# 第十五章　　解三角形

## 一、三角函數值

### 15.1　三角函數

修建山上供水系統時，沿著水平面成 $\alpha$ 角的斜坡鋪設水管。如圖 15-1，當水管從坡底 $O$ 處向上鋪設到 $P$ 處。$P$ 離水平面的高為 $MP$，繼續向上鋪設到 $P'$ 處，$P'$ 離水平面的高為 $M'P'$，鋪設的水管越長，管口離水平面也越高。容易看出，$\triangle OPM \sim \triangle OP'M'$，因此，$\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{M'P'}{OP'}$。這就是說，當角 $\alpha$ 的大小一定時，管口離水平面的高與管長之比是一個定值。

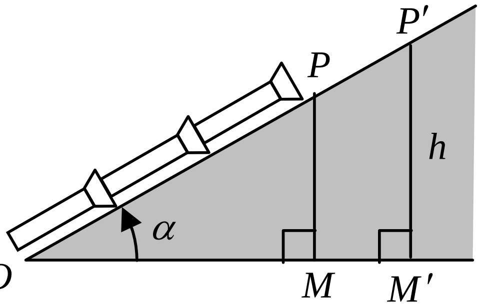



圖 15-1

想一想：當角 $\alpha$ 是 30°時，上面所說的比值是多少？

上面的實例啟發我們進一步研究與角有關的一些比。

設有一個角 $\alpha$，我們以它的頂點作為原點，以它的始邊作為 $x$ 軸之正半軸 $Ox$，建立直角座標系(圖 15-2)。在角 $\alpha$ 的終邊上任取一點 $P(x, y)$，它與原點 $O(0, 0)$ 的距離是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ($r$ 總是正的)。可以得到比值

$$\frac{y}{r}、\frac{x}{r}、\frac{y}{x}、\frac{x}{y}。$$

設 $P'(x', y')$是角 $\alpha$ 的終邊上另一點，$P'$ 到原點 $O(0, 0)$ 的距離是 $r'=\sqrt{x'^2+y'^2}$。又可以得到比值

$$\frac{y'}{r'}、\frac{x'}{r'}、\frac{y'}{x'}、\frac{x'}{y'}。$$

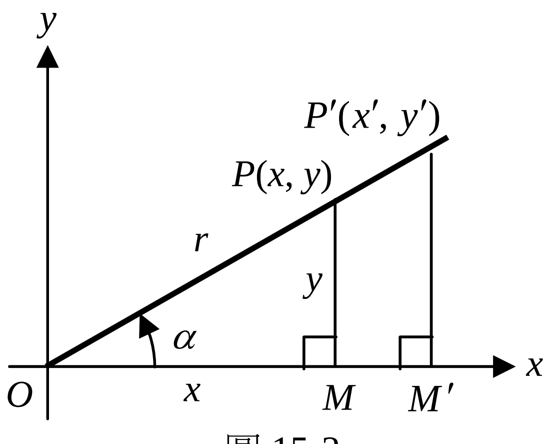



圖 15-2

過 $P$ 與 $P'$ 分別畫 $x$ 軸的垂線 $MP$ 與 $M'P'$，那麼可得知△$OPM$～△$OP'M'$，且 $x$ 與 $x'$、$y$ 與 $y'$ 的符號相同，所以

$$\frac{y}{r}=\frac{y'}{r'}、\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'}、\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}、\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}。$$

由此可知，對於確定的角 $\alpha$，這四個比值都是由角 $\alpha$ 的大小唯一確定的，與點 $P$ 在角 $\alpha$ 的終邊上之位置無關，所以這四個比值都是自變量 $\alpha$ 的函數。我們把

$\frac{y}{r}$ 叫做角 $\alpha$ 的**正弦**，記作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

$\frac{x}{r}$ 叫做角 $\alpha$ 的**餘弦**，記作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

$\frac{y}{x}$ 叫做角 $\alpha$ 的**正切**，記作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$；

$\frac{x}{y}$ 叫做角 $\alpha$ 的**餘切**，記作 $\cot\alpha$，即 $\cot\alpha=\frac{x}{y}$；

角 $\alpha$ 的正弦 $\sin\alpha$、角 $\alpha$ 的餘弦 $\cos\alpha$、角 $\alpha$ 的正切 $\tan\alpha$、角 $\alpha$ 的餘切 $\cot\alpha$ 都叫做角 $\alpha$ 的**三角函數**。

**注意**：「$\sin\alpha$」是一個完整的符號，它表示角 $\alpha$ 的正弦，不能理解成 $\sin\bullet\alpha$。其它三角函數的符號也是這樣。

【**例 1**】已知角 $\alpha$ 的終邊經過點 $P(3, 4)$，求角 $\alpha$ 的四個三角函數值(圖 15-3)。

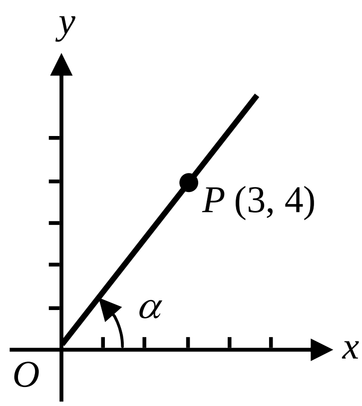


圖 15-3

$\boxed{解}$

$\because\quad x=3$、$y=4$

$\therefore\quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$、

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$、

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$、$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$。

【例 2】 求證：

(1) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；　　(2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$。[3]

證　(1) 根據三角函數的定義：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

即 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$。

(2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{y}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 = \dfrac{y^2 + x^2}{r^2}$。

$\because$ $y^2 + x^2 = r^2$

$\therefore$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

**練　習**

1. (口答) $\sin\beta$ 是角 $\beta$ 的哪種三角函數，表示怎樣的比？ $\tan\beta$ 呢？ $\cos\beta$ 呢？ $\cot\beta$ 呢？
2. 已知角 $\alpha$ 的終邊分別經過下列各點，求角 $\alpha$ 的四個三角函數值：
   (1) (4, 3)；　(2) (5, 12)；　(3) (2, 2)；　(4) (2, 3)。

## 15.2 30°、45°、60°角的三角函數值

我們知道，對於給定的角 $\alpha$，它的四個三角函數值是唯一確定的，對於某些特殊角，我們可以用下面之方法求出它的三角函數值。

[3] $\sin^2\alpha$ 表示 $(\sin\alpha)^2$，其它三角函數的冪也這樣表示。

(1) 如圖 15-4，$\alpha = 30°$，我們在角$\alpha$的終邊上取點 $P$。設點 $P$ 的縱座標是 $a$，過點 $P$ 畫 $x$ 軸的垂線 $MP$。在直角三角形 $OPM$ 中，$\angle POM = 30°$、$MP = a$，則 $OP = 2a$。(為什麼？)由勾股定理，

$$OM = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a，$$

也就是說，點 $P$ 的座標是$(\sqrt{3}a, a)$、$r = 2a$，所以

$$\sin 30° = \frac{y}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{y}{x} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

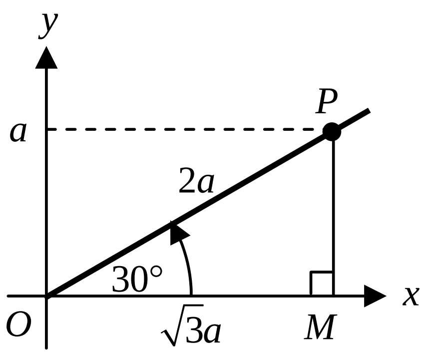


圖 15-4

(2) 如圖 15-5，$\alpha = 45°$，我們在角$\alpha$的終邊上取點 $P$。設點 $P$ 的縱座標是 $a$，則點 $P$ 的橫座標也是 $a$。(為什麼？)由勾股定理，$r = \sqrt{2}a$。所以

$$\sin 45° = \frac{y}{r} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{x}{r} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{y}{x} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{x}{y} = \frac{a}{a} = 1$$

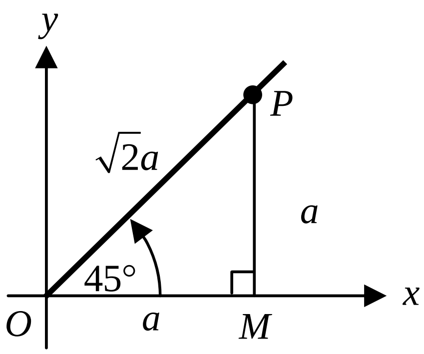


圖 15-5

(3) 如圖 15-6，$\alpha = 60°$，我們在角$\alpha$的終邊上取點 $P$。設點 $P$ 的橫座標是 $a$，則$r = OP = 2a$。(為什麼？)由勾股定理，點 $P$ 的縱座標$y = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$。所以

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{x}{y} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

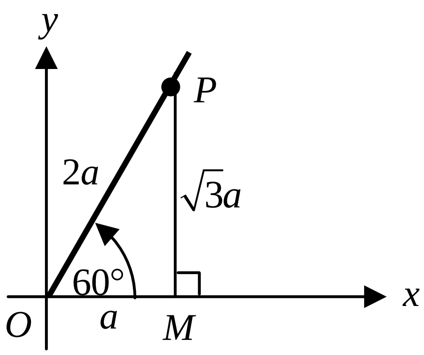



圖 15-6

以上這些特殊的三角函數值，今後經常要用到。為了便於記憶，列表如下：

| 三角函數值 ＼ 角 / 三角函數 | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| 正　弦 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 餘　弦 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 正　切 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| 餘　切 | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**【例】**　求下列各式的值：

(1)　$2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ ；

(2)　$\sin^2 45^\circ + \cot 60^\circ \cos 30^\circ$ ；

(3)　$\frac{1}{2}\cos 30^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 60^\circ$ 。

解　(1) $2\sin 30°+3\cos 60°+\tan 45°=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}+1=3\frac{1}{2}$；

(2) $$\begin{aligned}\sin^2 45°+\cot 60°\cos 30°&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=1\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cos 30°+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°+\sin 60°\cos 60°\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{2+2\sqrt{3}}{4}\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

## 練　習

1. (口答) $\sin 30°$ 與 $\cos 60°$ 的值各是多少？ $\tan 45°$ 與 $\cot 45°$ 呢？ $\sin 45°$ 與 $\cos 45°$ 呢？ $\sin 60°$ 與 $\cos 30°$ 呢？ $\tan 60°$ 與 $\cot 30°$ 呢？ $\tan 30°$ 與 $\cot 60°$ 呢？
2. 求下列各式的值：
   (1) $\sin 30°-3\tan 30°+2\cos 30°$；
   (2) $2\cos 30°+\tan 60°-6\cot 60°$；
   (3) $5\cot 30°-2\cos 60°+2\sin 60°$；
   (4) $\cos^2 45°+\sin^2 45°$；
   (5) $\dfrac{\sin 60°-\cot 45°}{\tan 60°-2\tan 45°}$。
3. 在直角座標系中，以原點為頂點，$x$ 軸的正半邊為始邊，在第一象限內畫出 40°的角。量出它的終邊上一點之座標及這個點到原點的距離，然後計算 40°角的四個三角函數值(精確到 0.01)。

