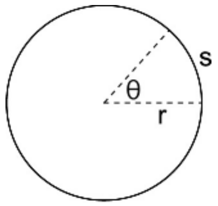
第一章　三角函數

1-1 弧度角

一 平面角表示法

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>1. 巴比倫制：將完整的圓周對圓心的張角定為 360 度。
即 1 度=1/360 圓</td></tr>
<tr><td>2. 弧度制（弳）：$\theta=\dfrac{s}{r}$，即 1 弳＝$\dfrac{\text{和半徑等長之弧}}{\text{半徑}}$</td></tr>
</table>

二 弧度角之換算

1. 從弧度的定義可知，弧度之量值即為該圓心角所張開之弧長為半徑的若干倍，所以弧度雖然用弳或 rad 表示，但其實為零因次單位。

2. $1^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}$（rad）　$1\text{ rad}=\dfrac{180^{\circ}}{\pi}\approx 57.3^{\circ}$

3. 若已知半徑和圓心角，可以反推弧長，即 $s=r\theta$。

練習

◎ 試將下列 1.～4.題做弧與角度的換算。

1. $120^{\circ}=$？

2. $90^{\circ}=$？

3. $\dfrac{3\pi}{2}=$？

4. 4 弳＝？

5. 半徑 6 公分的圓周內，圓心角 120° 所對應之弧長為若干公分？

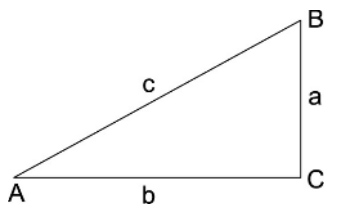
答：**1.** $\dfrac{2\pi}{3}$　**2.** $\dfrac{\pi}{2}$　**3.** 270°

4. 229.2°　**5.** 4π 公分

1-2 三角函數的定義

一 銳角三角函數

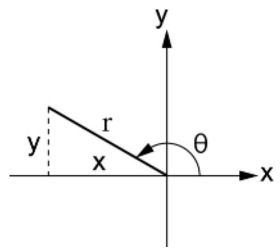
由直角三角形斜邊長，以及某一銳角的對邊和鄰邊，可定義出六種比例如下表：



$\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{a}{c}$	$\cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\frac{b}{c}$	$\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\frac{a}{b}$
$\csc A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\frac{c}{a}$	$\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\frac{c}{b}$	$\cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\frac{b}{a}$

二 廣義角的三角函數

以 x 軸之正向為始邊，做出一廣義角 θ ，若（x,y）為 θ 的終邊上某點，且距原點 r，則此角度之三角函數定義如下表：



$\sin\theta=\frac{y}{r}$	$\tan\theta=\frac{y}{x}$ ；$x\neq 0$	$\sec\theta=\frac{r}{x}$ ；$x\neq 0$
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	$\cot\theta=\frac{x}{y}$ ；$y\neq 0$	$\csc\theta=\frac{r}{y}$ ；$y\neq 0$

三 常用特殊角之三角函數數值表

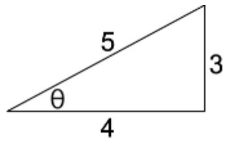
角度＼函數	0^o	15^o	30^o	37^o	45^o	53^o	60^o	75^o	90^o	180^o	270^o
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	註	$\frac{\pi}{4}$	註	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	-1	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$		0	

註：邊長比為 3：4：5 之直角三角形在物理上相當常用

其中 $\sin\theta=3/5=0.6$　$\cos\theta=4/5=0.8$　$\tan\theta=3/4=0.75$

和　$\sin 37^{o}=0.6018$　$\cos 37^{o}=0.7986$　$\tan 37^{o}=0.7536$

非常接近，所以物理上都將此三角形近似為 $37^{o}-53^{o}-90^{o}$ 之直角三角形



四 反三角函數

意義：以三角函數之數值來表示某個主值角度的方法。

1. 反正弦：

設 $a\in R$；且 $-1\le a\le 1$，若 $\sin\theta=a$，則在角度範圍 $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 內；θ 可記為 $\sin^{-1}a$

2. 反餘弦：

設 $a\in R$；且 $-1\le a\le 1$，若 $\cos\theta=a$，則在角度範圍 $0\le\theta\le\pi$ 內；θ 可記為 $\cos^{-1}a$

3. 反正切：

設 $a\in R$；且 $-\infty\le a\le\infty$，若 $\tan\theta=a$，則在角度範圍 $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 內；θ 可記為 $\tan^{-1}a$

例如：$\sin 45^{o}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ➔ $45^{o}=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

