積分____

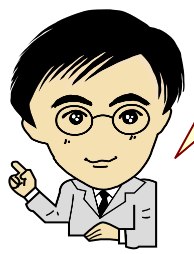
010702 x、v、a 三者關係之應用－運動函數圖形

	靜止	等速度運動 (uniform motion)	等加速度運動 (a>0)	等加速度運動 (a<0)
x－t 圖			 【凹口向上】	 【凹口向下】
v－t 圖				
a－t 圖				
函數關係	x(t)：0 次式 v(t)：0 次式 a(t)：0 次式	x(t)：1 次式 v(t)：0 次式 a(t)：0 次式	x(t)：2 次式 v(t)：1 次式 a(t)：0 次式	x(t)：2 次式 v(t)：1 次式 a(t)：0 次式

010803 求斜率(slope)的數學技巧－___微分____

同理可以求得各點的切線(tangent)斜率：

切點	(1,1)	(2,4)	(3,9)	(4,16)	(5,25)
切線斜率	2	4	6	8	10



010804 微分(differentiation)基本觀念

(1)微分(differentiation)的意義：求______斜率 / 極限______的數學技巧

(2)微分(differentiation)的物理意義(爲什麼物理課要學「微分」呢?):

a. x-t 圖的斜率(slope)是 ___v___，故對 x(t)微分可以得出 ___v(t)___

b. v-t 圖的斜率(slope)是 ___a___，故對 v(t)微分可以得出 ___a(t)_

(3)微分(differentiation)的符號約定: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt} = x'$

(4)多項式微分公式: $\dfrac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

➲公式一: $\dfrac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

(1) $\dfrac{d}{dt} t^3 = 3t^2$　　(2) $\dfrac{d}{dy} y = 1 \cdot y^0 = 1$

➲公式二 $\dfrac{d}{dx} kx^n = nkx^{n-1}$ (k 爲常數)

(1) $\dfrac{d}{dt} 3t^3 = 9t^2$　　(2) $\dfrac{d}{dx} 2y = 2$

➲公式三: $\dfrac{d}{dx} k = 0$ (k 爲常數)

(1) $\dfrac{d}{dt} 3 = 0$　　(2) $\dfrac{d}{dx} 7 = 0$

➲公式四(分配律): $\dfrac{d}{dx}(f+g) = \dfrac{d}{dx} f + \dfrac{d}{dx} g$

(1) $\dfrac{d}{dt}(3t^3 + 2t^2) = 9t^2 + 4t$　　(2) $\dfrac{d}{dy}(2y + 3y^2) = 2 + 6y$

【牛刀小試】:

1. $\dfrac{d}{dt} t^5 = 5t^4$　　2. $\dfrac{d}{dx} 2x^3 = 6x^2$

3. $\dfrac{d}{ds}(\dfrac{1}{5} s^5) = S^4$　　4. $\dfrac{d}{dy} 8 = 0$

5. $\dfrac{d}{dt}(3t-2) = 3$　　6. $\dfrac{d}{dt}(t^2 + 3t + 5) = 2t+3$

7. $\dfrac{d}{dt}(t^3 + 2t^2 - 4t - 2) = 3t^2 + 4t - 4$　　8. $\dfrac{d}{ds}(s^3 - 5s - 9) = 3s^2 - 5$

第一章　詳解

範例 01：

【解答】：$1 m/s^2$

【解析】：72km/hr＝72000/3600＝20m/s

(10m/s＝36km/hr)

$a＝20/20＝1 m/s^2$

範例 02：

【解答】：0 km/hr，8km/hr

【解析】：假設一趟路程爲 L，則上山所花的時間=L/6，下山所花的時間= L /12

(1)總位移=_0，平均速度=$\frac{\text{位移}}{\text{時間}}=0$

(2)總路徑長=2L，平均速率=$\frac{\text{路徑長}}{\text{總時間}}$=2 L /(L /6+ L /12)=8

範例 03：

【解答】：(C)(D)

【解析】：

(A)無關，$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$　(B)$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$

範例 04：

【解答】：(A)(B)(C)(D)