## 15.3 用工程計算器求三角函數值*(本節可忽略不學)

上節我們求出了 30°、45°、60°這些特殊角的三角函數值，但是對求任意角的三角函數值則是有困難的。從前，人們利用查三角函數表來求出其含有四個有效數字的近似值。在現代，我們可利用工程用計算器非常方便地求出任意銳角的正弦、餘弦、正切的值。

一般 WINDOWS 作業系統之電腦都附有小算盤的計算器程式，開啟此程式後，可在選單中的「檢視」功能表選擇「工程型」，此即為一般所使用的工程用計算器。網路上也有許多線上工程用計算器程式，例如在搜尋引擎 Google 上輸入「計算機」，即會顯示出一個 Google 設計的線上工程計算器可供使用，也會有許多其它網頁的線上工程計算器可選擇，但輸入順序與本節介紹的工程計算器可能略有不同，請自行閱讀各網頁使用說明。

本節內所使用之按鍵 (2ndF) 為第二功能鍵，在部分工程用計算器上為 (Shift) 鍵，而在工程型小算盤中為 $\boxed{\text{Inv}}$ 鍵。另外，在角度的顯示上，工程用計算器是利用按鍵 $\boxed{\text{DMS}}$ 來作為將數值與角度轉換之功能鍵，而工程型小算盤是利用按鍵 $\boxed{\text{dms}}$ 與 $\boxed{\text{deg}}$，且工程型小算盤將數值轉換成一般所使用的「度-分-秒」角度單位後，小數點前為「度」，小數點後二位為「分」，小數點第三位後為「秒」。

### 1. 正弦與餘弦

【例 1】 用工程用計算器求 $\sin 10°36'$ (精確到小數後第四位)。

$\boxed{\text{解}}$ 在工程用計算器上依序按鍵：

(sin)、$\boxed{1}$、$\boxed{0}$、$\boxed{\text{DMS}}$、$\boxed{3}$、$\boxed{6}$、$\boxed{\text{DMS}}$、$\boxed{=}$，

螢幕上顯示結果為 0.18395135⋯，即所求為 0.1840。

而若是使用工程型小算盤，依序按鍵：

$\boxed{1}$、$\boxed{0}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{3}$、$\boxed{6}$、$\boxed{\text{Inv}}$、$\boxed{\text{deg}}$、$\boxed{\text{sin}}$，

螢幕上顯示結果為 0.18395135⋯，即所求為 0.1840。

**答**：0.1840。

**註**：工程型小算盤計算三角函數時是先輸入角度再輸入函數。

**練　習**

利用工程計算器求下列銳角的正弦值與餘弦值(精確到小數點後第四位)：

(1) $\sin 28°30'$；　(2) $\cos 35'$；

(3) $\sin 60°48'$；　(4) $\cos 62°48'$。

【例 2】 已知 $\sin\alpha = 0.3688$，用工程計算器求銳角 $\alpha$ (精確到 $1'$)。

$\boxed{解}$ 依序按鍵：

2ndF、sin、$\boxed{0}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{3}$、$\boxed{6}$、$\boxed{8}$、$\boxed{8}$、$\boxed{=}$，

螢幕上顯示結果為 21.6416292⋯(十進制度數表示)，接著依序再按鍵：

2ndF、$\boxed{\text{DMS}}$

則螢幕上顯示結果為 $21°38'29.87''$，即 $\alpha \approx 21°38'$。

而若是使用工程型小算盤，依序按鍵：

$\boxed{0}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{3}$、$\boxed{6}$、$\boxed{8}$、$\boxed{8}$、$\boxed{\text{Inv}}$、$\boxed{\sin^{-1}}$，

螢幕上顯示結果為 21.6416292⋯(十進制度數表示)，接著再按鍵：

$\boxed{\text{dms}}$

則螢幕上顯示結果為 21.382986511⋯，此時小數點前為「度」，小數點後二位為「分」，小數點第三位後為「秒」，即 $\alpha = 21°38'29.86511\cdots'' \approx 21°38'$。

**答**：$21°38'$。

**註**：工程型小算盤計算反三角函數時是先輸入數值再輸入函數。

**練　習**

用工程計算器求下列正弦值或餘弦值對應的銳角 $\alpha$ (精確到 $1'$)：

(1) $\sin\alpha = 0.8268$，則 $\alpha = ?$

(2) $\sin\alpha = 0.1436$，則 $\alpha = ?$

(3) $\cos\alpha = 0.3279$，則 $\alpha = ?$

(4) $\cos\alpha = 0.9356$，則 $\alpha = ?$

## 2. 正切與餘切

我們也可以用工程計算器求任意一個銳角的正切值，其使用方法與求正弦值或餘弦值類似，只是按的鍵改為 tan 鍵。而因正切值與餘切值互為倒數，故求餘切值只需先求出正切值，再求倒數即可。

【例 1】 用工程用計算器求 $\tan 53°49'$ (精確到小數後第四位)。

$\boxed{解}$ 在工程用計算器上依序按鍵：

tan、$\boxed{5}$、$\boxed{3}$、$\boxed{\text{DMS}}$、$\boxed{4}$、$\boxed{9}$、$\boxed{\text{DMS}}$、$\boxed{=}$，

而若是使用工程型小算盤，依序按鍵：

$\boxed{5}$、$\boxed{3}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{4}$、$\boxed{9}$、$\boxed{\text{Inv}}$、$\boxed{\text{deg}}$、$\boxed{\text{tan}}$，

螢幕上顯示結果為 1.36716099⋯，即所求為 1.3672。

**答**：1.3672。

【例 2】 用工程用計算器求 $\cot 14°32'$ (精確到小數後第四位)。

$\boxed{解}$ 在工程用計算器上依序按鍵：

$\boxed{1}$、$\boxed{\div}$、tan、$\boxed{1}$、$\boxed{4}$、$\boxed{\text{DMS}}$、$\boxed{3}$、$\boxed{2}$、$\boxed{\text{DMS}}$、

$\boxed{=}$，螢幕上顯示結果為 3.85745373⋯，即所求為 3.8575。

而若是使用工程型小算盤，依序按鍵：

$\boxed{1}$、$\boxed{/}$、$\boxed{1}$、$\boxed{4}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{3}$、$\boxed{2}$、$\boxed{\text{Inv}}$、$\boxed{\text{deg}}$、

$\boxed{\text{tan}}$、$\boxed{=}$，螢幕上顯示結果為 3.85745373⋯，即所求為 3.8575。

**答**：3.8575。

## 練　習

利用工程計算器求下列銳角的正切值與餘切值(精確到小數點後第四位)：

(1) $\tan 13°12'$；(2) $\tan 40°55'$；(3) $\tan 54°28'$；(4) $\tan 89°43'$；
(5) $\cot 72°18'$；(6) $\cot 56°56'$；(7) $\cot 32°32'$；(8) $\cot 15°15'$。

【例 3】 已知 $\tan\alpha = 1.4036$，用工程計算器求銳角 $\alpha$ (精確到 $1'$)。

解　在工程用計算器上依序按鍵：

2ndF 、tan 、1 、• 、4 、0 、3 、6 、= ，

螢幕上顯示結果為 54.5318877…(十進制度數表示)，接著依序再按鍵：

2ndF 、DMS

則螢幕上顯示結果為 $54°31'54''$，即 $\alpha \approx 54°32'$。

而若是使用工程型小算盤，依序按鍵：

1 、• 、4 、0 、3 、6 、Inv 、$\tan^{-1}$ 、= ，

螢幕上顯示結果為 54.53188…(十進制度數表示)，接著再按鍵：

dms

則螢幕上顯示結果為 54.31547960…，即 $\alpha \approx 54°32'$。

答：$54°32'$。

【例 4】 已知 $\cot\alpha = 0.8637$，用工程計算器求銳角 $\alpha$ (精確到 $1'$)。

解　在工程用計算器上依序按鍵：

2ndF 、tan 、1 、÷ 、0 、• 、8 、6 、3 、7 、= ，螢幕上顯示結果為 49.18282777…(十進制度數表示)，接著依序再按鍵：

2ndF 、DMS

則螢幕上顯示結果為 $49°10'58''$，即 $\alpha \approx 49°11'$。

而若是使用工程型小算盤，依序按鍵：

$\boxed{1}$、$\boxed{/}$、$\boxed{0}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{8}$、$\boxed{6}$、$\boxed{3}$、$\boxed{7}$、$\boxed{=}$、$\boxed{\text{Inv}}$、$\boxed{\tan^{-1}}$，螢幕上顯示結果為 49.18282777⋯(十進制度數表示)，接著再按鍵：

$\boxed{\text{dms}}$

則螢幕上顯示結果為 49.10581799⋯，即 $\alpha \approx 49°11'$。

答：$49°11'$。

## 練　習

利用工程計算器求下列正切值或餘切值所對應的銳角 $\alpha$ (精確到 $1'$)：

(1) $\tan\alpha = 0.9131$，則 $\alpha =$ ？
(2) $\tan\alpha = 0.3314$，則 $\alpha =$ ？
(3) $\tan\alpha = 2.220$，則 $\alpha =$ ？
(4) $\tan\alpha = 31.80$，則 $\alpha =$ ？
(5) $\cot\alpha = 1.6003$，則 $\alpha =$ ？
(6) $\cot\alpha = 3.590$，則 $\alpha =$ ？
(7) $\cot\alpha = 0.0781$，則 $\alpha =$ ？
(8) $\cot\alpha = 180.9$，則 $\alpha =$ ？

## 習　題　九

1. 已知角 $\alpha$ 的終邊分別經過下列各點，求角 $\alpha$ 的四個三角函數值：
   (1) $(1, 2)$；　(2) $(1, \sqrt{2})$；　(3) $(2, 5)$；　(4) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$。
2. 求下列各式的值：
   (1) $3\tan 30° + \cot 45° - 2\tan 45° + 2\sin 60°$；
   (2) $2\cos 30° - 4\cot 30° + 3\tan 60°$；
   (3) $\dfrac{\cos 45° - \sin 30°}{\cos 45° + \sin 30°}$；

(4) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$；

(5) $\dfrac{3\cot 60^\circ}{2\cos^2 30^\circ - 1}$；

(6) $\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ} + \dfrac{1}{\tan 30^\circ}$。

3. 利用工程計算器求下列三角函數值：

(1) $\sin 28^\circ 18'$、$\sin 57^\circ 43'$、$\sin 68^\circ 33'$、$\sin 72^\circ 58'$；

