§2–3 正弦定理與餘弦定理

(甲)三角形面積

(1)邊角關係

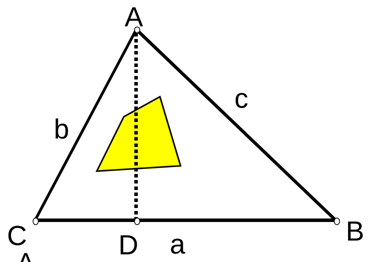
①在△ABC 中，通常以 a,b,c 分別表∠A,∠B,∠C 的對邊長。

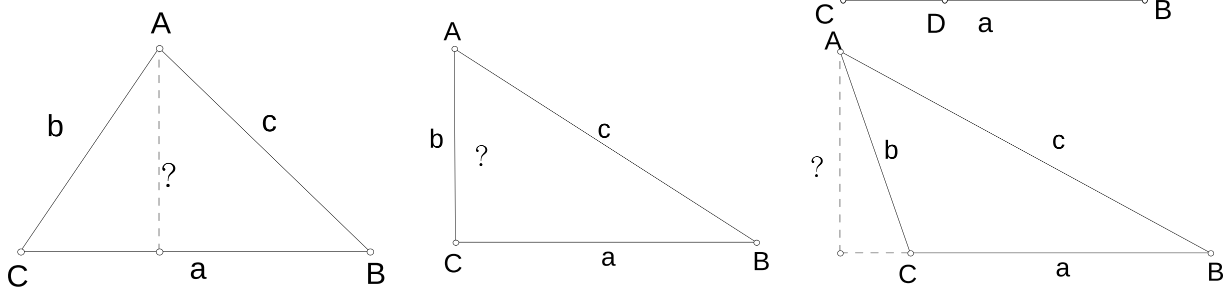
②邊的關係：a>0,b>0,c>0，且|b−c|<a<b+c

③角的關係：0°<A,B,C<180°，且 A+B+C=180°

(2)三角形的面積公式：

國中△ABC 面積= $\frac{1}{2}$×底×高，以底與高的長度表示面積但是當$\overline{BC}$邊上的『高』不容易求出來的時候(如有障礙物)，我們可以利用三角函數邊角的關係式間接求出高，於是△ABC 的面積=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b}\sin C}$





∠C是銳角　∠C是直角　∠C是鈍角

事實上圖中，∠C 是銳角，當∠C 是直角或是鈍角時 △ABC，

$\overline{BC}$邊上的高仍然是 $\boxed{\boldsymbol{b}\times\mathbf{sinC}}$

∴△ABC 面積=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b}\sin C}$

同理由對稱性得△ABC 的面積公式=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b}\times\sin C= \frac{1}{2}\times \boldsymbol{b}\times \boldsymbol{c}\times\sin A= \frac{1}{2}\times \boldsymbol{c}\times \boldsymbol{a}\times\sin B}$

例子：已知正△ABC 每邊的長是 a，求其面積。

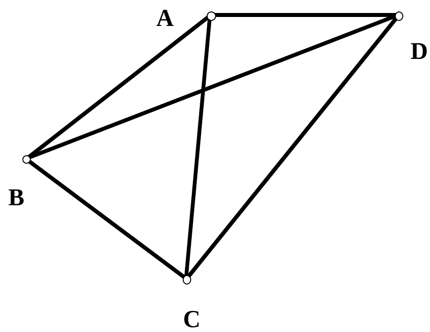
結論：

△面積記憶法⇒利用三角函數定義，由△=$\frac{1}{2}$×底×高，導出兩邊夾角求面積，即

△=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b}\times\sin C= \frac{1}{2}\times \boldsymbol{b}\times \boldsymbol{c}\times\sin A= \frac{1}{2}\times \boldsymbol{c}\times \boldsymbol{a}\times\sin B}$ (兩邊夾一角)

[例題1] 四邊形 ABCD，設θ爲對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的一個交角，

求證：此四邊形的面積爲$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}\sin\theta$。

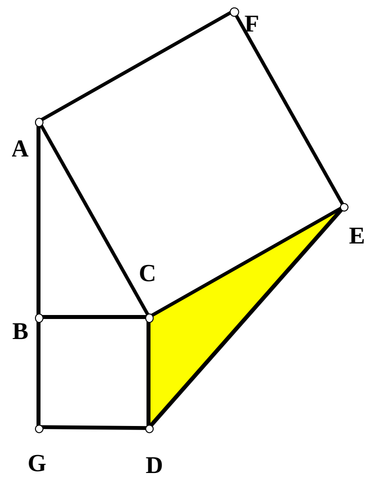


[例題2] 設ΔABC 爲直角三角形，ACEF 是以$\overline{AC}$爲一邊向外作出的正方形，

BCDG 是以$\overline{BC}$爲一邊向外作出的正方形，若 AC=5、AB=4、BC=3，

試求(a)cos(∠DCE) (b)ΔDCE 的面積。

Ans：(a)$\frac{-3}{5}$ (b)6



(練習1) 四邊形兩對角線爲 12 與 5，若兩對角線的夾角爲θ_1,θ_2，且$\theta_1=2\theta_2$則其面積爲__________。Ans：$15\sqrt{3}$

(練習2) 已知一三角形 ABC 的二邊 AC=5，AB=8，cosA=$\frac{4}{5}$，則ΔABC 的面積爲________。 Ans：12

(乙)正弦定理

國中幾何曾經學過「大邊對大角」這個性質，但這個性質只說角大則邊大，邊大則角大，這種說法似乎只是一種對於邊角關係的「**定性描述**」，那麼邊角之間有沒有「**定量的描述**」呢?我們用以下的定理來回答這個問題：