範例 05：

【解答】：(1)4 (2)25 (3)1 或 9

【解析】：(1)國中程度的題目，熱身題，高中不太會考！

$v＝v_o+at＝10+(－2)3=4$

(2)因初速與加速度反向，所以經過一段時間後，物體會轉向，故有最大位移！

最大位移發生在轉向瞬間，即速度=0 時。

$$0=10+(-2)t, t=5 \Rightarrow S=10\bullet 5+\frac{1}{2}(-2)5^2=25$$

(3)你可以判斷此題有幾個解嗎？

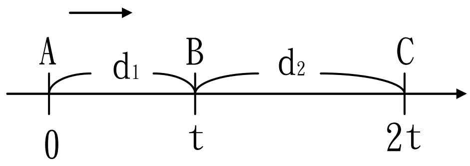
$$9=10\bullet t+\frac{1}{2}(-2)t^2 \Rightarrow t^2-10t+9=0, t=1 \text{ or } t=9$$

範例 06：

【解答】：$\dfrac{d_2-d_1}{t^2}$

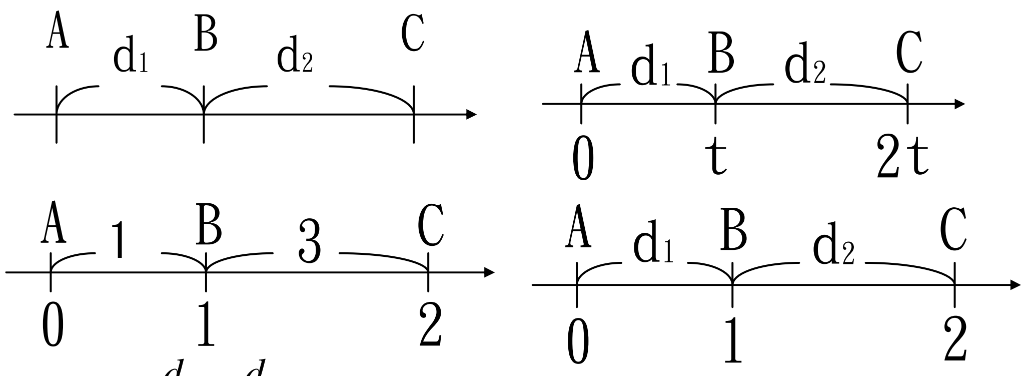
【解析】：

解法一 $\begin{cases} d_1=v_o t+\dfrac{1}{2}at^2 \\ d_1+d_2=v_o(2t)+\dfrac{1}{2}a(2t)^2 \end{cases}$



解得 $a=\dfrac{d_2-d_1}{t^2}$

解法二



$$a=\frac{\dfrac{d_2}{t}-\dfrac{d_1}{t}}{t}=\frac{d_2-d_1}{t^2}$$

範例 07：

【解答】：(C)

【解析】：設火車中點通過的速率為 x；火車全長為 L，利用運動學第三公式：

$$\begin{cases} v^2=u^2+2aL \\ x^2=u^2+2a(\dfrac{L}{2}) \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}$$

範例 08：

【解答】：(1) $\sqrt{\dfrac{2u^2+v^2}{3}}$ (2) $\dfrac{2L}{u+v}$

【解析】：(1) 設所求速率為 x；火車全長為 L

$$\begin{cases} v^2=u^2+2aL \\ x^2=u^2+2a(\dfrac{L}{3}) \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2u^2+v^2}{3}}$$

(2)代 4^{th} 公式：

$$s=\frac{v_0+v}{2}\cdot t$$

$$L=\frac{u+v}{2}t \qquad \therefore t=\frac{2L}{u+v}$$

範例 09：

【解答】：1.＿3 : 5＿　2.＿1 : 1＿

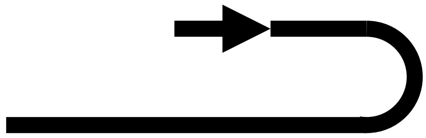
【解析】：

1. $v^2=0^2+2aS \quad \therefore S \propto v^2$

$S_1:S_2=1:4$

$\Rightarrow \Delta x:\Delta \ell=4-1:4+1=3:5$

2. $\Delta x:\Delta l=1:1$



範例 10：

【解答】：(C)(F)(H)

【解析】：在真空中，物體的著地時間、著地速度與質量無關。其加速度爲重力加速度，也與質量無關。但所受重力(W=mg)與質量成正比。

範例 11：

【解答】：(A)(E)

【解析】：石塊在空中運動不論速度的大小和方向爲何，加速度都是重力加速度，恆爲定值。

範例 12：

【改錯題】：$20=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2 \Rightarrow t=2$　到底錯在哪裡呢？＿單位＿