(2) $\cos 65^\circ 2'$、$\cos 10^\circ 36'$、$\cos 44^\circ 15'$、$\cos 32^\circ 4'$。

4. 回答下列問題：

(1) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ$是不是等於$\sin 60^\circ$？

(2) $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ$是不是等於$\cos 30^\circ$？

5. 已知下列三角函數值，利用工程計算器求銳角：

(1) $\sin\alpha = 0.6841$、$\cos\alpha = 0.3241$、$\sin\alpha = 0.5136$；

(2) $\cos\beta = 0.2839$、$\sin\beta = 0.0526$、$\cos\beta = 0.5412$。

6. 利用工程計算器求下列三角函數值：

(1) $\tan 9^\circ 19'$、$\tan 64^\circ 10'$、$\tan 75^\circ 39'$、$\tan 79^\circ 51'$；

(2) $\cot 8^\circ 28'$、$\cot 16^\circ 25'$、$\cot 48^\circ 27'$、$\cot 88^\circ 44'$；

(3) $\sin 89^\circ 32'$、$\cos 38^\circ 43'$、$\tan 5'$、$\cot 14^\circ 27'$。

7. 已知下列三角函數值，利用工程計算器求銳角：

(1) $\tan\alpha = 0.7817$、$\cot\alpha = 1.1106$、$\tan\alpha = 1.0736$；

(2) $\cot\beta = 3.267$、$\tan\beta = 2.378$、$\cot\beta = 57.82$；

(3) $\sin x = 0.86276$、$\cos x = \dfrac{2}{3}$、$\tan x = 53.10$。

## 二、解直角三角形

### 15.4　直角三角形上邊與角間的關係

在生產實踐與科學研究中，經常須要求出線段的長度或角之大小，這種問題常常可以歸結為求一個三角形的邊長或角之大小。由三角形中已知的邊與角，計算未知的邊或角，叫做**解三角形**。現在先來研究解直角三角形的問題。為此，我們用三角函數來表示直角三角形上邊與角的關係。

如圖 15-7，直角三角形 $ABC$ 中，$C$ 是直角，斜邊是 $c$；銳角 $A$ 的對邊是 $a$、鄰邊是 $b$；銳角 $B$ 的對邊是 $b$、鄰邊是 $a$ [4]。如圖 15-8 (1)或(2)，建立直角座標系。

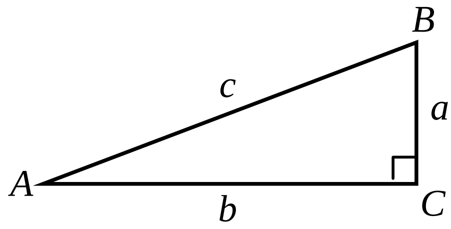


圖 15-7

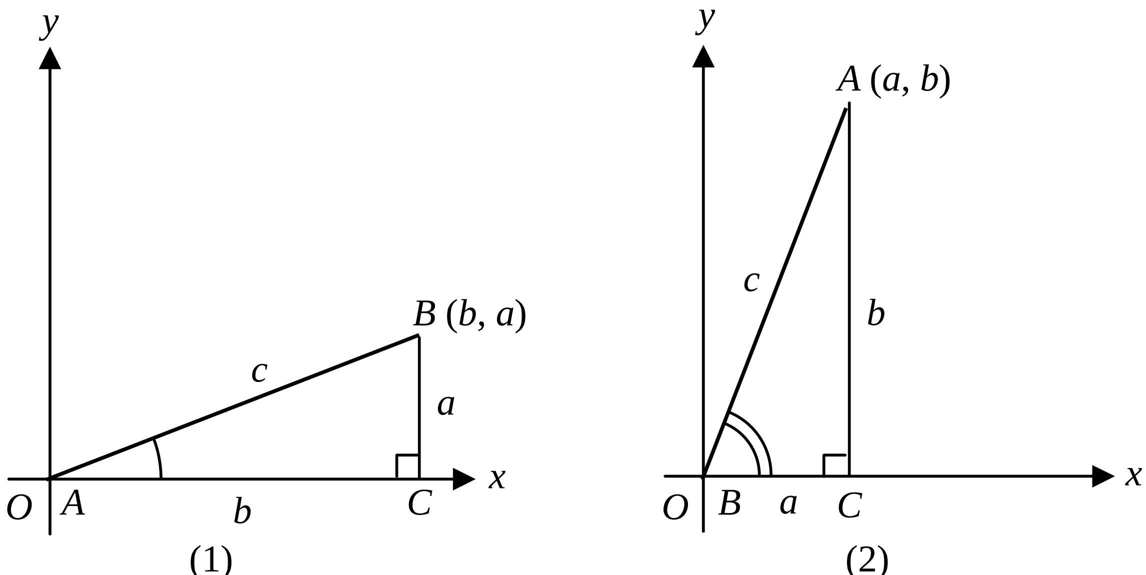


圖 15-8

根據三角函數的定義，可得：

(1)　$\sin A=\dfrac{a}{c}$ 、 $\cos A=\dfrac{b}{c}$ 、 $\tan A=\dfrac{a}{b}$ 、 $\cot A=\dfrac{b}{a}$ ；

(2)　$\sin B=\dfrac{b}{c}$ 、 $\cos B=\dfrac{a}{c}$ 、 $\tan B=\dfrac{b}{a}$ 、 $\cot B=\dfrac{a}{b}$ 。

---

[4] 在本章中，直角三角形 $ABC$ 的邊與角的符號都這樣表示。

如果用$\alpha$表示直角三角形的一個銳角，那麼(1)與(2)可以概括為(圖 15-9)：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin\alpha=\dfrac{\alpha\text{的對邊}}{\text{斜邊}}\text{，} & \cos\alpha=\dfrac{\alpha\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}\\ \tan\alpha=\dfrac{\alpha\text{的對邊}}{\alpha\text{的鄰邊}}\text{，} & \cot\alpha=\dfrac{\alpha\text{的鄰邊}}{\alpha\text{的對邊}}\end{array}}$$

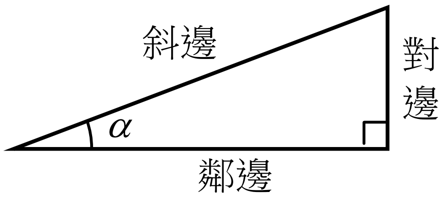


圖 15-9

這四個式子給出了直角三角形上邊與角之間的關係。今後在解直角三角形時。可以不必藉助於直角座標系，直接應用這些關係式。

由於$B=90°-A$，從(1)與(2)還可得到

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin(90°-A)=\cos A\text{，} & \cos(90°-A)=\sin A\\ \tan(90°-A)=\cot A\text{，} & \cot(90°-A)=\tan A\end{array}}$$

因為$90°-A$與$A$的三角函數之間有上述關係，所以在求三角函數值的表中，正弦與餘弦可以合用一個表，正切與餘切可以合用一個表。

【例】 在直角三角形$ABC$中，已知$a=12$、$b=5$。求角$A$、角$B$的四個三角函數值(圖 15-10)。

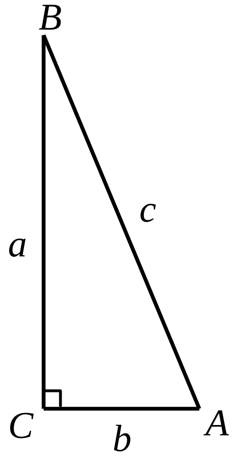


圖 15-10

解 由勾股定理，得

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{a}{c}=\frac{12}{13}\text{、}\cos A=\frac{b}{c}=\frac{5}{13}\text{、}$$

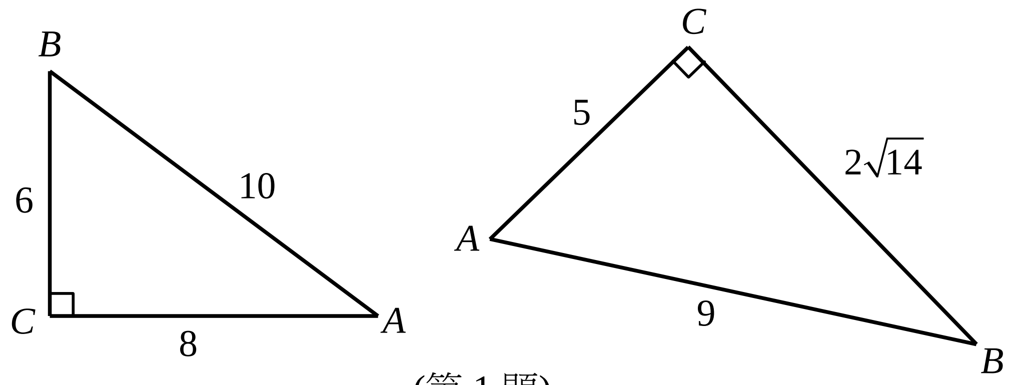
$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{12}{5}\text{、}\cot A=\frac{b}{a}=\frac{5}{12}\text{、}$$

$$\sin B=\cos A=\frac{5}{13}\text{、}\cos B=\sin A=\frac{12}{13}\text{、}$$

$$\tan B=\cot A=\frac{5}{12}\text{、}\cot B=\tan A=\frac{12}{5}\text{。}$$

## 練 習

1. (口答) 分別說出圖中角 $A$、角 $B$ 的四個三角函數值：




(第 1 題)

2. 在直角三角形 $ABC$ 中：
   (1) 已知 $a=2$ 、 $b=1$，求角 $A$ 的四個三角函數值；
   (2) 已知 $a=3$ 、 $b=4$ ，求角 $B$ 的四個三角函數值；
   (3) 已知 $b=2$ 、 $c=\sqrt{29}$，求角 $A$、角 $B$ 的四個三角函數值。

3. 把下列各式寫成角 $A$ 或角 $B$ 的三角函數的形式：
   (1) $\cos(90°-A)$ ；　　(2) $\tan(90°-B)$ ；
   (3) $\sin(90°-B)$ ；　　(4) $\cot(90°-A)$ 。

## 15.5 解直角三角形

我們知道，直角三角形 $ABC$ 的六個元素(三條邊與三個角)，除直角 $C$ 外，其餘五個元素之間有如下的關係：

(1) 三邊之間的關係

$$a^2+b^2=c^2 \quad (\text{勾股定理})$$

(2) 銳角之間的關係

$$A+B=90°$$

(3) 邊角之間的關係

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{的對邊}}{\text{斜邊}}, \quad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\alpha\text{的對邊}}{\alpha\text{的鄰邊}}, \quad \cot\alpha=\frac{\alpha\text{的鄰邊}}{\alpha\text{的對邊}}$$

式中的 $\alpha$ 表示銳角 $A$ 或銳角 $B$。

利用這些關係，知道其中的兩個元素(至少有一個是邊)，就可以求出其餘的三個未知元素。就是說，解直角三角形的問題，只須知道直角三角形除直角外的兩個元素(至少有一個是邊)就可解決。

