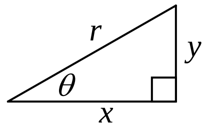
第二冊　第二章　三角函數的基本概念

第二冊 2-1 三角函數的基本概念-銳角三角函數

【定義】

銳角三角函數：

設θ為銳角，若以θ為一內角的直角三角形中，斜邊長為r，θ的鄰邊長為x，對邊長為y。定義六個三角函數如下：



θ的正弦(sine)為$\sin\theta=\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{y}{r}$，$\theta$的餘弦(cosine)為$\cos\theta=\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{x}{r}$，

θ的正切(tangent)為$\tan\theta=\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{y}{x}$，$\theta$的餘切(cotangent)為$\cot\theta=\dfrac{鄰邊}{對邊}=\dfrac{x}{y}$，

θ的正割(secant)為$\sec\theta=\dfrac{斜邊}{鄰邊}=\dfrac{r}{x}$，$\theta$的餘割(cosecant)為$\csc\theta=\dfrac{斜邊}{對邊}=\dfrac{r}{y}$。

註：

注意符號不要誤用，如$\sin x^2\neq\sin^2 x=(\sin x)^2$。

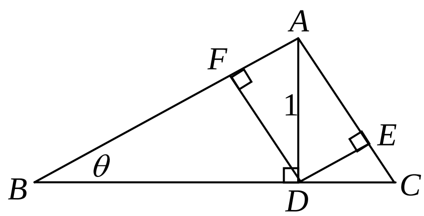
【意義】

銳角三角函數的幾何意義：

(1)如圖：ΔABC為直角三角形，且$\overline{AD}=1$，$\overline{AD}\perp\overline{BC},\overline{DE}\perp\overline{AC},\overline{DF}\perp\overline{AB}$，

可得$\overline{DE}=\sin\theta,\overline{DF}=\cos\theta,\overline{CD}=\tan\theta,\overline{BD}=\cot\theta,\overline{AC}=\sec\theta,\overline{AB}=\csc\theta$，

且$\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta,\cos\theta<\cot\theta<\csc\theta$。

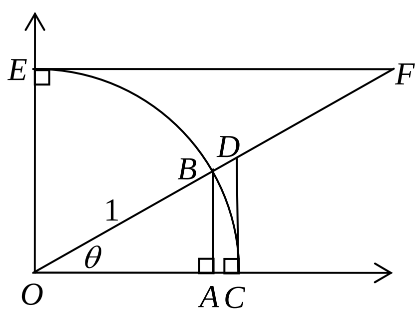


(2)如圖：單位圓的一部份中，設O為圓心，ΔOAB為直角三角形且$\angle BOA=\theta$，

B,C,E在圓上，$\overline{BA}\perp\overline{OA},\overline{DC}\perp\overline{OC},\overline{EF}\perp\overline{OE}$，

可得$\overline{AB}=\sin\theta,\overline{OA}=\cos\theta,\overline{CD}=\tan\theta,\overline{EF}=\cot\theta,\overline{OD}=\sec\theta,\overline{OF}=\csc\theta$，

且$\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta,\cos\theta<\cot\theta<\csc\theta$。



【性質】

大小關係：

討論當角度由0°增加到90°時，六個銳角三角函數值的變化情形。

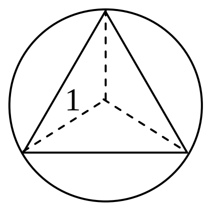
1. 當$0^\circ<\theta<90^\circ$時，$\sin\theta,\tan\theta,\sec\theta$為遞增函數，且$\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta$；
   $\cos\theta,\cot\theta,\csc\theta$為遞減函數，且$\cos\theta<\cot\theta<\csc\theta$。
2. 當$0^\circ<\theta<45^\circ$時，$\sin\theta<\cos\theta$；當$45^\circ<\theta<90^\circ$時，$\sin\theta>\cos\theta$。

取值範圍：

角度 / 三角函數	$0^\circ\to 90^\circ$	取值範圍
$\sin\theta$	↗	$(0,1)$
$\cos\theta$	↘	$(0,1)$
$\tan\theta$	↗	$(0,\infty)$
$\cot\theta$	↘	$(0,\infty)$
$\sec\theta$	↗	$(1,\infty)$
$\csc\theta$	↘	$(1,\infty)$

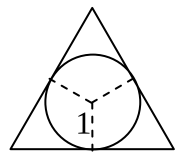
【問題】

1. 三角形的三個邊長，可以產生幾種比值?
2. 六個銳角三角函數的定義與邊長的比值是否有關？
3. 六個銳角三角函數的定義與所取直角三角形大小是否有關？
4. 若已知一個銳角三角函數值，可以求得其餘的五個銳角三角函數值？
5. 已知直角三角形的兩股長分別為5與12，試求其餘五個三角函數值。
6. 已知$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求其餘五個三角函數值。
7. 試求單位圓的內接正三角形的周長與面積？

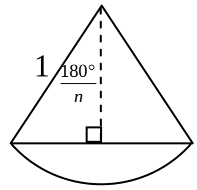
   解答：周長為$3\cdot(2\sin\dfrac{180^\circ}{3})=6\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$，

   面積為$3\cdot[\dfrac{1}{2}\cdot(2\sin\dfrac{180^\circ}{3})\cdot(\cos\dfrac{180^\circ}{3})]=3\sin 60^\circ\cos 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。
8. 試求單位圓的外切正三角形的周長與面積？