正弦定理：在ΔABC 中，以 a,b,c 表示∠A，∠B，∠C 之對邊長度，

則$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 爲ΔABC 外接圓的半徑。

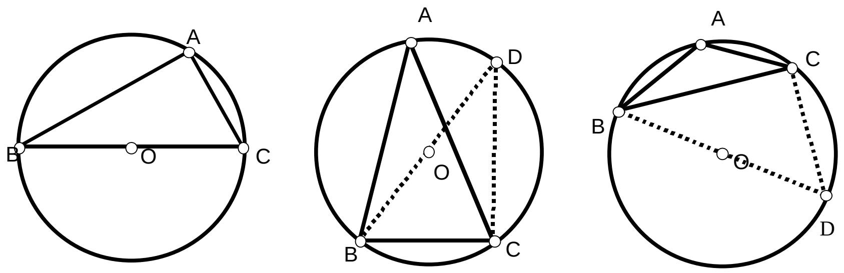
證明：

由前面三角形的面積公式：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin C=\frac{1}{2}\times b\times c\times \sin A=\frac{1}{2}\times c\times a\times \sin B$

等號兩邊同除abc，可得 $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 。

但是$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ =？我們由以下的證明來說明：

我們將ΔABC分成直角、銳角、鈍角三種情形來討論，如下圖所示：



(1)當$\angle A=90^\circ$　(2)當$\angle A<90^\circ$　(3)當$\angle A>90^\circ$

(1)$\angle A=90^\circ\Rightarrow\frac{a}{\sin 90^\circ}=a=\overline{BC}$=外接圓直徑=2R $\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(2)$\angle A$為銳角：

過B做圓O的直徑$\overline{BD}$，因為$\angle A$與$\angle D$對同弧($\overset{\frown}{BC}$)，因此$\angle A=\angle D$。

考慮直角三角形BCD，由銳角三角形的定義可知$\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A$

$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=BD$=外接圓直徑=2R $\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

(3)$\angle A$為鈍角：

過B做圓O的直徑$\overline{BD}$，因為$\angle A+\angle D=180^\circ$，所以$\sin\angle D=\sin(180^\circ-\angle A)=\sin A$

考慮直角三角形BCD，由銳角三角形的定義可知$\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A$

$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=BD$=外接圓直徑=2R $\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

結論：正弦定理的用法

正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 的轉換(以 R 為媒介)

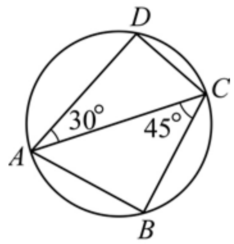
(a)比例型：____________________=_______________________

(b)邊化角：a=____________，b=_____________，c=_______________

(c)角化邊：sinA=_________，sinB=_________，sinC=_____________

[例題3] ΔABC中　，a,b,c分別代表$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$之對邊長度：
(1)若$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$，試求sinA:sinB:sinC。
(2)若$\angle B=55^\circ$，$\angle C=65^\circ$，$a=10$ 公分，試求外接圓半徑。
Ans：(1)4:3:2 (2)$\dfrac{10\cdot\sqrt{3}}{3}$ 公分

[例題4] 設圓內接四邊形 ABCD 中$\angle CAD=30°$，$\angle ACB=45°$，$\overline{CD}=2$，則$\overline{AB}=$________。
Ans：2



(練習3) 利用三角形的面積公式與正弦定理，證明：ΔABC 的面積為$\dfrac{abc}{4R}$。
(R 為外接圓半徑)

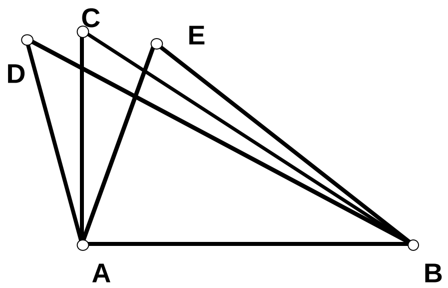
(練習4) 在下列各條件下，求△ABC 的外接圓半徑 R。
(1)$\angle B=70°$，$\angle C=80°$，a=3。(2)b=2，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Ans：(1)R=3(2)R=2

(練習5) △ABC中，$\angle A=60°$，$\angle B=75°$，$\overline{AC}=\sqrt{3}+1$，求(1)$\overline{BC}$之長(2)$\overline{AB}$之長
Ans：(1)$\overline{BC}=\sqrt{6}$(2)$\overline{AB}=2$　($\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$)

(練習6) 以 a,b,c 分別表示△ABC 之三邊$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$的長，試在下列各條件下，求 sinA：sinB：sinC。(已知 $\sin 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)
(1)$\angle A=30°,\angle B=45°$　(2)$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$=3：4：5
(3)$-a+2b-c=0$ 且 $3a+b-2c=0$　(4)(a+b)：(b+c)：(c+a)=5：6：7
Ans：
(1)2：$2\sqrt{2}$：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　(2)$2\sqrt{2}$：$2\sqrt{3}$：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　(3)3：5：7 (4)3：2：4

(丙)餘弦定理

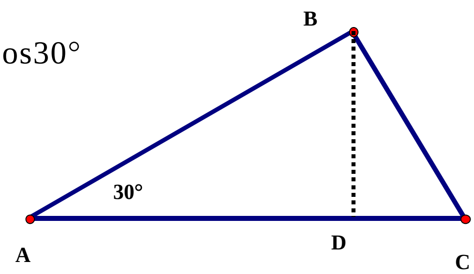
直角三角形中的寶藏是畢氏定理。即在直角△ABC中，若夾角∠C=90°則知兩鄰邊a,b，可由畢氏定理$c^2=a^2+b^2$求出對邊c；對於一般的三角形，如果夾角給定，但不一定是直角，如何求第三邊的長呢？此時，餘弦定理就代替了直角三角形特有的畢氏定理。