【例 1】 如圖 15-11，在直角三角形 $ABC$ 中，已知 $b=35$、$c=45$，求 $A$、$B$ (精確到$1°$)與 $a$ (保留兩個有效數字)。

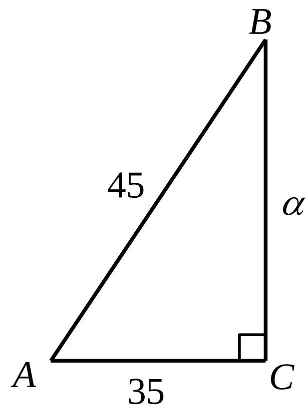


圖 15-11

解 (1) $\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{35}{45}\approx 0.7778$，用工程計算器計算得 $A\approx 39°$；

(2) $B=90°-A\approx 90°-39°=51°$；

(3) $a=\sqrt{c^2-b^2}$

$=\sqrt{45^2-35^2}$

$=\sqrt{800}$

用工程計算器計算得 $a=28.28\approx 28$。

在例 1 中，由於已知邊 $b$、$c$，所以求角 $A$ 時，我們選取含有角 $A$ 與邊 $b$、$c$ 的關係式 $\cos A=\dfrac{b}{c}$。

【例 2】 在直角三角形 $ABC$ 中，已知 $a=15$、$A=35°27'$，求 $b$、$c$ 與 $B$(邊長保留兩個有效數字)。

解 (1) $\because\quad \cot A=\dfrac{b}{a}$

$\therefore\quad b=a\cot A=15\times\cot 35°27'=15\times 1.4045\approx 21$

(2) $\because\quad \sin A=\dfrac{a}{c}$；

$\therefore\quad c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{15}{\sin 35°27'}=\dfrac{15}{0.5800}\approx 26$

(3) $B=90°-35°27'=54°33'$

在例 2，已知 $a$ 與 $A$，求 $b$ 時，雖也可選用關係式 $\tan A=\dfrac{a}{b}$ ，但計算時須用除法 $b=\dfrac{a}{\tan A}$ ，所以我們選用關係式 $\cot A=\dfrac{b}{a}$ 。

**練　習**

1. 在直角三角形 $ABC$ 中：
   (1) 已知 $c$、$A$，寫出求 $a$ 與 $b$ 的關係式；
   (2) 已知 $b$、$A$，寫出求 $a$ 的關係式；已知 $a$、$A$，寫出求 $b$ 的關係式；
   (3) 已知 $a$、$b$，怎樣求 $A$？已知 $a$、$c$，怎樣求 $A$？已知 $b$、$c$，怎樣求 $A$？

2. 根據下列條件解直角三角形：
   (1) $c=10$ 、 $A=30°$ ；　(2) $b=15$ 、 $B=45°$ ；
   (3) $a=51$ 、 $c=70$ ；　(4) $a=22$ 、 $b=12$ 。
   (第(3)、(4)題要求角度精確到1° ，邊長保留兩個有效數字。)

## 15.6　應用舉例

解直角三角形的應用非常廣泛，下面舉一些例子。

【例 1】 廠房屋頂人字架(等腰三角形)的跨度為 10 m，角 $A$ 為 26°(圖 15-12)。求中柱 $BC$ ($C$ 為底邊中點)與上弦 $AB$ 的長(精確到 0.01 m)。

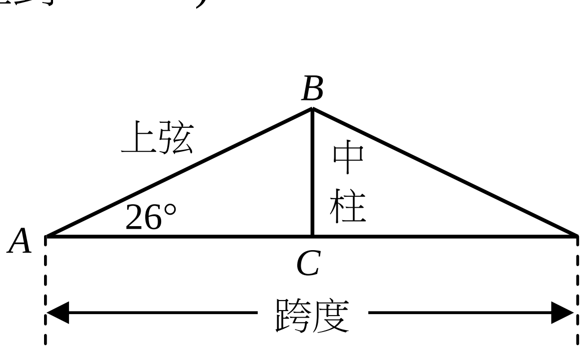



圖 15-12

解　由題意可知，$\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $C=90°$、$A=26°$、$AC=5\,\text{m}$。

$\because \quad \tan A=\dfrac{BC}{AC}$

$\therefore \quad BC=AC\bullet\tan A=5\times\tan 26°=5\times 0.4877\approx 2.44\,\text{m}$

$\because \quad \cos A=\dfrac{AC}{AB}$

$\therefore \quad AB=\dfrac{AC}{\cos A}=\dfrac{5}{\cos 26°}$

利用工程計算器計算可得 $AB\approx\dfrac{5}{0.8988}\approx 5.56\,\text{m}$。

**答：**$BC$ 約為 2.44 m、$AB$ 約為 5.56 m。

【例 2】燕尾槽的橫斷面是等腰梯形。圖 15-13 是一燕尾槽的橫斷面，其中燕尾角 $B$ 是55°、外口寬 $AD$ 是 180 mm、燕尾槽的深度是 70 mm。求它的裏口寬 $BC$ (精確到 1 mm)。

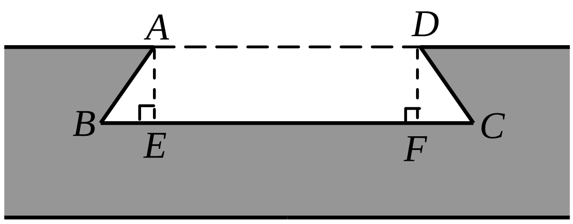



圖 15-13

分析：連結 $AD$，並分別作 $AE$、$DF$ 垂直於 $BC$，則 $AD=EF$、$BE=FC$。又 $BC=BE+EF+FC=2BE+AD$。由於 $AD$ 已知，只要求出 $BE$，這個問題就解決了。

解　作 $AE\perp BC$、$DF\perp BC$。在直角三角形 $ABE$ 中，

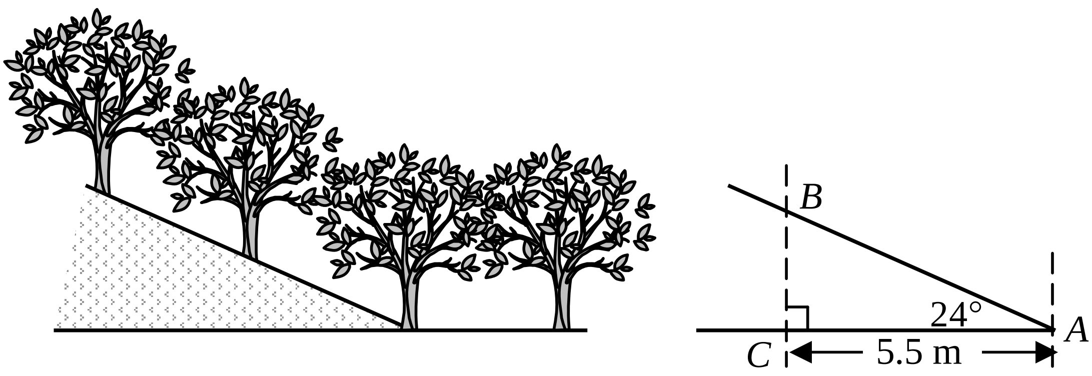
$\because \quad \cot B=\dfrac{BE}{AE}$

$\therefore \quad BE=AE\bullet\cot B=70\times\cot 55°=70\times 0.7002\approx 49.0\,\text{mm}$

$\therefore \quad BC=2BE+AD\approx 2\times 49.0+180=278\,\text{mm}$

**答：**燕尾槽的裏口寬 $BC$ 約為 278 mm。

【例 3】 如圖 15-14，在山坡上種樹，要求株距(兩樹間的水平距離)是 5.5 m。測得斜坡的傾斜角是24°，求斜坡上相鄰兩樹間的傾斜距離是多少 m (精確到 1 mm)。




(1) (2)

圖 15-14

分析： 如圖 15-14(2)，$\angle A = 24°$ 水平距離 $AC = 5.5$ m、$BC \perp AC$、$\triangle ABC$ 是直角三角形。只要解$\triangle ABC$ 求出 $AB$，問題就解決了。

$\boxed{解}$ 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$

$$\because \quad \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \quad AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{5.5}{0.9135} \approx 6.0\,\text{m}$$

**答：**斜坡上相鄰兩樹間的傾斜距離約是 6.0 m。

在築壩、開渠、挖河與修路時，設計圖紙上都要註明斜坡的傾斜程度。通常把坡面的鉛直高度 $h$ 與水平寬度 $l$ 的比叫做坡度(或叫做坡比) (圖 15-15)，用字母 $i$ 表示，即

$$i = \frac{h}{l} \text{。}$$

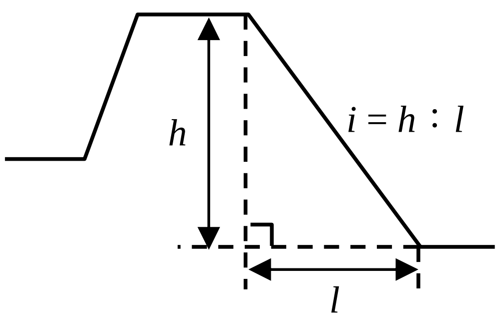



圖 15-15

坡度一般寫成 1：$m$ 的形式，如 $i$ = 1：5 (即$i = \frac{1}{5}$)。

如果把坡面與水平面的夾角記作$\alpha$(叫做坡角)，那麼

$$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha \text{ 。}$$

顯然，坡度越大(於是$\alpha$角越大)，坡面就越陡。

【例 4】 水庫大壩的橫斷面是一個梯形(圖 15-16)，壩頂寬 6 m、壩高 23 m、斜坡 $AB$ 的坡度 $i$ = 1∶3、斜坡 $CD$ 的坡度$i'$ = 1∶2.5。求斜坡 $AB$ 的坡角$\alpha$ 、壩底寬 $AD$、斜坡 $AB$ 的長 (精確到 0.01 m)。