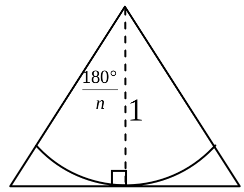
   解答：周長為$3\cdot(2\tan\dfrac{180^\circ}{3})=6\tan 60^\circ=6\sqrt{3}$，

   面積為$3\cdot[\dfrac{1}{2}\cdot(2\tan\dfrac{180^\circ}{3})\times 1]=3\tan 60^\circ=3\sqrt{3}$。
9. 試求單位圓的內接正n邊形的周長與面積？

   解答：周長為$n\cdot(2\sin\dfrac{180^\circ}{n})$，

   面積為$n\cdot[\dfrac{1}{2}\cdot(2\sin\dfrac{180^\circ}{n})\cdot(\cos\dfrac{180^\circ}{n})]=n\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cdot\cos\dfrac{180^\circ}{n}$。
10. 試求單位圓的外切正n邊形的周長與面積？

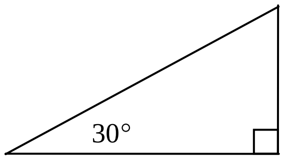
    解答：周長為$n\cdot(2\tan\dfrac{180^\circ}{n})$，

    面積為$n\cdot[\dfrac{1}{2}\cdot(2\tan\dfrac{180^\circ}{n})\times 1]=n\cdot\tan\dfrac{180^\circ}{n}$。

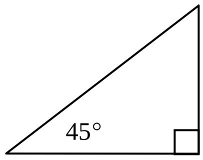
11. 試利用幾何作圖的方法求出下列幾個特別角的三角函數值：

角度 θ ＼ 三角函數	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sec\theta$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

求 $30^\circ,60^\circ$ 的三角函數值：



求 45° 的三角函數值：

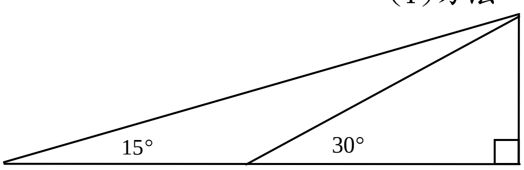


12. 試利用幾何作圖的方法求出下列幾個非特別角的三角函數值：

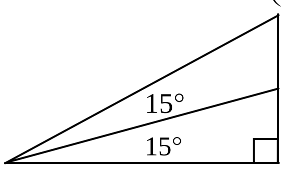
角度 θ ＼ 三角函數	15°	75°	22.5°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$
$\cot\theta$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$
$\sec\theta$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$\csc\theta$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

求 15° 的三角函數值：（由 θ 求 $\frac{\theta}{2}$ 之法）

(1)方法一

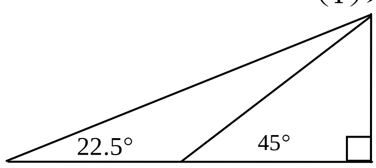


(2)方法二

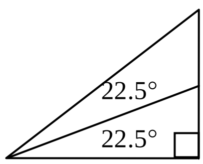


求 22.5° 的三角函數值：（由 θ 求 $\frac{\theta}{2}$ 之法）

(1)方法一



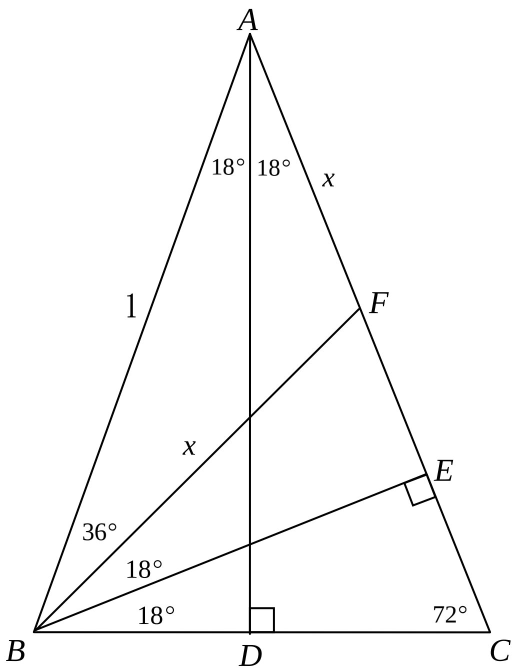
(2)方法二



13. 試利用幾何作圖的方法求出下列幾個非特別角的三角函數值：

角度 / 三角函數	$18°$	$72°$	$36°$	$54°$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\sec\theta$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5}+1$	$\sqrt{5}-1$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\csc\theta$	$\sqrt{5}+1$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5}-1$

求$18°,72°,36°,54°$的三角函數值：



註：取等腰直角ΔABC，$\angle B=\angle C=72°$，設$\overline{AB}=1,\overline{BC}=x$，

$\angle ABC$平分線交$\overline{AC}$於F點，$\angle FBC$平分線交$\overline{AC}$於E點，

則$\overline{BF}=\overline{AF}=x,\overline{EF}=\overline{EC}=\frac{1-x}{2}$，

由ΔACD可得$\sin 18°=\frac{x}{2}$，由ΔABE可得$\cos 36°=\frac{1+x}{2}$。

14. 對於其它的角度，應該如何用作圖法求出其三角函數值？