觀察右上圖，ΔABC為直角三角形，且AC=AD=AE=b，AB=c，BC=a，根據商高定理可得$a^2=b^2+c^2$，即$b^2+c^2-a^2=0$。在鈍角ΔADB與銳角ΔAEB中我們考慮$b^2+c^2-DB^2$與$b^2+c^2-BE^2$的值，從圖形中可猜出$b^2+c^2-DB^2<0$ 而$b^2+c^2-BE^2>0$，但進一步我們不禁會問這兩個值會不會與邊或角的三角函數有關呢？我們用以下的定理回答這個問題：

例子：設ΔABC中，∠A=30°，$\overline{AB}=6$,$\overline{AC}=7$，請求出$\overline{BC}$=？

[解法]：



作高$\overline{BD}$，$\overline{AD}=6\cdot\cos30°$，$\overline{BD}=6\cdot\sin30°\Rightarrow\overline{CD}=7-6\cdot\cos30°$

在ΔBDC中，∠BDC=90°

$\Rightarrow\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overline{BC}^2&=(6\cdot\sin30°)^2+(7-6\cdot\cos30°)^2\\&=6^2(\sin^2 30°)+7^2-2\times6\times7\times\cos30°+6^2(\cos^2 30°)\\&=6^2(\sin^2 30°+\cos^2 30°)+7^2-2\times6\times7\times\cos30°\\&=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos30°\end{aligned}$$

上例的解法，對於∠A為鈍角或直角時都會成立，我們將其寫成底下的定理。

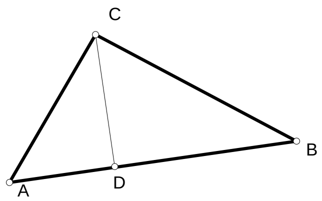
餘弦定理：在ΔABC中，若a,b,c為∠A，∠B，∠C之對邊長，則

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

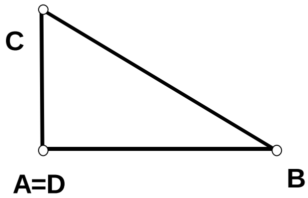
證明：在ΔABC中，依∠A爲銳角、直角、鈍角三種情形來說明：

設C點對AB邊或其延長線的垂足點爲D

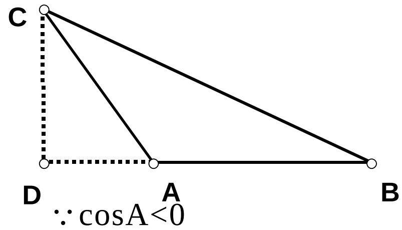
(1) ∠A爲銳角



(2) ∠A爲直角



(3) ∠A爲鈍角



∵ $\cos A>0$

∴ $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=c-b\cdot\cos A$

∵ $\cos A=0$

∴ $\overline{BD}=\overline{AB}=c-b\cdot\text{co}A$

∵ $\cos A<0$

∴ $\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{BD}=c+|b\cdot\cos A|$

$=c-b\cdot\cos A$

由以上的討論可知：不論∠A爲銳角、直角、鈍角均可得$\overline{BD}=c-b\cdot\cos A$。

又因爲$a^2=\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=(c-b\cdot\cos A)^2+(b\cdot\sin A)^2$

$=c^2-2bc\cdot\cos A+b^2\cdot\cos^2 A+b^2\cdot\sin^2 A$

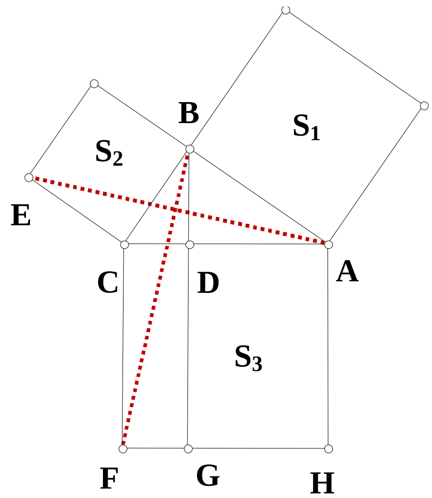
$=c^2+b^2-2bc\cdot\cos A$

故$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，同理可證$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$。

[畢氏定理的圖解]

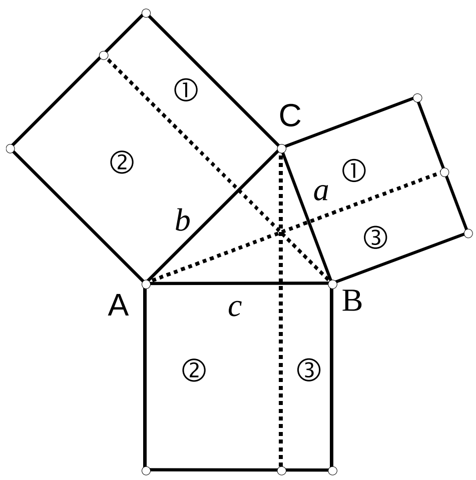
歐幾里得證明了矩形ADGH面積=S_1，
矩形CDGF面積=S_2，因此可得$S_3=S_1+S_2$。

據此可證明$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$。



[餘弦定理的圖解]

餘弦定理的面積證法：



$c^2=②+③=(①+②)+(①+③)-2\times①=b^2+a^2-2ab\cdot\cos C$

結論：

(a)由餘弦定理，可知$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ ，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(b)從(a)可知 $\angle A=90^\circ \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$　$\angle A<90^\circ \Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$　$\angle A>90^\circ \Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$