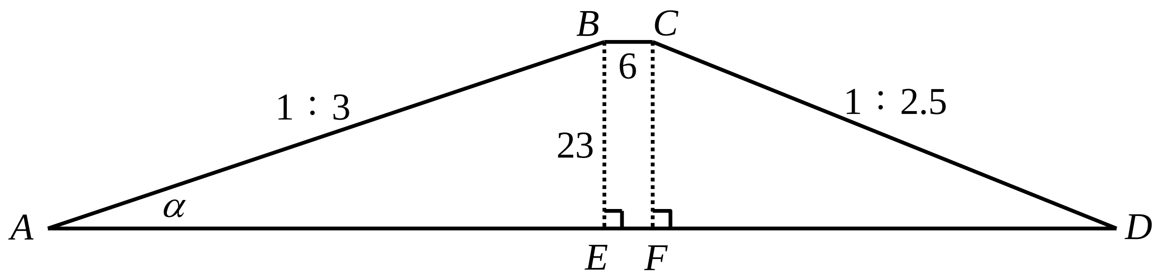



圖 15-16

**解** 在圖 15-16 中，作 $BE\perp AD$ 、$CF\perp AD$ 。在直角三角形 $ABE$ 與 $CDF$ 中，

$$\because\quad \frac{BE}{AE}=1:3\text{、}\frac{CF}{FD}=1:2.5$$

$$\therefore\quad AE=3BE=3\times 23=69\,\text{m}$$

$$FD=2.5CF=2.5\times 23=57.5\,\text{m}$$

$$\therefore\quad AD=AE+EF+FD=69+6+57.5=132.5\,\text{m}$$

因為斜坡 $AB$ 的坡度$i=\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，利用工程計算器計算可得$\alpha\approx 18^\circ 26'$ 。

$$\because\quad \frac{BE}{AB}=\sin\alpha$$

$$\therefore\quad AB=\frac{BE}{\sin\alpha}=\frac{23}{\sin 18^\circ 26'}=72.73\approx 72.7\,\text{m}$$

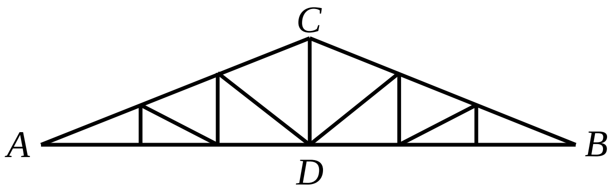
**答：**斜坡 $AB$ 的坡角$\alpha$ 約為$18^\circ 26'$ 、壩底寬 $AD$ 約為 132.5 m、斜坡 $AB$ 的長約為 72.7 m。

在例 4 中，也可由 $\dfrac{BE}{AE}$ =1：3，得 $\dfrac{BE}{AB}$ =1：$\sqrt{10}$ ，求得

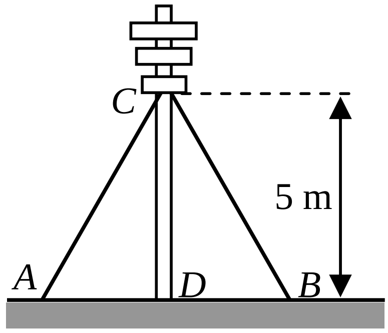
$$AB=\sqrt{10}\bullet BE=\sqrt{10}\times 23\approx 72.7\text{ m}。$$

**練　習**

1. 如圖，某廠庫間的人字屋架為等腰三角形，跨度 $AB$ = 12 m、$\angle A=22°$ ，求中柱 $CD$ 與上弦 $AC$ 的長(精確到 0.01 m)。



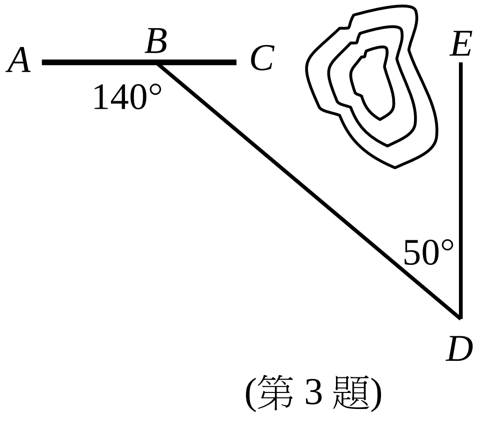

(第 1 題)



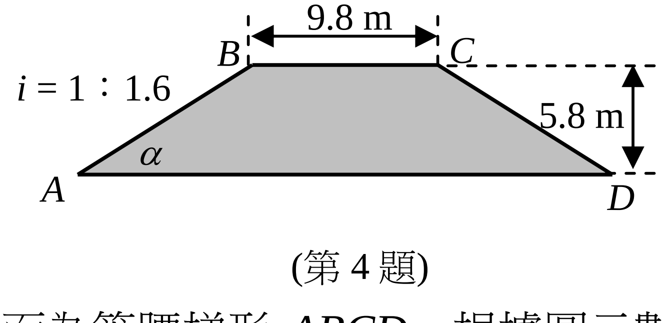

(第 2 題)

2. 如圖，在離地面高 5 m 處引拉線固定電線桿，拉線與地面成 $60°$ 角，求拉線 $AC$ 的長、拉線下端點 $A$ 離桿底 $D$ 多遠 (精確到 0.01 m)。

3. 如圖，沿 $AC$ 方向開山修渠，為了加快施工進度，要在小山的另一邊同時施工。從 $AC$ 上的一點 $B$ 取 $\angle ABD=140°$ 、$BD$ = 520 m、$\angle D=50°$，那麼開挖點 $E$ 離 $D$ 多遠 (精確到 0.1 m)，才能使 $A$、$C$、$E$ 成一直線？




(第 3 題)

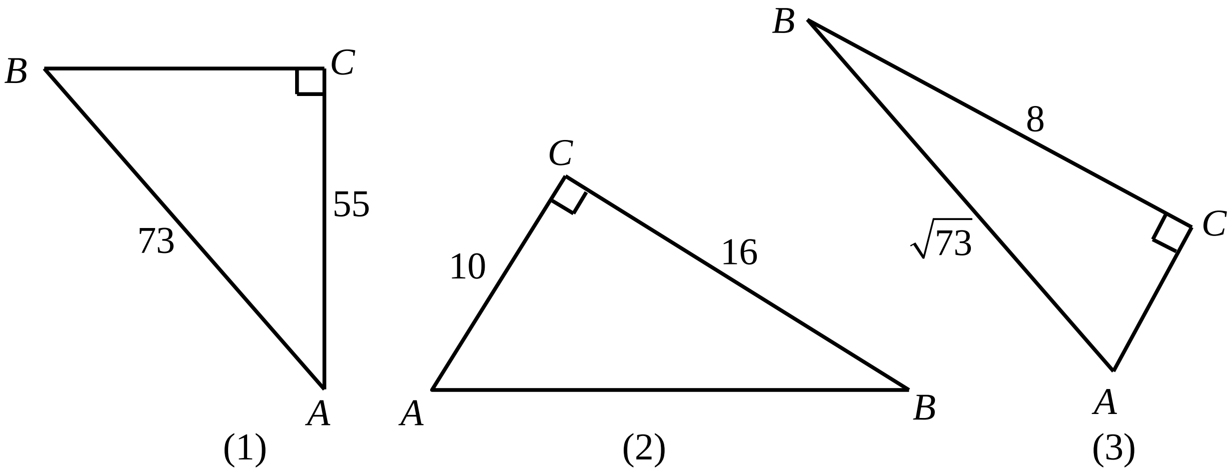



(第 4 題)

4. 如圖，一鐵路路基的橫段面為等腰梯形 $ABCD$，根據圖示數據計算出路基下底寬 $AD$ (精確到 0.1 m)與坡角 $\alpha$

## 習　題　十

1. 分別寫出下圖中角 $A$、角 $B$ 的四個三角函數值：




(第 1 題)

2. 在直角三角形 $ABC$ 中( $C=90°$ )：
   (1) 已知 $a=9$ 、 $c=15$ ，求角 $A$ 的四個三角函數值；
   (2) 已知 $b=21$ 、 $c=29$ ，求角 $A$ 的四個三角函數值；
   (3) 已知 $a=2$ 、 $b=6$ ，求角 $A$ 與角 $B$ 的四個三角函數值。

3. 判斷邊長為 8 cm、15 cm、17 cm 的三角形式不是直角三角形，如果是直角三角形，求最小邊所對角的四個三角函數值。

4. 在直角三角形 $ABC$ 中( $C=90°$ )：
   (1) $\dfrac{a}{c}$ 是角 $A$ 的什麼三角函數值，是角 $B$ 的什麼三角函數值？
   (2) $\dfrac{b}{c}$ 是角 $A$ 的什麼三角函數值，是角 $B$ 的什麼三角函數值？
   (3) $\dfrac{a}{b}$ 是角 $A$ 的什麼三角函數值，是角 $B$ 的什麼三角函數值？

5. 根據下列條件解直角三角形(不用工程計算器)：
   (1) $c=10$ 、 $A=45°$ ；　　(2) $a=6$ 、 $B=30°$ ；
   (3) $a=50$ 、 $c=50\sqrt{2}$ ；　　(4) $a=8\sqrt{5}$ 、 $b=8\sqrt{15}$ 。

6. 根據下列條件利用工程計算器解直角三角形：

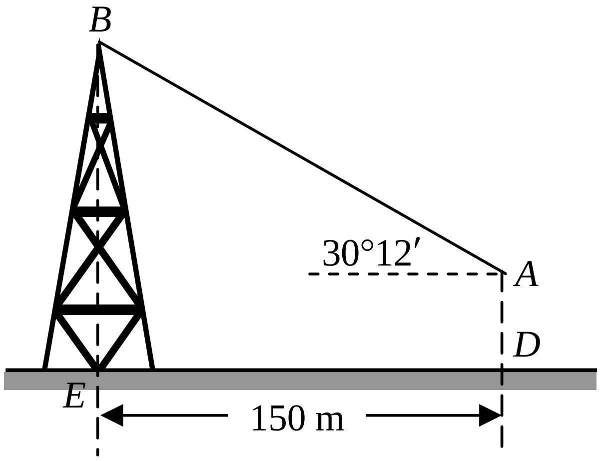
(1) $c = 8.035$ 、 $A = 38°19'$ ；

(2) $b = 7.234$ 、 $A = 7°20'$ ；

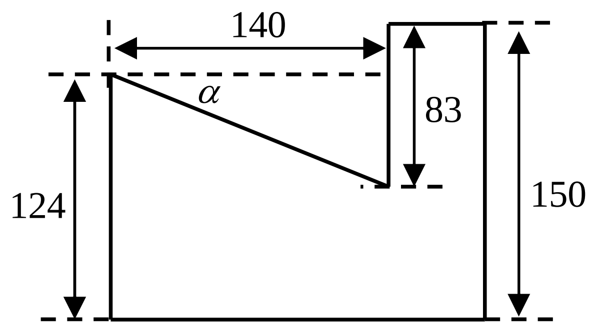
(3) $a = 25.64$ 、 $b = 32.48$ 。

7. 已知等腰三角形的頂角為 $78°4'$ 。底邊上的高是 28.5 cm，求腰長與面積(保留三個有效數字)。

8. 如圖，在離鐵塔 150 m 的 *A* 處，用測角儀器測得塔頂的仰角[5]為 $30°12'$ 。已知測角儀器高 $AD$ = 1.5 m，求鐵塔高 *BE*(精確到 0.1 m)。