練習

◎ 試算出下列各題的數值。

1. $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**2.** $\sin^{-1}(-1)$

3. $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**4.** $\cos^{-1}(-0.5)$

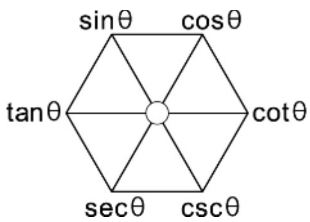
5. $\tan^{-1}\sqrt{3}$　　**6.** $\tan^{-1}(\dfrac{-1}{\sqrt{3}})$

答：**1.** $\dfrac{\pi}{3}(=60^{o})$　**2.** $-\dfrac{\pi}{2}(=-90^{o})$　**3.** $\dfrac{\pi}{6}(=30^{o})$

4. $\dfrac{2\pi}{3}(=120^{o})$　**5.** $\dfrac{\pi}{3}(=60^{o})$　**6.** $-\dfrac{\pi}{6}(=-30^{o})$

1-3 三角函數基本關係及常用公式

一 基本關係



餘角關係	$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$；$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$
	$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$；$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$
	$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$；$\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$
倒數關係	$\sin\theta\csc\theta=1$
	$\cos\theta\sec\theta=1$
	$\tan\theta\cot\theta=1$
平方關係	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
	$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$
商數關係	$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

範例 1 求 $(1+\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(1-\cos 45^\circ+\cos 60^\circ)=$ ＿＿＿＿＿

〔詳解〕原式 $=(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2})(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2})=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9-2}{4}=\underline{\underline{\dfrac{7}{4}}}$

範例 2 $\sin 330^\circ=?$

〔詳解〕$\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

範例 3 若 $\tan\theta=2$，試求 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ 的值。

〔詳解〕$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$

練習

1. 設 $\angle A$ 為銳角且 $\tan A=\dfrac{3}{4}$，求 (1) $\sin A=?$；(2) $\sec A=?$

2. θ為銳角：(a) $\cot\theta=\dfrac{12}{5}$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$?；(b) $\cot\theta=2$，則 $\dfrac{\sin\theta+5\cos\theta}{\cos\theta-3\sin\theta}$

$=$？

3. 下列何者無意義？

(A) $\tan 270°$ (B) $\cot 270°$ (C) $\sec 270°$ (D) $\csc 270°$

4. 下列何者為真？

(A) $\cos\theta=\cos(-\theta)$ (B) $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

(B) $\tan 280°=-\tan 80°$ (D) $\tan 260°=\cot 10°$

5. $\tan 405°=$?

6. $\sin(90°-\theta)\cos(360°+\theta)+\sin(-\theta)\cos(270°-\theta)=$？

答：**1.** (1)$\dfrac{3}{5}$；(2)$\dfrac{5}{4}$ **2.** (a)$-\dfrac{7}{13}$；(b) -11 **3.** AC

4. ABCD **5.** 1 **6.** 1

二 常用公式

和角公式	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
差角公式	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

和差化積	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$
	$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\sin(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$
	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$
	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\sin(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$

積化和差	$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
	$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
	$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
	$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

二倍角	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
	$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
半角公式	$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
	$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
平方公式	$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$
	$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$
	$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

範例 1 試求 $\sin 123°\cos 27°+\cos 123°\sin 27°=$？

〔詳解〕原式$=\sin(123°+27°)=\sin 150°=\sin(180°-150°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$

範例 2 $\sin 22.5° = ?$

〔詳解〕原式 $=\sin\dfrac{45°}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

練習

1. 試求 $\cos 20° \cos 70° - \sin 20° \sin 70° = ?$
2. $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，求 $\sin 2\theta$、$\cos 2\theta$ 的值。
3. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ 且 $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，求(1) $\sin^2\dfrac{\theta}{2}$；(2) $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 之值。
4. 求(1) $\sin^2 30°+\cos^2 60°+\tan 60° \cos 30° = ?$；(2) $\sin^2 60°+\sec^2 45° = ?$
5. (1) $\tan 22.5° = ?$；(2) $\sin 15° = ?$；(3) $\tan 15° = ?$

答：**1.** 0　**2.** $-\dfrac{24}{25}$；$\dfrac{7}{25}$　**3.** (1) $\dfrac{9}{10}$；(2) $\dfrac{1}{10}$

4. (1) 2；(2) $\dfrac{11}{4}$　**5.** (1) $\sqrt{2}-1$；(2) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；(3) $2-\sqrt{3}$