【解答】：(B)

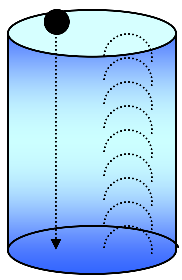
【解析】：小華的反應時間，即尺下落 20 公分的時間，代入等加速度運動第二公式：$S=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 0.2=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2 \Rightarrow t=0.2$ 秒

範例 13：

【解答】：(E)

【解析】：

【解法一】：❶入水時間+聲音上傳時間=3 秒 ❷下落距離=聲速×聲音上傳時間

t1  t2

$$\begin{cases} t_1+t_2=3 \\ \frac{1}{2}gt_1^2=330t_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2=330(3-t_1)$$

$$5t_1^2+330t_1-990=0 \Rightarrow t_1=\frac{-330\pm\sqrt{330^2-4\cdot 5\cdot(-990)}}{2\times 5}$$

【解法二】：聲速比物體的速度快很多，故將 3 秒全部視爲自由落體之時間

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \cong \frac{1}{2}\times 10\times 3^2=45$$

範例 14：

【解答】：(1) 1:4:9　(2) 1:3:5

【解析】：

(1)前 t 秒的位移：$S = v_o t + \frac{1}{2}at^2$

if v_o=0　$S = \frac{1}{2}at^2$

(2)第 t 秒的位移：

$$S_{t^{th}} = S_t - S_{t-1} = (v_o t + \frac{1}{2}at^2) - [v_o(t-1) + \frac{1}{2}a(t-1)^2] = v_o + \frac{1}{2}a(2t-1)$$

if v_o=0　$S_{t^{th}} = \frac{1}{2}a(2t-1)$

範例 15：

【解答】：9

【解析】：

【解法二】：$\bar{v} = \frac{6+8+10+12}{4} = 9m/s$

【解法三 】：$\frac{8+10}{2} = 9m/s = v_{0\sim4} = v_2$

$v_{0.5} = 6$，$v_{1.5} = 8$　⇒ a=$2m/s$，$v_0 = 5m/s$

範例 16：

【解答】：1.(B)　2.(E)

【解析】：(1)　12.2/1＝12.2＝　$v_{5.5}$

13.8/1＝13.8＝$v_{9.5}$

a＝(13.8－12.2)/4＝0.4

(2)　v＝v_0+at　　10m/s

範例 17：

【解答】：(D)

【解析】：

【解法二】：$h = 81 \times \frac{8}{9} = 72cm$

【解法三】：*feeling*

範例 18：

【解答】：1.(D)　2. 30.625m

【解析】：

1.【解法一】：

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2-\frac{1}{2}\cdot g(t-1)^2}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{3}{4}$$

$3t^2-8t+4=0$,　t=2　or t=$\frac{2}{3}$(不合)

$\therefore$ h=$\frac{1}{2}\cdot 9.8\cdot 2^2=19.6$

【解法二】：

$S_1:S_2:\cdots=1:3:\cdots\Rightarrow t=2s$　　h=$\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=19.6m$

2.

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2-\frac{1}{2}\cdot g(t-1)^2}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{16}{25}$$

$16t^2-50t+25=0$,　t=$\frac{5}{2}$　or　t=$\frac{5}{8}$(不合)

$\therefore$ h=$\frac{1}{2}\cdot 9.8\cdot(\frac{5}{2})^2=30.625$

範例 19：

【解答】：(a)19.6 公尺　(b)2.00 秒

【解析】：(a)從運動學第三公式　$v^2=v_o^{\,2}+2aS$

$(19.6)^2=2\times 9.8\times H\Rightarrow H=19.6$ 公尺

(b)運動學第一公式　$0=19.6-gt\Rightarrow t=2$ 秒

範例 20：

【解答】：(1) 10m/s (向下)　(2) 8m/s(向上)　(3)1800m/s^2(向上)

【解析】：(1) $v^2=2(-10)(-5)\Rightarrow v=10\downarrow$

(2) $v^2=2(-10)(-3.2)\Rightarrow v=8\uparrow$

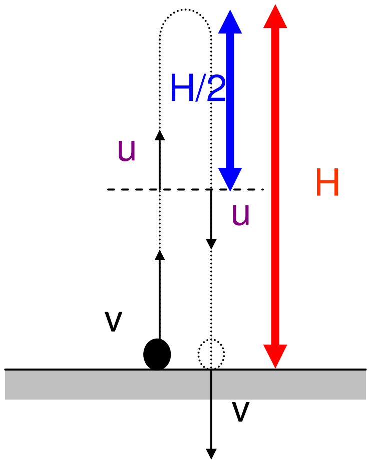
(3) $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{8-(-10)}{0.01}=1800\uparrow$