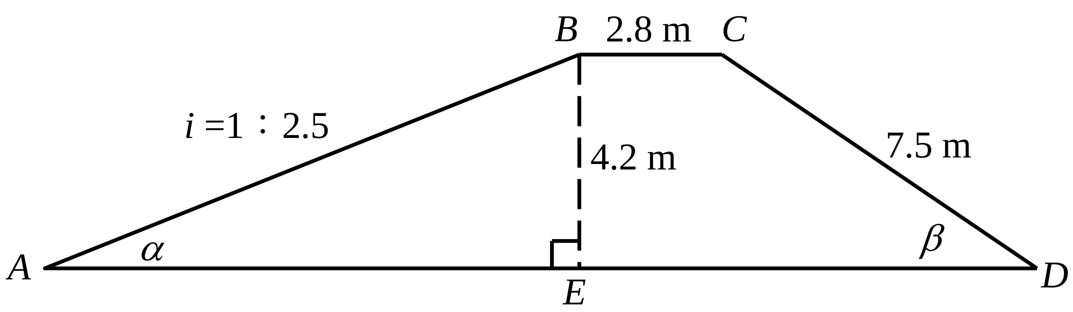
(第 8 題)



(第 9 題)

9. 在加工如圖的墊模時，須計算斜角 $\alpha$ 。根據圖示尺寸求 $\alpha$ 。

10. 如圖，一攔水壩的橫斷面為梯形 *ABCD*，根據圖示數據求坡角 $\alpha$ 與 $\beta$ 、壩底寬 *AD* 與斜坡 *AB* 的長(精確到 0.1 m)。



(第 10 題)

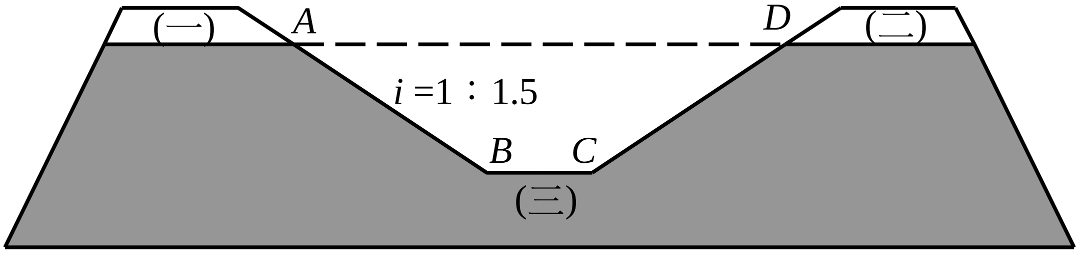
---

[5] 在視線與水平線所成的角中，視線在水平線上方的叫做**仰角**，在水平線下方的叫做**俯角**。

11. 如圖，利用土堤修築一條渠道：在堤中間挖去深為 0.6 m 的一塊(圖中的(三)是挖去部分之橫斷面)，把挖出來的土填在兩旁(圖中的(一)、(二)是填土部分之橫斷面)即成一渠道。已知渠道內坡度為 1：1.5，渠道底寬 $BC$ 為 0.5 m，求：

(1) 橫斷面(等腰梯形)$ABCD$ 的面積；

(2) 修一條長 100 m 的渠道要挖出多少方土？




(第 11 題)

# 三、解斜三角形

## 15.7 化鈍角三角函數為銳角三角函數

在生產實踐與科學研究中，也常遇到解斜三角形(銳角三角形或鈍角三角形)的問題。為了研究斜三角形上邊與角間的關係，我們先討論 $90° \le \alpha < 180°$ 時，角 $\alpha$ 的三角函數之情況。

當 $\alpha = 90°$ 時，角 $\alpha$ 的終邊與 $y$ 軸的正半軸 $Oy$ 重合(圖 15-17)，這時角 $\alpha$ 的終邊上任一點 $P(x, y)$，有 $x = 0$ 、 $y = r = OP$ ，所以

$$\sin 90° = \frac{y}{r} = 1， \qquad \cos 90° = \frac{x}{r} = 0$$

$$\tan 90° = 不存在， \qquad \cot 90° = \frac{x}{y} = 0$$

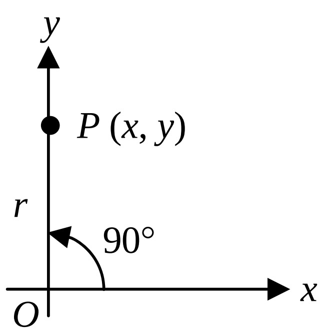



圖 15-17

當 $90° < \alpha < 180°$ 時，角 $\alpha$ 的終邊在第二象限(圖 15-18)，這時角 $\alpha$ 的終邊上任一點 $P(x, y)$，有 $x < 0$ 、 $y > 0$ 、 $r = OP > 0$ 。故

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} > 0\text{，}\quad \cos\alpha = \frac{x}{r} < 0$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} < 0\text{，}\quad \cot\alpha = \frac{x}{y} < 0$$

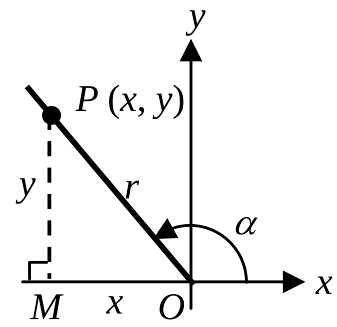


圖 15-18

我們知道銳角三角函數的值都是正的。(為什麼？)但是，對於鈍角三角函數來說，除正弦的值仍是正的以外，餘弦、正切、餘切的值都是負的。

【例 1】 已知角 $\alpha$ 的終邊經過點 $P(-3, 4)$，求角 $\alpha$ 的四個三角函數值(圖 15-19)。

解 $\because\quad x = -3$、$y = 4$

$\therefore\quad r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\therefore\quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

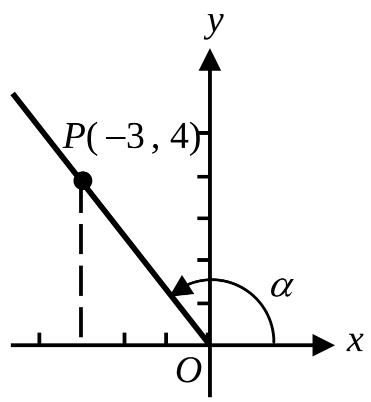


圖 15-19

對於給定的一個鈍角，怎樣求出它的三角函數值呢？

銳角的三角函數值可以查表求得，如果我們能夠把鈍角的三角函數轉化為銳角的三角函數，那麼求鈍角的三角函數值之問題就解決了。

容易知道，任意一個鈍角都可以表示成 $180° - \alpha$ 的形式，其中 $\alpha$ 為銳角。例如，$120° = 180° - 60°$。我們來研究鈍角 $180° - \alpha$ 與銳角 $\alpha$ 的三角函數之間之關係。

如圖 15-20，在鈍角$180°-\alpha$的終邊上任取一點$P(x, y)$，設$OP = r$。在銳角$\alpha$的終邊上取一點$P_1$($x_1, y_1$)，使$OP_1 = r$。那麼，因為$OP$與$OP_1$與$y$軸成相等的角，且$OP = OP_1$所以點$P$與點$P_1$關於$y$軸對稱。於是，這兩個點的座標有下面的關係：

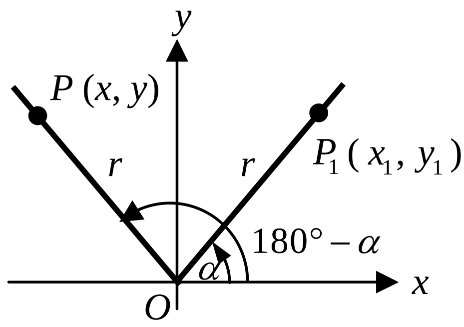


圖 15-20

$$x = -x_1 \text{、} y = y_1$$

$$\therefore \quad \sin(180° - \alpha) = \frac{y}{r} = \frac{y_1}{r} = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x}{r} = \frac{-x_1}{r} = -\cos\alpha$$

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{-x_1} = -\tan\alpha$$

$$\cot(180° - \alpha) = \frac{x}{y} = \frac{-x_1}{y_1} = -\cot\alpha$$

當$\alpha$為銳角時，有

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha}\text{，} & \mathbf{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha} \\ \mathbf{\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha}\text{，} & \mathbf{\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha} \end{array}}$$

這些公式今後經常用到，要記住。

【例 2】 求下列三角函數值：

(1) $\sin 120°$；　(2) $\cos 158°14'$；

(3) $\tan 135°$；　(4) $\cot 150°18'$。

解

(1) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos 158°14' = \cos(180° - 21°46')$

$= -\cos 21°46'$

$= -0.9287$

(3) $\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$；

(4) $\cot 150°18' = \cot(180° - 29°42')$

$= -\cot 29°42'$

$= -1.753$

【例 3】(1) 已知$\sin\alpha = \dfrac{5}{6}$、$0° < \alpha < 180°$，求$\alpha$；

(2) 已知$\cos\alpha = -0.8728$、$0° < \alpha < 180°$，求$\alpha$。

解 (1) 已知$\sin\alpha = \dfrac{5}{6} \approx 0.8333$、$0° < \alpha < 180°$，所以$\alpha$可以是銳角，也可以是鈍角。利用工程計算器計算可得 $\sin 56°27' = 0.8333$，

$\therefore \quad \alpha_1 = 56°27'$

又 $\because \quad \sin(180° - 56°27') = \sin 56°27' = 0.8333$

$\therefore \quad \alpha_2 = 180° - 56°27' = 123°33'$

本題有兩解：

$\alpha_1 = 56°27'$、$\alpha_2 = 123°33'$。

(2) 已知$\cos\alpha$為負值，且$0° < \alpha < 180°$，所以$\alpha$是鈍角。設$\alpha = 180° - \theta$，$\theta$為銳角，於是

$\cos\alpha = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta = -0.8728$，

可得$\cos\theta = 0.8728$。利用工程計算器計算後可得知$\theta = 29°13'$，所以

$\alpha = 180° - 29°13' = 150°47'$。

## 練 習

1. 已知角$\alpha$的終邊分別經過下列各點，求角$\alpha$的四個三角函數值：

   (1) $(-2, 2)$； (2) $(-1, \sqrt{3})$； (3) $(-2, \sqrt{5})$； (4) $(0, 3)$。

2. 求下列三角函數值：

   (1) $\sin 135°$、$\cos 120°$、$\tan 150°$、$\cot 150°$；

   (2) $\sin 118°8'$、$\cos 100°24'$、$\tan 95°12'$、$\cot 151°42'$；

   (3) $\cos 123°26'$、$\sin 90°10'$、$\cot 134°43'$、$\tan 172°21'$；

**練　習**

3. 已知$0° < \theta < 180°$，求下列各式中的$\theta$值：

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$；　(2) $\sin\theta = 0.6517$；　(3) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(4) $\cos\theta = -0.3541$　(5) $\tan\theta = -3.566$；　(6) $\cot\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