[例題5] 在ΔABC 中已知 sinA:sinB:sinC= 4:5:7，則求 cosC =？sinC=？

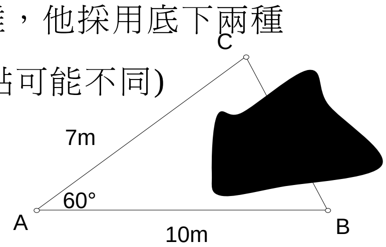
Ans：$\dfrac{-1}{5}$、$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

(練習7) △ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，∠A 角度如下，試分別求出$\overline{BC}$之長。

(1)∠A=60°　(2)∠A=90°　(3)∠A=138°　已知 cos42°=0.7431

Ans：(1)$\sqrt{13}$(2)5(3)6.54

(練習8) 池塘旁有 B,C 兩點，小明想知道 B,C 兩點間的距離，他採用底下兩種方法，試根據所得資料求出$\overline{BC}$距離？(兩者所在地點可能不同)



法一：

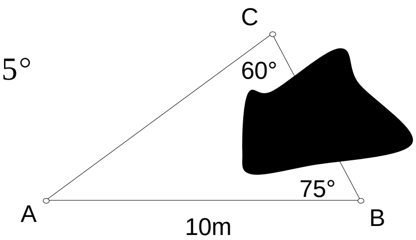
他走到遠處 A 點，並量得∠BAC=60°，$\overline{AC}$=7m

$\overline{AB}$=10m，請問$\overline{BC}$=？

法二：

他走到遠處 A 點，並測得∠ACB=60°，∠ABC=75°

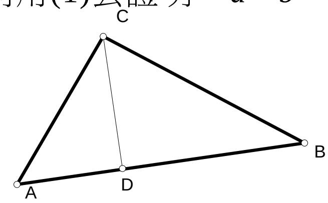
$\overline{AB}$=10m，請問$\overline{BC}$=？Ans：(1)$\sqrt{79}$(2)$\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$

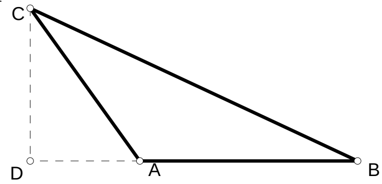


(練習9) 在ΔABC中，若a,b,c分別代表ΔABC的三邊長$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$之長。

(1)試證：$a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$，$b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos B$，$c=a\cos B+b\cos A$

(2)利用(1)去證明：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。





(練習10) ΔABC中，若$(a+b+c)(a+b-c)=3bc$，則∠C=________。　Ans：60°

(練習11) ΔABC中，若$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}-1)$，則∠B=_______。Ans：$135^\circ$

(練習12) 設a,b,c為ΔABC的三邊長且滿足$(a-2b+c)^2+(3a+b-2c)^2=0$，若θ為ΔABC的最大內角，求cosθ =______。　Ans：$\dfrac{-1}{2}$

(丁)正餘弦定理的應用

(1)解三角形：

(a)三角形的全等性質有SSS、SAS、AAS、ASA、斜股性質，我們可以利用正餘弦定理來解出唯一的三角形。

(b)SSA型的討論：ΔABC中，若已知a,b及∠A

[想法]：設$\overline{AC}=b$，利用尺規在∠A的邊$\overrightarrow{AX}$上做出B點使得$\overline{BC}=a$。想要找出另一個頂點B，則圓規打開的半徑大小a，一定要比頂點C到$\overrightarrow{AX}$的距離大才有交點。

(1°)∠A為銳角時，頂點C到$\overrightarrow{AX}$的距離$h=b\cdot\sin A$。

$a<h$時，找不到B點 ⇒無解。(如圖一)

$a=h$時，找到唯一一點B ⇒恰有一解　(如圖二)

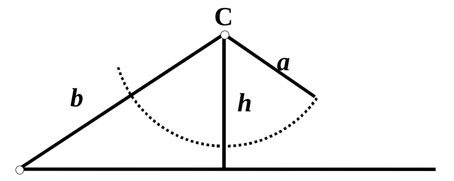
$h<a<b$時，有兩個B點 ⇒有兩解 (如圖三)

$b\le a$時，找到唯一一點B ⇒恰有一解　(如圖四)

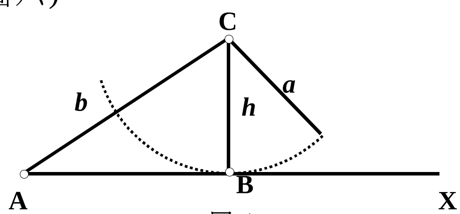
(2°)∠A為鈍角時，頂點C到$\overrightarrow{AX}$的距離$=b$

$a\le b$時，找不到B點 ⇒無解。(如圖五)

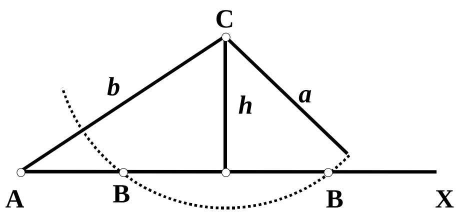
$a>b$時，找到唯一一點B ⇒恰有一解　(如圖六)