範例 21：

【解答】：(B)

【解析】：目前共有 3 個未知數：H 、 t、 u(達一半高度時的速率)，我們有 3 個方程式，所以一定解得出來。問題在於，怎樣解 t 才會比較快！

因爲只有(1)與(2)才有 t，所以應該從(1)與(2)著手！



將物理量代入(1)：$u = v + (-g)t$

但 u 未知，再引入運動的對稱性：

$$v^2 = 0^2 + 2gH \Rightarrow v \propto \sqrt{H}, u = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}v = v + (-g)t \Rightarrow t = \frac{v - \frac{1}{\sqrt{2}}v}{g}$$

若將物理量代入(2)：$\frac{H}{2} = vt + \frac{1}{2}(-g)t^2$，但 H 未知。

從拋出算到最高點 $0^2 = v^2 + 2(-g)H \Rightarrow H = \frac{v^2}{2g}$ 代回上式

$$\frac{v^2}{4g} = vt - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - vt + \frac{v^2}{4g} = 0$$

解 t 的一元二次方程式，直接代公式解：$t = \dfrac{v \pm \sqrt{v^2 - 4(\frac{1}{2}g)(\frac{v^2}{4g})}}{g} = \dfrac{v \pm \frac{\sqrt{2}}{2}v}{g}$

Wow! 怎麼會跑出兩個答案！

範例 22：

【解答】：96m

【解析】：$-32 = 12t + \frac{1}{2}(-10)t^2$

$5t^2 - 12t - 32 = 0$ →
$\begin{matrix} 5 & 8 \\ 1 & -4 \end{matrix}$ $\rightarrow$ t = 4或-1.6

$$S = 12 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4^2 = 64$$

$$H = 32 + 64 = 96$$

範例 23：

【解答】：1.(B)　2.　(1)t_1+t_2 (2)$\frac{1}{2}g(\frac{t_1+t_2}{2})^2$ (3)$\frac{1}{2}gt_1t_2$　3. $\frac{2v_0}{t_1+t_2}$

【解析】：1. 3+2=5

2.　$(1)T=t_1+t_2$　$(2)H=\frac{1}{2}g(\frac{t_1+t_2}{2})^2$　$(3)h=\frac{1}{2}g(\frac{t_2-t_1}{2})^2, x=H-h=\frac{1}{2}gt_1t_2$

3.　$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-v_0}{\frac{t_1+t_2}{2}}=\frac{-2v_0}{t_1+t_2}$

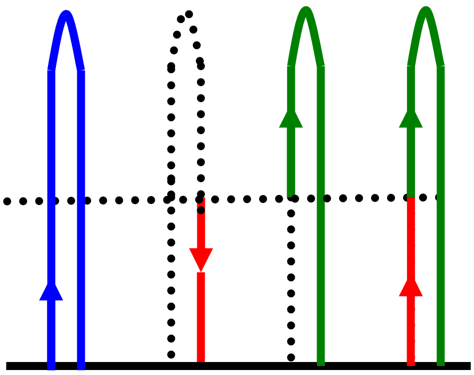
範例 24：

【解答】：1

【解析】：　已知 H、v_0，要求 t，代第 2 公式！

$$-9.8=-4.9t+\frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$t^2+t-2=0, (t+2)(t-1)=0\rightarrow t=1或-2$$



【若改以 v_0=4.9m/s 上拋，則？】：

$$-9.8=+4.9t+\frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$t^2-t-2=0, (t-2)(t+1)=0, t=2或\text{-}1$$

【進階思考】：(1) 11.025 m　(2) 14.7m/s　$H=\frac{1}{2}g\bullet 1.5^2, v=g\bullet 1.5$

範例 25：

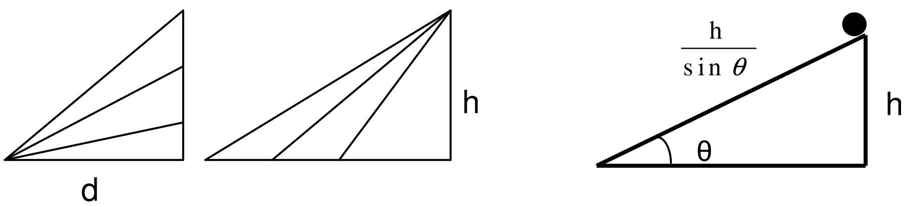
【解答】：1. $\sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta\cos\theta}}$　2. $\sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\theta}}$