## 15.8　餘弦定理

在本節與下節，我們來證明兩個重要定理—餘弦定理與正弦定理，並說明怎樣利用這兩個定理來解斜三角形。

以三角形$ABC$的頂點$A$為原點，射線$AC$為$x$軸的正半軸，建立直角座標系，如圖15-21。這時，頂點$B$可看作角$A$終邊上的一個點，它到原點的距離$r = c$。設點$B$的座標為$(x,\ y)$，由三角函數的定義可知，不論角$A$是銳角、鈍角還是直角，都有$\dfrac{x}{c} = \cos A$、$\dfrac{y}{c} = \sin A$，所以$x = c\cos A$、$y = c\sin A$，即點$B$的座標是$(c\cos A,\ c\sin A)$。又點$C$的座標是$(b,\ 0)$，根據兩點間的距離公式，可得

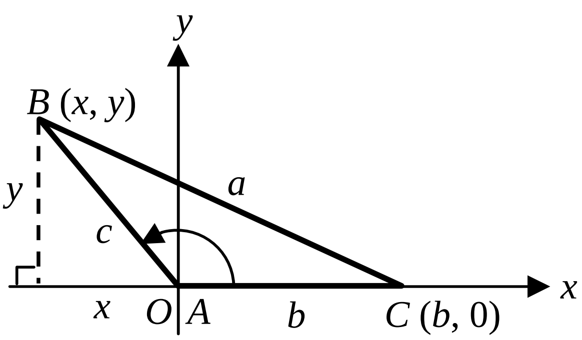


圖 15-21

$$a = BC = \sqrt{(b - c\cos A)^2 + (-c\sin A)^2}$$

兩邊平方，得

$$a^2 = (b - c\cos A)^2 + (-c\sin A)^2$$

化簡等式右邊：

$$\begin{aligned}(b - c\cos A)^2 + (-c\sin A)^2 &= b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A + c^2\sin^2 A \\ &= b^2 + c^2(\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\end{aligned}$$

於是

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad (1)$$

如果以△*ABC* 的頂點 *B* 或頂點為原點，如圖 15-22 建立直角座標系，同樣可證明

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (3)$$

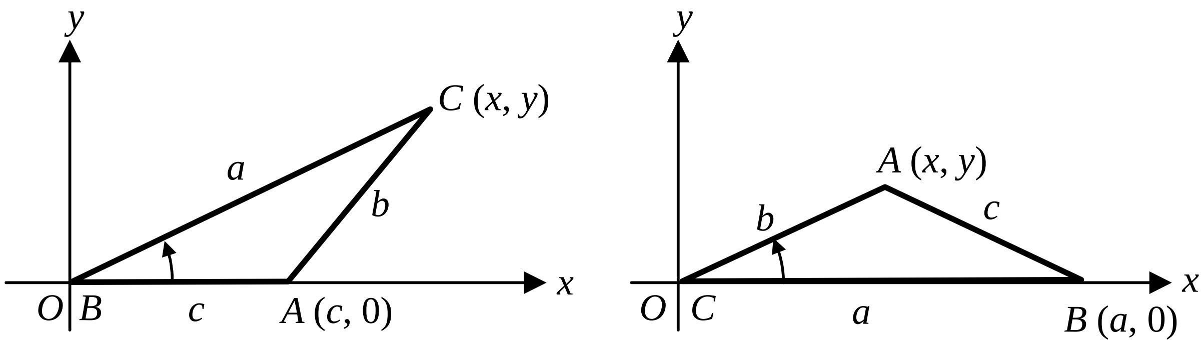



圖 15-22

由此，我們得到關於任意三角形的三條邊與一個角度間關係的重要定理：

**餘弦定理：　三角形任何一邊的平方等於其它兩邊平方的和減去這兩邊與它們夾角的餘弦之積的兩倍。**

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a^2} &= \boldsymbol{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} \\ \boldsymbol{b^2} &= \boldsymbol{c^2 + a^2 - 2ca\cos B} \\ \boldsymbol{c^2} &= \boldsymbol{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \end{aligned}}$$

如果三角形 *ABC* 中有一個角是直角，例如，$C = 90°$，這時 $\cos C = 0$，由餘弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2$，這就是勾股定理。由此可見，餘弦定理是勾股定理的推廣，而勾股定理是餘弦定理的特例。

由(1)、(2)、(3)式可得：

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$\boldsymbol{\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

利用餘弦定理可以解決以下兩類解斜三角形的問題：

(1) 已知三邊，求三個角；

(2) 已知兩邊與它們的夾角，求第三邊與其它兩個角。

【例】 在△$ABC$ 中，已知 $a=7$ 、 $b=10$ 、 $c=6$ ，求 $A$、$B$ 與 $C$ (精確到$1°$)。

解 (1) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{10^2+6^2-7^2}{2\times10\times6} = \dfrac{87}{120} = 0.7250$，用工程用計算器計算，得 $A \approx 44°$ ；

(2) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{7^2+10^2-6^2}{2\times7\times10} = \dfrac{113}{140} \approx 0.8071$，用工程用計算器計算，得 $C \approx 36°$ ；

(3) $B = 180° - (A+C) \approx 180° - (44°+36°) = 100°$ 。

**注意：** 例題中我們先利用餘弦定理求出兩個銳角 $A$ 與 $C$，然後利用「三角形內角和定理」求角 $B$， $B=100°$ ，是一個鈍角。如果用餘弦定理求角 $B$，由於角 $B$ 是鈍角，$\cos B$ 應該取負值。一般已知三角形的三邊求角時，根據「三角形內大邊所對的角較大」，我們只要先求較小的邊所對的角，這時所求的角必為銳角(想一想這是為什麼)。

**練 習**

1. 在三角形 $ABC$ 中：

   (1) 已知 $b=8$ 、 $c=3$、 $A=60°$ ，求 $a$；

   (2) 已知 $a=20$ 、 $b=29$ 、 $c=21$ ，求 $B$；

   (3) 已知 $a=3\sqrt{3}$ 、 $c=2$ 、 $B=150°$ ，求 $b$；

   (4) 已知 $a=2$ 、 $b=\sqrt{2}$ 、 $c=\sqrt{3}+1$ ，求 $A$。

2. 根據下列條件解三角形：

   (1) $a=31$ 、 $b=42$ 、 $c=27$ ；

   (2) $a=9$ 、 $b=10$ 、 $c=15$ 。

## 15.9　正弦定理

如圖 15-23，以△$ABC$ 的頂點 $A$ 為原點，邊 $AC$ 所在的射線為 $x$ 軸的正半軸建立直角座標系。由上節我們知道，頂點 $B$ 的座標是$(c\cos A, c\sin A)$。容易知道，$AC$ 邊上的高 $BE$ 就是 $B$ 點的縱座標 $c\sin A$，於是△$ABC$ 的面積

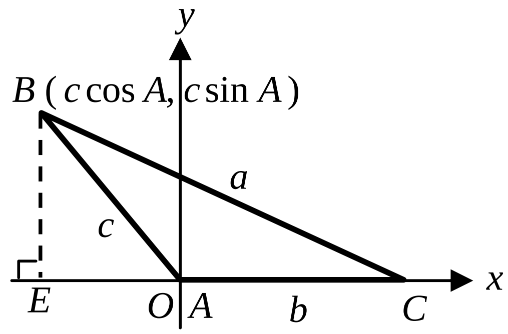


圖 15-23

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times AC\times BE=\frac{1}{2}bc\sin A\text{。}$$

同樣可得(參看圖 15-22)：

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ca\sin B\text{、}S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C\text{。}$$

由此，我們得到關於任意三角形面積的公式：

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}}$$

也就是說**三角形的面積等於任意兩邊與它們夾角的正弦的積的一半**。

將等式

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

各除以 $\frac{1}{2}abc$，可得

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\text{。}$$

由此，我們得到關於任意三角形邊與角間的關係的另一個重要定理：

**正弦定理：　在一個三角形中，各邊與它所對角的正弦的比相等**

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}}$$

如果三角形 $ABC$ 中有一個角是直角，例如，$C=90°$，這時 $\sin C=1$，由正弦定理可得 $\sin A=\dfrac{a}{c}$、$\sin B=\dfrac{b}{c}$，這與 15.4 節直角三角形內邊與角的關係是一致的。

利用正弦定理與三角形內角和定理，可以解決以下兩類解斜三角形的問題：

(1) 已知兩角與任一邊，求其它兩邊與一角；

(2) 已知兩邊與其中一邊的對角，求另一邊的對角(從而進一步求出其它的邊與角)。

【例 1】在△$ABC$ 中，已知 $c=10$、$A=45°$、$C=30°$，求 $b$ 與 $S_{\triangle}$ (結果保留兩個有效數字)。

$\boxed{\text{解}}$ (1) $\because$ $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，$B=180°-(A+C)$

$$\therefore\quad b=\frac{c\sin[180°-(A+C)]}{\sin C}=\frac{10\sin[180°-(45°+30°)]}{\sin 30°}=\frac{10\sin 75°}{\frac{1}{2}}\approx 19.3$$

(2) $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}bc\sin A\approx\dfrac{1}{2}\times 19.3\times 10\times\sin 45°\approx 68$。

【例 2】在△$ABC$ 中，已知 $a=20$、$b=28$、$A=40°$，求 $B$(精確到$1°$)與 $c$ (結果保留兩個有效數字)。

$\boxed{\text{解}}$ (1) $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 40°}{20}\approx 0.8999$，利用工程計算器計算可得銳角 $B_1=64°$。

又因 $\sin(180°-B_1)=\sin B_1$，鈍角 $B_2=180°-B_1$ 也符合題設條件，可得 $B_2=180°-64°=116°$。

(2) 當 $B_1 = 64°$ 時，

$$c_1 = \frac{a\sin[180° - (A + B_1)]}{\sin A}$$
$$= \frac{20 \bullet \sin[180° - (40° + 64°)]}{\sin 40°}$$
$$= \frac{20 \bullet \sin 76°}{\sin 40°}$$
$$\approx 30$$

當 $B_2 = 116°$ 時，

$$c_2 = \frac{a\sin[180° - (A + B_1)]}{\sin A}$$
$$= \frac{20 \bullet \sin[180° - (40° + 116°)]}{\sin 40°}$$
$$= \frac{20 \bullet \sin 24°}{\sin 40°}$$
$$\approx 13$$

想一想：例 2 用餘弦定理怎樣求解？

在圖 15-24 中，我們先畫出 $\angle PAQ = 40°$，接著在 $AQ$ 上取出 $AC = b = 28$ mm，以 $C$ 為圓心、$a = 20\,\text{mm}$ 為半徑畫弧。可以看到，所畫的弧與 $AP$ 相交於兩點 $B_1$ 、 $B_2$ ，因而可以作出兩三角形，$\triangle AB_1C$ 與 $\triangle AB_2C$ 都符合題設條件，這就表示例 2 有兩解。