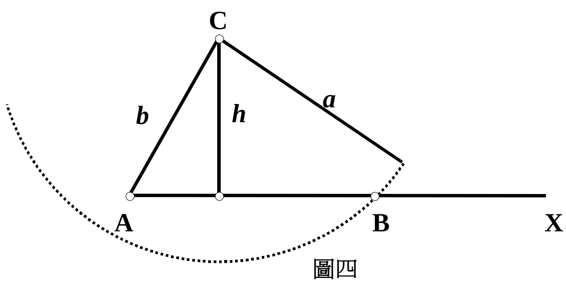
圖一



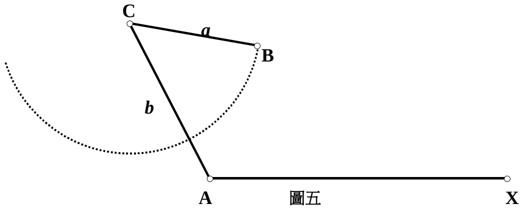
圖二



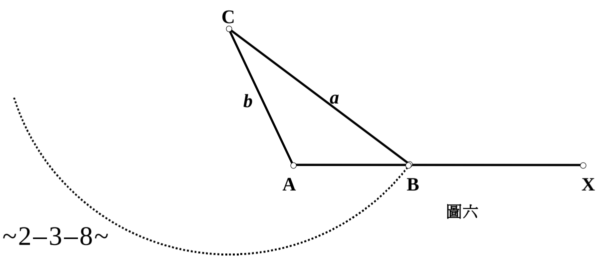
圖三



圖四



圖五



圖六

[例題6] 【已知三邊⇒求三角⇒已知SSS解三角形】

$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，試求三個內角。

Ans：$\angle A=120^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=15^\circ$

[例題7] 【已知兩邊夾角SAS⇒解三角形求全部邊角】

設$\triangle ABC$中，$\overline{AC}=2$，$\overline{AB}=\sqrt{3}+1$，$\angle A=30^\circ$，試求$\overline{BC}$，$\angle B$，$\angle C$。

Ans：$\overline{BC}=\sqrt{2}$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=105^\circ$

[例題8] 【已知二邊一對角⇒即知SSA⇒解三角形】

已知ΔABC中，$\overline{AC}=15$，$\overline{AB}=15\sqrt{3}$ ，$\angle B=30^\circ$，

則$\angle A=$？$\overline{BC}=$？ Ans：$\angle A=90^\circ$，$\overline{BC}=30$；$\angle A=30^\circ$，$\overline{BC}=15$

[例題9] 【已知一邊兩角求邊與角⇒ASA】

△ABC 中,∠A=45°,∠B=60°，$\overline{BC}$=7，求$\overline{AB}$及$\overline{AC}$之長。(sin75°= $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

Ans：$\overline{AB}=\frac{7}{2}(\sqrt{3}+1)$，$\overline{AC}=\frac{7}{2}\sqrt{6}$

(練習13) 在下列各條件中，解三角形 ABC。

(1)a=1,b=2,∠A=60°

(2)a=1,b=2,∠A=30°

(3)a=$2\sqrt{3}$,b=$2\sqrt{2}$,∠A=60°

(4)a=$\sqrt{2}$,b=2,∠A=30°

Ans：(1)無解 (2)c=$\sqrt{3}$,B=90°,C=60°

(3)c=$\sqrt{6}+\sqrt{2}$,B=45°,C=75°

(4)有兩組解①c=$\sqrt{3}$+1,B=45°,c=105°

②c=$\sqrt{3}$–1,B=135°,c=15°

(練習14) 由下列條件解△ABC，何者恰有一解？(A) ∠A＝40°，∠B＝60°，∠C＝80° (B) a＝2，b＝4，c＝6 (C) a＝1，b＝2，∠A＝30° (D) a＝1，b＝3，∠A＝30° (E) a＝1，b＝4，∠C＝40°。

Ans：(C)(E)

(練習15) ΔABC中，AB=1，AC=$\sqrt{3}$ ，∠A=30°，求BC=？，∠B=？

Ans：1，120°

(練習16) ΔABC中，設c=8，∠A=105°，∠B=45°，求b=？ Ans：$8\sqrt{2}$

(2)求三角形的面積：

(a)**Heron公式**

設ΔABC中，a,b,c分別爲∠A，∠B，∠C之對邊長，令$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，

則$S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

[證明]：由餘弦定理，cosB= $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{1}{2}ac\cdot\sqrt{1-\cos^2 B}$$

$$=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}$$

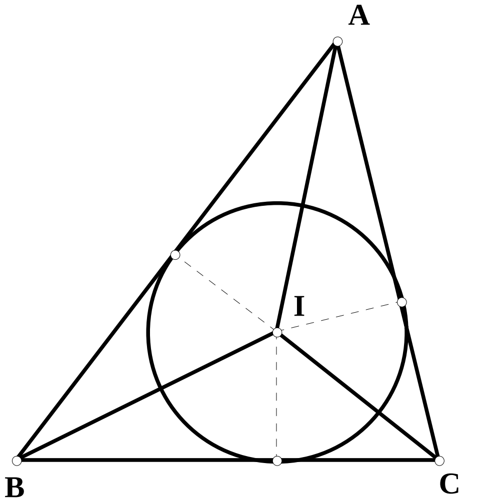
$$=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{1}{2ac}\cdot\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)]^2}$$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(2s)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



(b)三角形 ABC 的面積= $r\cdot s$

(r 爲三角形 ABC 內切圓的半徑)

[證明]

三角形 ABC 的面積

$=\Delta ABI+\Delta BCI+\Delta CAI$

$=\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$

$= r\cdot s$

三角形 ABC 的面積= $\frac{1}{2}$ 底×高 $=\frac{1}{2}bc\sin A$($\frac{1}{2}$ 兩邊乘積×夾角的正弦值) $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　s=周長之半 $=\frac{abc}{4R}$　(R 爲三角形 ABC 外接圓的半徑) $=r\cdot s$　(r 爲三角形 ABC 內切圓的半徑)

(練習17) 已知ΔABC 之三邊長分別爲 4,6,8，則
(1)ΔABC 的面積=？(2)邊長 6 所對應的高=？
(3)ΔABC 的內切圓半徑=？(4)ΔABC 的外接圓半徑=？
Ans：(1)$3\sqrt{15}$ (2)$\sqrt{15}$ (3)$\frac{\sqrt{15}}{3}$ (4)$\frac{16\sqrt{15}}{15}$