【解析】：由運動學第(2)公式：

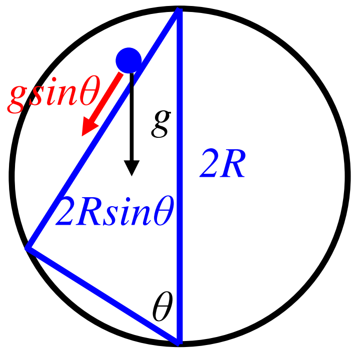
$$1.-\frac{d}{\cos\theta}=\frac{1}{2}(-g\sin\theta)t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta\cos\theta}}$$

2. 觀念：不能說鉛直做自由落體，所以著地時間一樣

$$-\frac{h}{\sin\theta}=\frac{1}{2}(-g\sin\theta)t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\theta}}$$



範例 26：



【解答】：$\sqrt{\dfrac{4R}{g}}$

【解析】：$-2R\sin\theta=\dfrac{1}{2}(-g\sin\theta)t^2$

$$\Rightarrow t=\sqrt{\frac{4R}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 2R}{g}}$$

範例 27：

【解答】：9

【解析】：從「24 公尺的光滑斜面頂端由靜止下滑，經 4 秒到達斜面底部」可求出加速度：運動學第二公式 $24=\dfrac{1}{2}\times a\times 4^2\Rightarrow a=3$ (此題因無角度，故與 a=gsinθ 無關)

「以初速 v_o 沿斜面上滑，經 6 秒後又滑回斜面底部」表示 3 秒達最高點

運動學第一公式 $0=v_o-3\times 3\Rightarrow v_o=9$

※很多人會用第二公式 $24=v_o\times 3-\dfrac{1}{2}\times 3\times 3^2$ 這是錯誤的解法，因爲「以初速 v_o 沿斜面上滑」並不會上滑 24 公尺

範例 28：

【解答】：1. (1) $\dfrac{1}{2}g$ (2) $\sqrt{\dfrac{4L}{g}}$ 2. (1)2:1 (2)1:1

【解析】：1. (1) $a=g\sin 30^o=\dfrac{1}{2}g$ (2) $-L=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2}g)t_A^{\ 2}\Rightarrow t_A=\sqrt{\dfrac{4L}{g}}$

2. 自由落體 $t_B=\sqrt{\dfrac{2\times\frac{1}{2}L}{g}}=\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ ，$\dfrac{t_A}{t_B}=\dfrac{2}{1}$

$$v_A=\sqrt{2\times\frac{1}{2}g\times L}=\sqrt{gL}$$

$$v_B=\sqrt{2\times g\times\frac{1}{2}L}=\sqrt{gL}$$

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(\frac{L}{2})\Rightarrow v=\sqrt{gL}$$

範例 29：

【解答】：1. 48s 2. 80s

【解析】：

$$1.\ 120=\frac{L}{v_1}\quad,\quad 80=\frac{L}{v^2}\quad\Rightarrow\frac{L}{v_1+v_2}=\frac{L}{\frac{L}{120}+\frac{L}{80}}=48s$$

$$2.\ \frac{L}{v_1+v_2}=60\quad,\quad\frac{L}{v_1-v_2}=120\quad\Rightarrow\frac{L}{v_1}=\frac{2L}{\frac{L}{60}+\frac{L}{120}}=80s$$

範例 30：

【解答】：$2v_ot$

【解析】：

【解法一】：相對速度 $2v_o$ ， 故 t 時間後相距 $2v_ot$

【解法二】：$S_A=+v_ot-\frac{1}{2}gt^2$ $S_B=-v_ot-\frac{1}{2}gt^2$ 距離差 $=S_A-S_B=2v_ot$

範例 31：

【解答】：(a) $\frac{h}{v_o}$ (b) $\sqrt{\frac{gh}{2}}$ (c) $v_0>\sqrt{gh}$ (d) $v_0=\sqrt{gh}$ (e) $\sqrt{\frac{gh}{2}}<v_0<\sqrt{gh}$