三 正弦與餘弦定律

以若 A、B、C 表示平面三角形之三內角；a、b、c 表示其相對應邊長。

正弦定理：

數學表示式：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

餘弦定理：

數學表示式：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

範例 1 △ABC 中，若$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，則 $a:b:c=$？

〔詳解〕$\angle A=\dfrac{3}{3+4+5}\times 180^\circ=45^\circ$，同理$\angle B=60^\circ$、$\angle C=75^\circ$

$$a:b:c=\sin\angle A:\sin\angle B:\sin\angle C=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$$

範例2 △ABC 中，$\overline{AB}=\sqrt{6}$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CA}=\sqrt{3}+1$，則 $\sin C=$？

〔詳解〕$(\sqrt{6})^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times 2\times(\sqrt{3}+1)\cos C$

$$\cos C=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\text{註}}$：正弦定理和餘弦定理在物理學的應用部分，請參考”向量”章節

練習

1. △ABC 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，則 $\sin B=$？
2. △ABC 中，若 $b=(\sqrt{3}+1)a$，$\angle C=30^\circ$，求$\angle B=$？

答：**1.** $\frac{3\sqrt{15}}{16}$ **2.** 135°

四 三角函數的展開與近似值

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

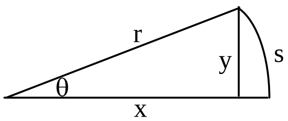
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\ldots\ldots$$

$\therefore$當 $x\cong 0$ 時 $\sin x\cong x$，$\tan x\cong x$ (省略 x^3 次方後，更小之數列)

若以幾何來看

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\cong\frac{s}{r}=\theta$$



$$\tan\theta=\frac{y}{x}\cong\frac{y}{r}=\sin\theta\cong\theta$$

對照表

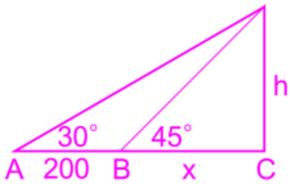
	$5^{\circ}=\frac{\pi}{36}$ rad $\cong 0.0873$ rad	$10^{\circ}=\frac{\pi}{18}$ rad $\cong 0.1745$ rad	$20^{\circ}=\frac{\pi}{9}$ rad $\cong 0.3491$ rad	$30^{\circ}=\frac{\pi}{6}$ rad $\cong 0.5236$ rad
$\sin\theta$	$\sin 5^{\circ}=0.0872$	$\sin 10^{\circ}=0.1736$	$\sin 20^{\circ}=0.3420$	$\sin 30^{\circ}=0.5000$
$\tan\theta$	$\tan 5^{\circ}=0.0875$	$\tan 10^{\circ}=0.1763$	$\tan 20^{\circ}=0.3640$	$\tan 30^{\circ}=0.5774$

由上表可看出，當角度夠小時，可以用 θ 來取代正弦和正切的函數值，角度愈大誤差也愈大，一般而言，在 $\theta<5^{\circ}$ 的範圍內，都可視為 $\sin\theta\cong\tan\theta\cong\theta$

1-4 應用

範例 1 某人測量一山頂的仰角為 30°，向山前進 200 m 後，再測得山頂的仰角為 45°，則山高＝＿＿＿＿＿m。

〔詳解〕設山高 h，$\overline{BC}$ 長 x；所以 $\overline{AC}$ 長 $200+x$



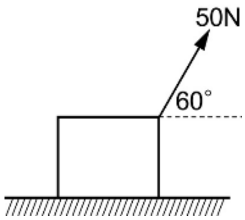
$x=h\cot 45^{\circ}$ ……①

$200+x=h\cot 30^{\circ}$ ……②

②-① ➔ $200=h(\sqrt{3}-1)$

$h=\dfrac{200}{\sqrt{3}-1}=100(\sqrt{3}+1)$

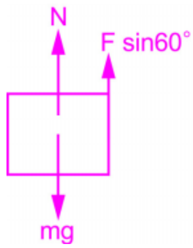
範例 2 如右圖，$g=10\ \text{m/s}^2$，一木塊質量 20 公斤，以 50 牛頓之拉力，在光滑地面上沿仰角 60° 拉之，則：(1)木塊的加速度為何？ (2)地面支撐木塊之力為何？



〔詳解〕(1) 外力的水平分力為 $50\cos 60^{\circ}$ 牛頓＝25 牛頓

➔ $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{25}{20}=1.25\ (\text{m/s}^2)$

(2) $N+F\sin 60^{\circ}=\text{mg}$



➔ $N=200-50\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=200-25\sqrt{3}$（牛頓）

範例 3 將一質點以 v_0 從屋頂水平拋出，若著地瞬間其速度方向和地面夾角為俯角 37°，試求：(1)著地之瞬時速度量值為何？　(2)共歷時多久？　(3) h 之高度為何？

