

## 提要 219：三度空間中之曲面表示法

三度空間中之曲面表示法至少有兩種，一是純量表示法，另一是向量表示法，說明如下。

### 三度空間中之曲面表示法

三度空間中之曲面表示法至少有兩種，說明如下：

1. **利用高度變化表示一曲面(純量表示法)**：如圖 1 所示， $xy$  平面上任意點  $(x, y, 0)$  至曲面之高度距離  $z$  可形成一曲面  $f(x, y, z) = c$ ，且其高度距離可表為  $z = g(x, y)$ 。

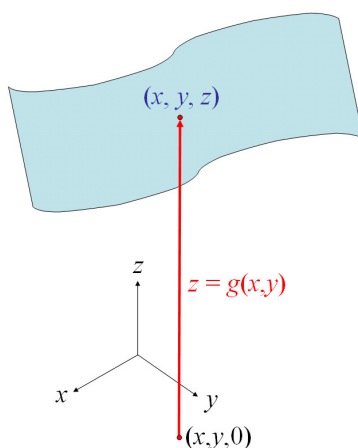


圖 1 曲面上任意點之高度可由  $z = g(x, y)$  推求出來

2. **利用參數式表示一曲面(向量表示法)**：曲線需要一個參數  $t$  才能將曲線表明出來，曲面則需要兩個參數  $u$ 、 $v$  才能將曲面表明出來。如圖 2 所示，曲面上之任意點  $(x, y, z)$  所構成的位置向量  $\mathbf{r}$  可由參數  $u$ 、 $v$  之調整得知，即  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ，其中參數  $u$ 、 $v$  表曲線之座標變數。

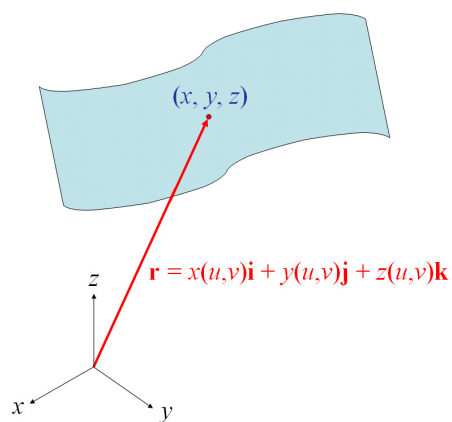


圖 2 以  $\mathbf{r}(u, v)$  表示曲面之示意圖

附註：以上純量表示法之解釋，係假設曲面上之任意點均可找到高度  $z$  與變數  $x$ 、 $y$  的關係，其實這是不一定的，但在解題上並無困難，以下範例就是一例。

### 範例一

試說明如圖 3 所示圓柱曲面方程式  $x^2 + y^2 = a^2$ 、 $-1 \leq z \leq 1$  之向量表示法。

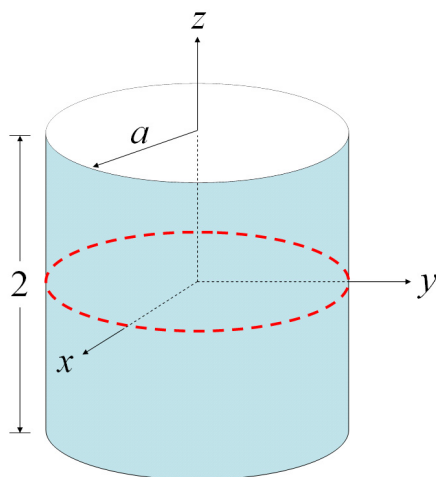


圖 3  $x^2 + y^2 = a^2$ 、 $-1 \leq z \leq 1$  所示圓柱曲面

解答：

令  $x = a \cos u$ 、 $y = a \sin u$ 、 $z = v$ ，由曲面方程式知，曲面上之任意點  $(x, y, z)$  所構成的位置向量  $\mathbf{r}$  為：

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = a \cos u\mathbf{i} + a \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

其中  $0 \leq u < 2\pi$ 、 $-1 \leq v \leq 1$ 。