(a)【解法一】：$|S_A|+|S_B|=h\Rightarrow\frac{1}{2}gt^2+v_ot+\frac{1}{2}(-g)t^2=h\Rightarrow t=\frac{h}{v_o}$

【解法二】：A 有 g↓ ，B 有 g↓ ，就等於 A、B 都沒有加速度。即，A、B 的相對加速度= 0 ，表示 A 看 B 做 等速率 運動故，

相遇時間 $t=\frac{h}{v_o}$

h=20 0 10

h=20 10 10

h=20 20 20

h=20 1 2

(b)~(e):(略，見講義)

範例 32：

【解答】：(1) 1.5 小時 (2)45 公里

【解析】：

(1) 1. $s_1+s_2=60$　　$20t+20t=60$　　$\therefore t=1.5hr$

2. t=$\dfrac{60}{40}=1.5hr$

(2) $s=30\times1.5=45km$

範例 33：

【解答】：(1) 否 (2)7 公尺

【解析】：

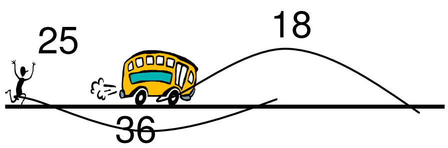
【解題思路】：看人、車速率相等時，此爲一轉捩點，若人還沒追到車，此後車速>人速，此時應該<u>等下一班</u>