〔詳解〕(1) 水平拋體之水平速度保持不變

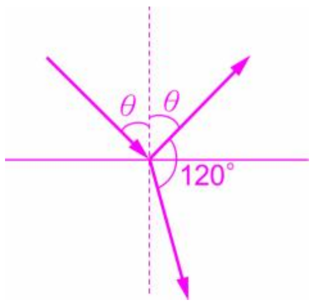
所以著地速率 $= v_0 \sec 37^\circ = \dfrac{5}{4} v_0$

(2) 著地速度之鉛直分量 $v_y = \dfrac{3}{4} v_0$

歷時 $t = \dfrac{v_y}{g} = \dfrac{3v_0}{4\,g}$

(3) $h = \dfrac{v_y^2}{2g} = \dfrac{(\frac{3}{4} v_0)^2}{2g} = \dfrac{9\,v_0^2}{32\,g}$

範例 4 已知水的折射率為 $\dfrac{4}{3}$，光線由空氣射入水面時，反射線與折射線間之夾角為 120°，則入射角為何？



〔詳解〕假設入射角為 θ

則折射角為 $180^\circ - \theta - 120^\circ = 60^\circ - \theta$

根據司乃耳定律 $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$1 \times \sin\theta = \dfrac{4}{3} \sin(60^\circ - \theta)$

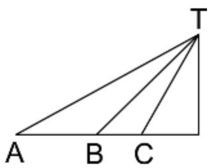
$\sin\theta = \dfrac{4}{3}(\sin 60^\circ \cos\theta - \cos 60^\circ \sin\theta)$

$\dfrac{5}{3} \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cos\theta$

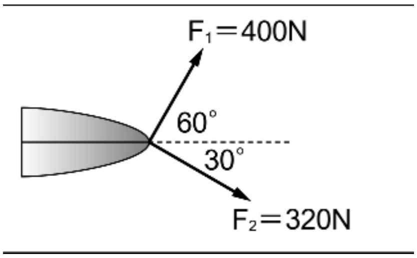
$\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\dfrac{2\sqrt{3}}{5})$

練習

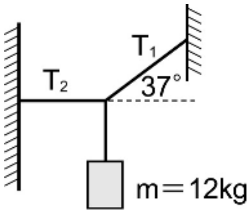
1. 右圖某人在 A 點測得旗桿頂 T 的仰角為 30°，朝旗桿走 10 公尺至 B 點，再測得 T 的仰角為 45°，則再走多少公尺至 C 後，T 的仰角會變為 60°？



2. 二個大人與一個男孩沿一運河拖拉一船，此二大人的拉力分別為 F_1 與 F_2，F_1 與 F_2 之大小與方向如下圖(一)。欲保持船在運河中央，小孩所施的拉力及其方向為何？



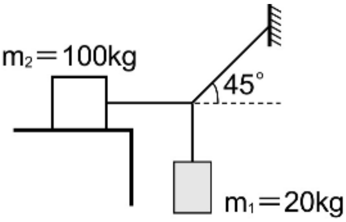
圖(一)



圖(二)

3. 如上圖(二)，若此系統在平衡狀態，m ＝12 公斤重，則 T_1、T_2 繩上張力各為若干？

4. m_2＝100 kg 置於摩擦係數 0.30 之桌面上，另 m_1＝20 kg，如右圖，此系統在平衡狀態下時，作用於 m_2 物體之摩擦力為若干 kgw？



5. 承上題，整個系統保持平衡時，m_1 之最大值為若干？

6. 質量為 m 之物體，在水平面上，受一方向與水平面夾 θ 之拉力作用，而作等速運動，設物體與水平面間之動摩擦係數為 μ，則此拉力大小為若干？

7. 光線由介質 1 以 37^o 入射角射入介質 2 時，其折射角 30^o，若改以 53^o 入射，求折射角為若干？

8. 一束波長 6000 埃的橙色光射入一透明液體面上，入射角 30^o 折射角 $\sin^{-1}\frac{3}{8}$，若入射角接近 90^o 時，則折射角接近若干度？

答：**1.** $\frac{10}{\sqrt{3}}$ 公尺　**2.** $200\sqrt{3}-160$ 牛頓，和運河垂直，向 F_2 一邊

3. T_1＝20 kgw，T_2＝16 kgw　**4.** 20 kgw　**5.** 30 kg

6. $\frac{\mu mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$　**7.** $\sin^{-1}\frac{2}{3}$　**8.** $\sin^{-1}\frac{3}{4}$