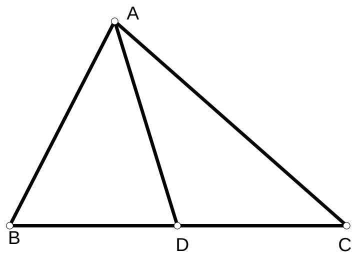
(練習18) 有一凸多邊形ABCD，若$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$=6,$\overline{CD}$=4，$\overline{BD}$=6，∠ABD=30°，則此四邊形的面積=？　Ans：$3+8\sqrt{2}$

(3)三角形或多邊形的邊角計算：

[例題10] 三角形的中線定理

三角形 ABC 中，設 AB=c,BC=a,CA=b，D 爲 BC 之中點，

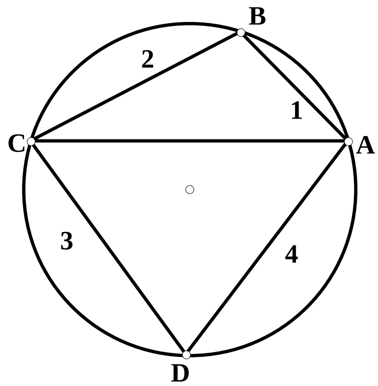
試證：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$ 。



[例題11] 已知圓內接四邊形 ABCD 的各邊長爲AB =1，BC =2，CD =3，AD =4，

則(1)$\overline{\text{AC}}$=？ (2)sin∠ABC=？ (3)ABCD 的面積

Ans：(1)$\sqrt{\frac{55}{7}}$ (2)$\frac{2\sqrt{6}}{7}$ (3)$2\sqrt{6}$

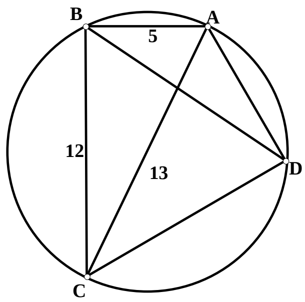


[例題12] ΔABC中，$\angle$A之內角平分線交BC 於D，AB =3，AC =6，$\angle$A=120°，

則AD =_____；CD =_______。 Ans：2；$2\sqrt{7}$

[例題13] 圓內接四邊形ABCD中，$\overline{AB}$=5，$\overline{BC}$=12，$\overline{AC}$=13，$\angle$A=120°，

則$\overline{BD}$=？ Ans：$\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$



[例題14] ΔABC 中若滿足以下條件則其形狀為何？

(1)2cosBsinA=sinC (2)$a\cdot\cos A-b\cdot\cos B+c\cdot\cos C=0$

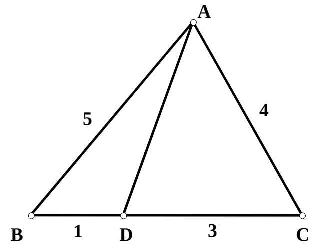
Ans：(1)等腰三角形 (2)直角三角形

(練習19) 設ΔABC 中，AB=15，BC=20，CA=10，AD 為$\angle$A 的分角線，試求 BD=？

AD=？Ans：BD=12，AD=$3\sqrt{6}$　　(提示：可以利用內分比性質)

(練習20) 設$\overline{AM}$為ΔABC上$\overline{BC}$的中線，請證明：
$\overline{AM}^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cos A)$。

(練習21) 如右圖，試求$\overline{AD}$=？Ans：$\frac{\sqrt{79}}{2}$

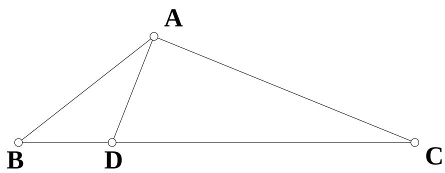


(練習22) ΔABC中，$\angle A=75^\circ$，$\overline{AB}=2\sqrt{6}$，$\overline{AC}=2$，D在$\overline{BC}$上且$\angle BAD=30^\circ$，
求$\overline{AD}$=？　Ans：$\sqrt{6}$

(練習23) 證明：平行四邊形 ABCD 中，對角線平方和=四個邊的平方和。

(練習24) 圓內接四邊形ABCD，$\overline{AB}=\overline{AD}=a$，$\angle C=90^\circ$，$\angle D=105^\circ$，求對角線$\overline{AC}$=？
Ans：$\frac{(\sqrt{3}+1)a}{2}$　($\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

(練習25) 如右圖，ΔABC中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=10$，$\angle BAC=120^\circ$，
$\angle BAD=30^\circ$，則$\overline{AD}$=__________。
Ans：$\frac{30\sqrt{3}}{13}$



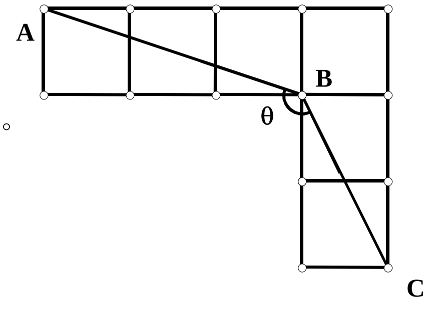
(練習26) 設ΔABC滿足下列條件，試分別決定其形狀：
(1)$\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$　(2)$\cos B\cdot\sin C=\sin B\cdot\cos C$
Ans：(1)鈍角三角形 (2)等腰三角形

綜合練習

(1) 一汽船在湖上沿直線前進，有人儀器在岸上先測得汽艇在正前方偏左 50°，距離為 200 公尺，一分鐘後，於原地再測，知汽艇到正前方偏右 70°，距離 300 公尺，那麼汽艇再這一分鐘內行駛了_______公尺。