Step1：先算何時人、車速率相等　　6=1t, t=6

Step2：此時人跑了：6×6=36

車子走了：$\dfrac{1}{2}\times1\times6^2=18$

人與車之間的距離：(18+25)-36=7



範例 34：

【解答】：(1)14 秒 (2)不行

【解析】：

$\dfrac{1}{2}\times1\times t^2-5t=28$

$t^2-10t-56=0$

t　4

t　-14

v＝at＝1×14＝14m/s＝50.4km/hr

範例 35：

【解答】：$\dfrac{(v_1-v_2)^2}{2d}$

【解析】：

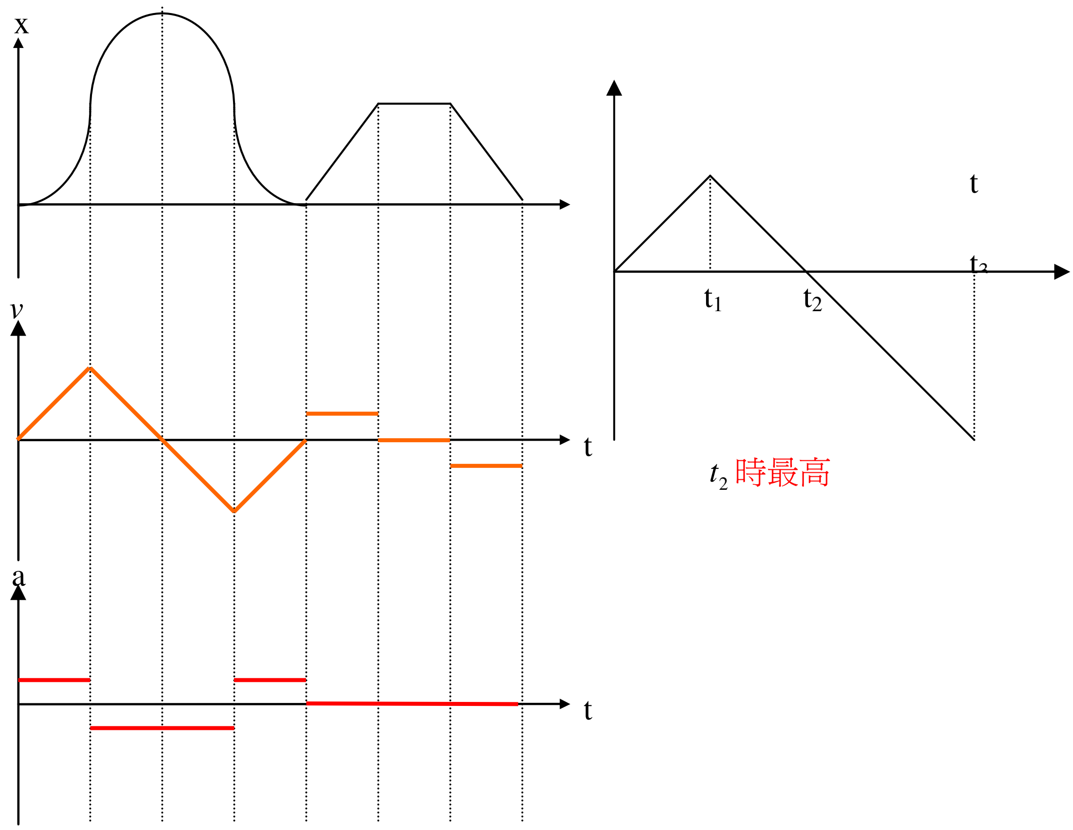
【解法二】：

$$0^2=(v_1-v_2)^2-2ad\Rightarrow a=\frac{(v_1-v_2)^2}{2d}$$

範例 36：

【解答】：(1)(略)　(2) t_2

【解析】：



範例 37：

【解答】：(B)(C)(E)（嚴格說來(A)不可能,但一般考試不選 A）

【解析】：❶不可能切線斜率無限大(即 v 無限大) ❷不可能同時在不同 x

範例 38：

【解答】：(1) 9m, 9/7 m/s　(2)21m, 3m/s　(3)$2m/s^2$　(4)12m

【解析】：(1)15－6=9　v=9/7　(2)15+6=21　v=21/7=3

(3)6/3=2　(4)$x=x_0+S=3+9=12$

範例 39：

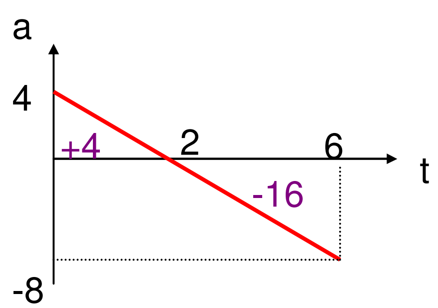
【解答】：-7m/s

【解析】：$\Delta v=4-16=-12$

$v=v_0+\Delta v=5-12=-7$

if $v_0=20$

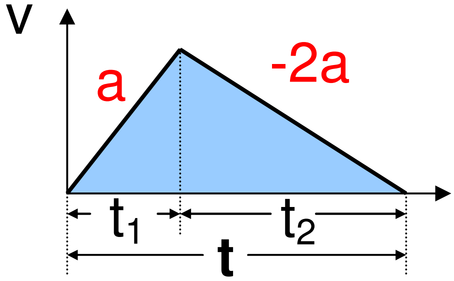
$v=v_0+\Delta v=20-12=8$



範例 40：

【解答】：(B)

【解析】：到底要畫哪一種圖呢？_v-t_圖，why?



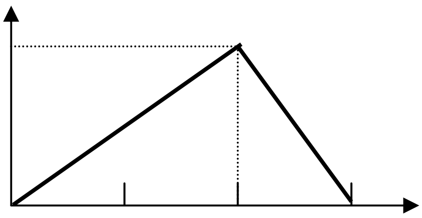
【解法一】：

$$\begin{cases} a\cdot t_1 = 2a\cdot t_2 \\ t_1+t_2=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1:t_2=2:1 \\ t_1+t_2=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{2}{2+1}t \\ t_2=\dfrac{1}{2+1}t \end{cases}$$

$$\text{距離}=\triangle\text{面積}=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}=\frac{1}{2}\times t\times(a\times\frac{2}{3}t)=\frac{1}{3}at^2$$

【解法二】：

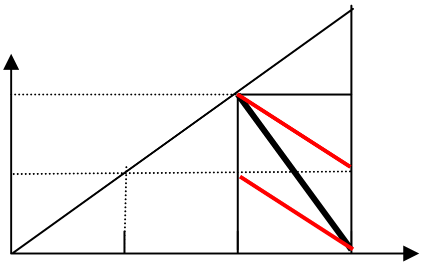
【博文數學】：斜率的定義=$\dfrac{\textbf{鉛直變化}}{\textbf{水平變化}}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$$s=\frac{1}{2}\times t\times\left(a\times\frac{2}{3}t\right)=\frac{1}{3}at^2$$

【解法三】：

$$s=\frac{6}{9}\times\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{3}at^2$$



【解法四】：

$$\frac{1}{2}\frac{a\times 2a}{a+2a}t^2=\frac{1}{3}at^2$$

範例 41：

【解答】：(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t$ (2) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t^2$

【解析】：【一般解與公式推導】

$$\begin{cases} \alpha\cdot t_1=\beta\cdot t_2 \\ t_1+t_2=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1:t_2=\beta:\alpha \\ t_1+t_2=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}t \\ t_2=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}t \end{cases}$$

故，途中最大速率由左側算 $v=\alpha\cdot t_1=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t$

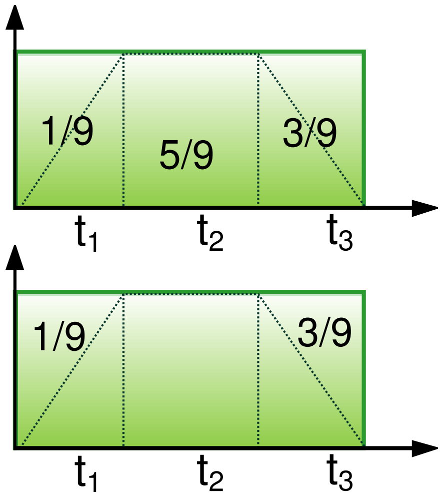
由右側算 $v=\beta\cdot t_2=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t$ 故，距離=△面積

$$=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}=\frac{1}{2}\times t\times\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t=\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t^2$$

範例 42：

【解答】：13:9

【解析】：到底要畫哪一種圖呢？_v-t_圖，why?



$V=\frac{d}{T}\quad \therefore V\times T=d$ ——————— ①

$v_{Max}\times T=\frac{d}{9}+d+\frac{3}{9}d=\frac{13}{9}d$ ———— ②

②/①$=\frac{v_{Max}}{V}=\frac{13}{9}$

範例 43：

【解答】：65

【解析】：先畫圖瞭解題意：「乙火車尾端超過甲火車頭」表示乙要比甲多走 400 公尺乙的速度變化分成兩段：第一段先增至 60m/s，因加速度=2m/s^2，故需 30 秒

先看 30 秒：乙走$\frac{1}{2}\times 2\times 30^2=900$(公尺)

甲走 30×40=1200(公尺) 尚未達到「乙要比甲多走 400 公尺」

假設再需 t 秒，乙追上：

(900＋60t) － (1200＋40t)＝400　　解得 t＝35

故共需(30+35)=65 秒

範例 44：

【解答】：4

【解析】：(略，見講義)

範例 45：

【解答】：1

【解析】：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

範例 46：
【解答】：4
【解析】：

切點	(1,1)	(2,4)	(3,9)	(4,16)	(5,25)
切線斜率	2	4	6	8	10

範例 47：
【解答】：2t+2, 2, 等加速度
【解析】：

$$x = t^2 + 2t + 3$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = 2t + 2$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = 2$$

(等加速度)

範例 48：
【解答】：$3t^2 + 2t + 2$, 6t+2, 變加速度
【解析】：

$$v = 3t^2 + 2t + 2$$

$$a = 6t + 2$$

(變加速度)

範例 49：
【解答】：2, 等加速度
【解析】：$v = 2t + 3$

a=2

範例 50：

【解答】：

(1) 6	(2) 正方向	(3) 直線	(4) 14
(5) 3	(6) $0 \le t < 3$	(7) 4/3	(8) 50/3
(9) 8	(10) 4	(11) 40/3	(12) 20/3
(13) －8	(14) $0 \le t < 4/3$	(15) 16	(16) －12
(17) －12			

【解析】：1. x(0)=6

2. v(0)=16>0

3. 直線(軌跡要看 y－x 的關係不是看 x－t 的關係)

4. x(2)=14

5.

$$x = 6 + 16t - 6t^2 = 0$$

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

$$(t-3)(3t+1) = 0$$

$$t = 3$$

6. $0 \le t < 3$

7. v＝16－12t＝0　t＝4/3

8. x(4/3)＝50/3

9. x(2)－x(0)＝14－6＝8

10. 8/2＝4

11. x(4/3)－x(0)＋x(4/3)－x(2)＝40/3

12. 40/3÷2＝20/3

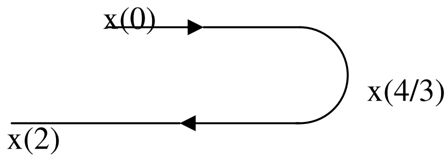
13. v(2)＝－8

14. $0 \le t < 4/3$

15. v(0)＝16

16. a(2)=－12

17. $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(2) - v(0)}{2} = \dfrac{-8-16}{2} = -12$



18.