(2) 在ΔABC中，已知$\overline{BC}=1$，$\sin A<\sin B$，且$\sin A$與$\sin B$為 $8x^2-4\sqrt{3}\,x+1=0$ 的兩根，則ΔABC的外接圓半徑=？

(3) 如圖，設每一小格皆為正方形，求 $\cos\theta$=？



(4) ΔABC 中，$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，試求$\angle A$。

(5) 已知ΔABC中，$\overline{AC}$=2，$\overline{BC}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$\angle$A=105°，則$\overline{AB}$=？

(6) ΔABC 中，設 a=3，b=4，$\tan A=\frac{3}{4}$，求 c=？

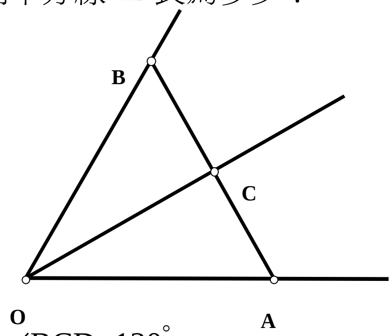
(7) 設ΔABC之三高為h_a=6，h_b=4，h_c=3，則求最小內角之餘弦為____；
最小邊長=______。

(8) 圓內接四邊形ABCD，$\overline{AB}$=5，$\angle$ADC=105°，$\angle$DCB=90°，$\angle$ABD=60°，
求對角線$\overline{BD}$、$\overline{AC}$的長度。

(9) 在ΔABC中，$\angle$ABC=75°，$\angle$ABD=30°，$\overline{AB}$=1，$\overline{BC}=\sqrt{2}$，則$\overline{BD}$=？

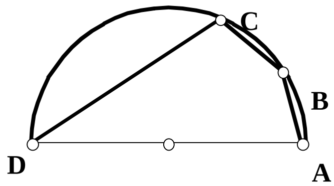
(10) ΔABC中，$\angle$A=60°，$\overline{AB}$=15，$\overline{AC}$=24，則$\angle$A的外角平分線$\overline{AD}$長為多少？

(11) 如圖，$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$，$\angle$AOC=$\angle$BOC=30°，
試證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{3}}{c}$ 。



(12) 圓內接四邊形ABCD，已知$\overline{AD}$=5，$\overline{BC}$=5，$\overline{CD}$=3，$\angle$BCD=120°，
則$\overline{AB}$=？

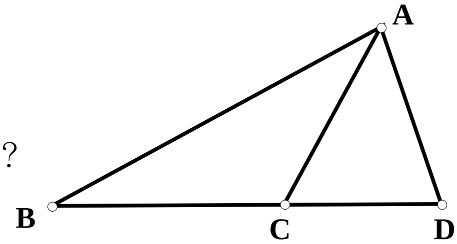
(13) 如右圖，$\overline{AD}=4$，B,C 為以 $\overline{AD}$ 為直徑的半圓上的二點，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$，則$\overline{CD}$=?



(14) 設ΔABC中$\angle$A=60°，$\overline{AC}=b$,$\overline{AB}=c$,今在$\overline{BC}$上取一點D使得$\overline{BD}=\frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$，
令$s=\overline{AD}$，則s^2= (A)$\frac{1}{9}(b^2+4c^2+4bc)$ (B)$\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$ (C) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2-2bc)$
(D) $\frac{1}{9}(4b^2+c^2+2bc)$ (E) $\frac{1}{9}(4b^2+4c^2-2bc)$ (87 大學自)

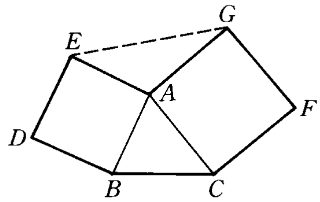
(15) 已知四邊形 $ABCD$ 中, $\overline{AB}=8$, $\overline{CD}=8$, $\overline{AD}=3$ 且 $\angle ABC=\angle ADC=60°$ 試求 $\overline{BC}$ 之長。

(16) 已知ΔABC 三邊長分別為$\overline{AB}$=7，$\overline{BC}$=5，$\overline{AC}$=3，
延長$\overline{BC}$至 D，如右圖所示，使得$\overline{CD}$=2，則$\overline{AD}$=？



(17) 如圖，三角形 ABC 之三邊長為$\overline{AB}$＝7，
$\overline{BC}$＝8，$\overline{CA}$＝9，若 ABDE，ACFG 皆為正方形，

則$\overline{EG}$ ＝________。



(18) 在ΔABC 中之三邊長分別為 11,13,20，則此三角形內切圓半徑為______；外接圓半徑為________。

(19) 郊外有甲，乙，丙三家，兩兩相距 70，80，90 公尺，今計畫公設一井，井到三家必須等距，則此距離為__________公尺。

(20) ΔABC 中滿足 $a\cos A=b\cos B$，請問此三角形之形狀為何？

(21) ΔABC中，設AB=c,BC=a,CA=b，試證下列等式：

(a)$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$

(b)$\dfrac{\sin^2 B-\sin^2 C}{b^2-c^2}=\dfrac{\sin^2 A}{a^2}$

(c)$(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C=0$

(d)$a(b\cdot\cos C-b\cdot\cos B)=b^2-c^2$

(22) 設$a=3+t^2$，$b=3-2t-t^2$，$c=4t$

(a)若a,b,c均為正數，求t的範圍。

(b)若a,b,c為ΔABC的三邊長，求t的範圍。

(c) 若a,b,c為ΔABC的三邊長，求最大角的度量。

(23) 若 $15-x$、$19-x$、$23-x$ 為一個鈍角三角形的三邊長，求 x 的範圍。

(24) 設$\angle$BAC=60°，P為其內部一點且$\overline{AP}$ =10，又P對於$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的對稱點分別為Q、R，則$\overline{QR}$=？

進階問題

(25) ΔABC 中，周長為 20，$\angle$A=60°，外接圓的半徑為R=$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ 則求各邊的邊長a,b,c，又三角形的內切圓半徑為何?

(26) 設ΔABC之三邊長為$\sqrt{3}$,x , y，且邊長$\sqrt{3}$之對角為 60°，試求$x+y$的範圍。

(27) 設凸四邊形 ABCD 之對角線 AC=p，BD=q，兩對角線之交角為θ 。

(a)試證：凸四邊形 ABCD 之面積=$\dfrac{1}{2}pq\sin\theta$

(b)若 AC+BD=10，則凸四邊形 ABCD 面積之最大值為何？

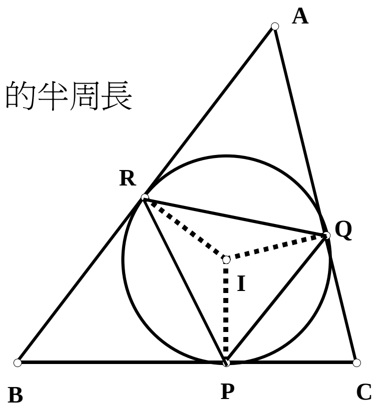
(28) ΔABC 中，設 $a=2,b=1$

(a)當ΔABC 面積最大時，求 c。(b)當$\angle B$ 最大時，求 c。

(29) 設ABCD爲半圓內接四邊形，$\overline{AD}$爲直徑長爲d，若$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，試證明：d爲方程式$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 的一根。

(30) 試證明：ΔABC 的內切圓半徑 $r=(s-a)\tan\dfrac{A}{2}$。　$s=\Delta ABC$ 的半周長

(31) 如圖，設ΔABC 之內切圓半徑爲 r，外接圓半徑爲 R，內切圓切三邊於 P,Q,R，則 $\dfrac{\Delta PQR\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}}$之值爲何？　Ans：$\dfrac{r}{2R}$



(32) 設圓內接四邊形ABCD四邊之長分別爲$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{AD}=d$，試證：

(a)$\overline{AC}^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$。　(b)$\overline{BD}^2=\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$　(c)$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=ac+bd$。

(33) 已知三角形 ABC 的邊$\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=8$，$\angle A=40°$，在$\overline{AB}$上取一點 D，在$\overline{AC}$上取一點 E 而$\overline{DE}$把△ABC 的面積等分爲二，試問：若要求$\overline{DE}$之長度最短，$\overline{AD}$及$\overline{AE}$之值應爲何？

綜合練習解答

(1) $100\sqrt{19}$

(2) $\sqrt{3}+1$

(3) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

(4) $\angle A=120^\circ$

(5) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

(6) 5 或$\dfrac{7}{5}$

(7) $\dfrac{7}{8}$ ；$\dfrac{16\cdot\sqrt{15}}{15}$

(8) $\overline{BD}=10$、$\overline{AC}=\dfrac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$

(9) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$

(10) 40

(11) [提示：考慮$\Delta AOB=\Delta AOC+\Delta BOC$，再利用三角形的面積公式，即可得證]

(12) 8

(13) $\frac{7}{2}$

(14) (B)

(15) 3 或 5

(16) $\sqrt{7}$

(17) 14

(18) 3，$\frac{65}{6}$

(19) $21\sqrt{5}$

(20) 等腰或直角三角形[提示：利用$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 代入$a\cos A=b\cos B$，化簡可得$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$]

(21) (a)(b)(c)利用正弦定理將 sinA、sinB、sinC 化成$\frac{a}{2R}$、$\frac{b}{2R}$、$\frac{c}{2R}$。代入式子中運算。(d)利用餘弦定理。

(22) (a)$0<t<1$ (b)$0<t<1$ (c)120°

(23) $3<x<11$

(24) $10\sqrt{3}$ [提示$\angle QAR=120^\circ$]

(25) $a=7$，$b=8$，$c=5$ 或 $a=7$，$b=5$，$c=8$ $r=\sqrt{3}$

(26) $\sqrt{3}<x+y\le 2\sqrt{3}$
[提示：根據餘弦定理$=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$ $\Rightarrow(x+y)^2=3(xy+1)$，因爲$xy=x^2+y^2-3\ge 2xy-3\Rightarrow xy\le 3\Rightarrow(x+y)^2=3(xy+1)\le 12$]

(27) (b)$\frac{50}{4}$ [提示：利用$pq\le\frac{1}{4}(p+q)^2$]

(28) (a)$\sqrt{5}$ (b)$\sqrt{3}$

(29) [提示：如下圖，$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，因爲$\angle ACD=90^\circ$，$\cos D=\frac{c}{d}$，代入前面的式子化簡即可得證]

(30) [提示：如(31)題圖，只需證明$\overline{AR}=s-a$ 即可]

(31) [提示：如圖，$\Delta PQR=\Delta RQI+\Delta RPI+\Delta PQI=\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-A)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-B)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-C)=\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{1}{4R}r^2(a+b+c)=\frac{r^2s}{2R}$，$\Delta ABC=rs$]

(32) [提示：利用$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，而且$\angle B+\angle D=180^\circ$]

(33) $\overline{AD}=\overline{AE}=6$ [提示：設$\overline{AD}=x$，$\overline{AE}=y$，$\Delta ADE=\frac{1}{2}xy\sin 40^\circ=\frac{1}{2}$ $\Delta ABC=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}$

$\times 9\times 8\times \sin 40^{\circ})\Rightarrow xy=36$。又因爲

$\overline{\mathrm{DE}}^2=x^2+y^2-2xy\cos 40^{\circ}\geq 2xy-2xy\cos 40^{\circ}=72(1-\cos 40^{\circ})$等號成立時，$x=y=6$。]