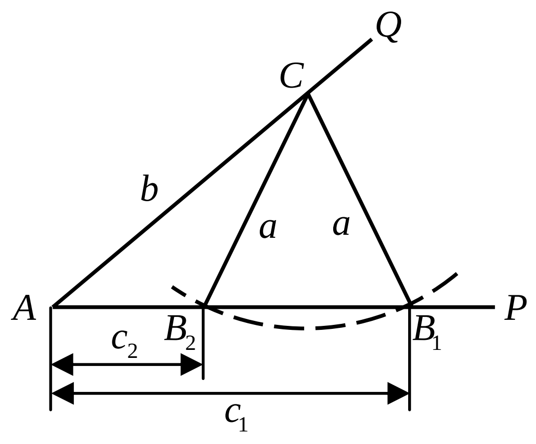



圖 15-24

【例 3】 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a = 60$ 、 $b = 50$ 、 $A = 38°$ ，求 $B$(精確到$1°$)與 $c$ (結果保留兩個有效數字)。

解 (1) 已知 $b<a$，所以 $B<A$，$B$ 也為銳角。

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{50\sin 38^\circ}{60}\approx 0.5131$，利用工程計算器計算可得銳角 $B=31^\circ$。

(2) 
$$\begin{aligned}c_1&=\frac{a\sin C}{\sin A}\\&=\frac{a\sin[180^\circ-(A+B)]}{\sin A}\\&=\frac{a\sin(A+B)}{\sin A}\\&=\frac{60\bullet\sin(38^\circ+31^\circ)}{\sin 38^\circ}\\&=\frac{60\bullet\sin 69^\circ}{\sin 38^\circ}\\&\approx 91\end{aligned}$$

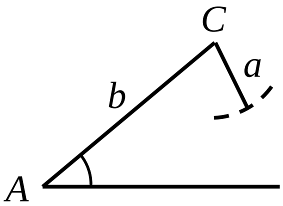
【例 4】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=18$、$b=20$、$A=150^\circ$，解這個三角形。

解 這裡 $A$ 為鈍角，$a$ 應是最長邊，但 $b>a$，所以本題無解。

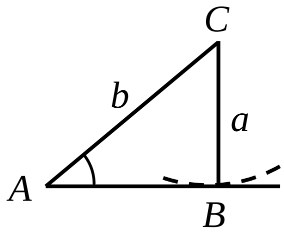
對於例 3 與例 4，按照圖 15-24 的方法，試畫三角形，結果怎樣？

一般地，已知兩邊與其中一邊的對角解三角形，有兩解、一解、無解三種情況。圖 15-25(*a*)、(*b*)說明了在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a$、$b$ 與 $A$ 時解三角形的各種情況。

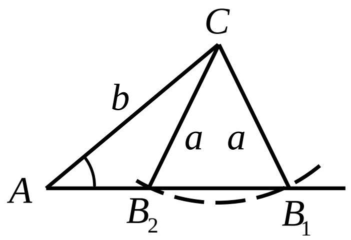
(1) $A$ 為銳角：




$a<b\sin A$
無解

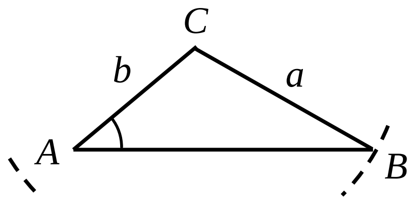



$a=b\sin A$
一解




$b\sin A < a < b$

兩解

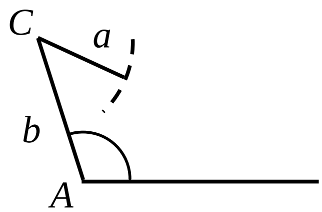



$a \ge b$

一解

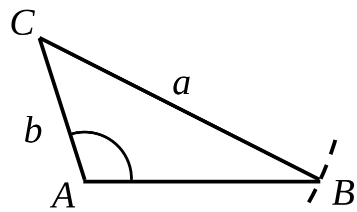
圖 15-24 (a)

(2) $A$ 為直角或鈍角：




$a \le b$

無解




$a > b$

一解

圖 15-24 (b)

**練 習**

1. 在三角形 $ABC$ 中：
   (1) 已知 $c=\sqrt{3}$、$A=45°$、$B=60°$，求 $b$、$S_{\triangle}$；
   (2) 已知 $b=12$、$A=30°$、$B=120°$，求 $a$。
   (結果保留兩個有效數字)

2. 根據下列條件解三角形(如果有解，角度精確到1°，邊長保留兩個有效數字)：
   (1) $a=15$、$b=10$、$A=60°$；
   (2) $b=40$、$c=20$、$C=25°$；
   (3) $b=11$、$a=25$、$B=30°$。

## 15.10 應用舉例

下面舉例說明解斜三角形在實際中的一些應用。

【例 1】 自動卸貨汽車的車廂採用液壓機構。設計時須要計算油泵頂桿 $BC$ 的長度(圖 15-26)。已知車廂的最大仰角為 $60°$，油泵頂點 $B$ 與車廂支點 $A$ 之間的距離為 1.95 m、$AB$ 與水平線之間的夾角為 $6°20'$、$AC$ 長為 1.4 m，計算 $BC$ 的長(保留三個有效數字)。

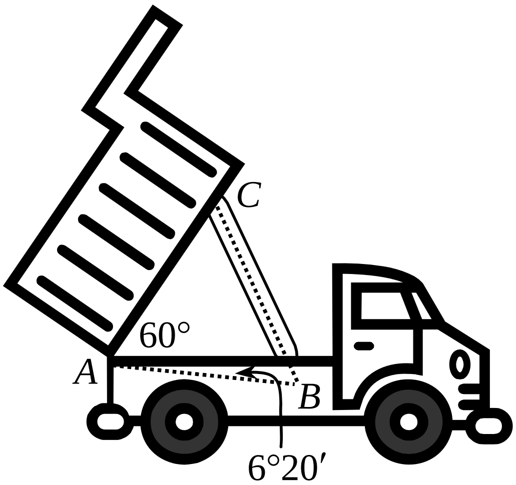


圖 15-26

**分析**： 此題就是在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 1.95\,\text{m}$、$AC = 1.40\,\text{m}$、$\angle BAC = 60° + 6°20' = 66°20'$，求出 $BC$ 的長。由於已知 $\triangle ABC$ 的兩邊與一夾角，所以可根據餘弦定理求出 $BC$。

$\boxed{\text{解}}$ 由餘弦定理：

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \bullet AC\cos A$$
$$= 1.95^2 + 1.40^2 - 2 \times 1.95 \times 1.40\cos 66°20'$$

用工程計算器計算得 $BC \approx 1.89\,\text{m}$。

**答**：頂桿 $BC$ 約長 1.89 m。

【例 2】 為了在一條河上建一座橋，施工前在兩岸打上兩個橋位樁 $A$、$B$(圖 15-27)。要精確測量出 $A$、$B$ 兩點間的距離，測量人員在岸邊訂出基線 $BC$，測得 $BC = 78.35\,\text{m}$、角 $B = 69°43'$、角 $C = 41°12'$。計算 $AB$ 的長(精確到 0.01 m)

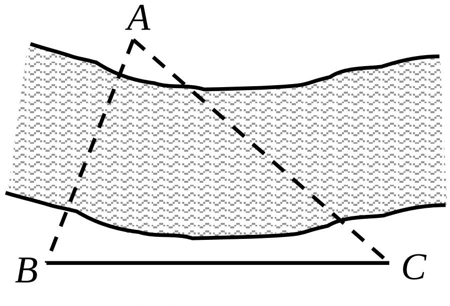


圖 15-27

解　　在$\triangle ABC$中，已知$a=78.35$、$B=69°43'$、$C=41°12'$。

$A=180°-(B+C)=180°-(69°43'+41°12')=69°5'$

由正弦定理，可得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{78.35\times\sin 41°12'}{\sin 69°5'}。$$

用工程計算器計算得$c\approx 55.26\ \text{m}$。

**答：**橋位樁 $A$、$B$ 間的距離約為 55.26 m。

【例 3】圖 15-28 是曲柄連桿機構的示意圖。當曲柄 $CB$ 繞 $C$ 點旋轉時，通過連桿 $AB$ 的傳遞，使活塞做直線往復運動。當曲柄在$CB_0$位置時，曲柄與連桿成一直線，連桿的端點 $A$ 在 $A_0$ 處。設連桿 $AB$ 長 340 mm、曲柄 $CB$ 長 85 mm，求曲柄自$CB_0$按順時針方向旋轉$80°$時，活塞的移動距離(即連桿的端點 $A$ 移動的距離 $A_0A$)(精確到 1 mm)。

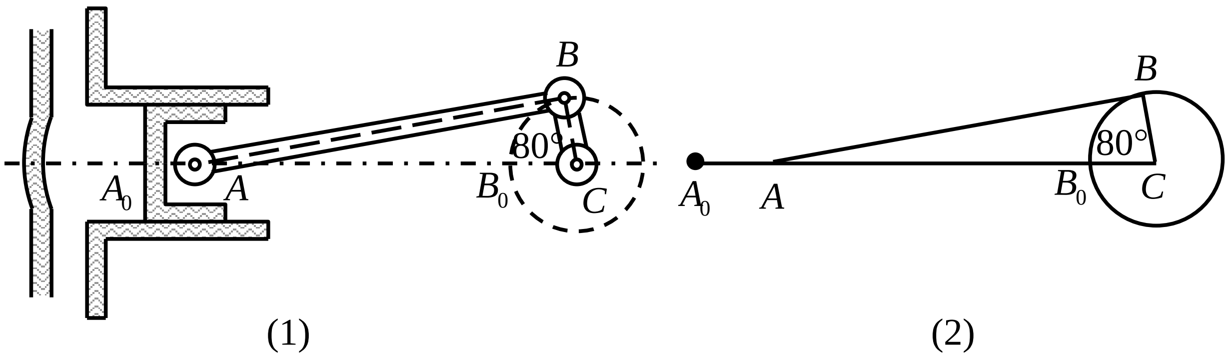



圖 15-26

分析：因為$A_0A=A_0C-AC$，又知$A_0C=AB+BC=340+85=425$ mm，所以只要求出 $AC$ 的長，問題就解決了。而在$\triangle ABC$中，已知兩邊與其中一邊的對角，可以由正弦定理求出 $AC$。

解　　在$\triangle ABC$中，由正弦定理可得：

$$\sin A=\frac{BC\sin C}{AB}=\frac{85\times\sin 80°}{340}\approx 0.2462，$$

用工程計算器計算得$A\approx 14°15'$；

再由正弦定理，可得：

$$AC = \frac{AB\sin B}{\sin C} = \frac{340\times\sin 85°45'}{\sin 80°}\ ,$$

用工程計算器計算得 $AC \approx 344.3\,\text{mm}$；

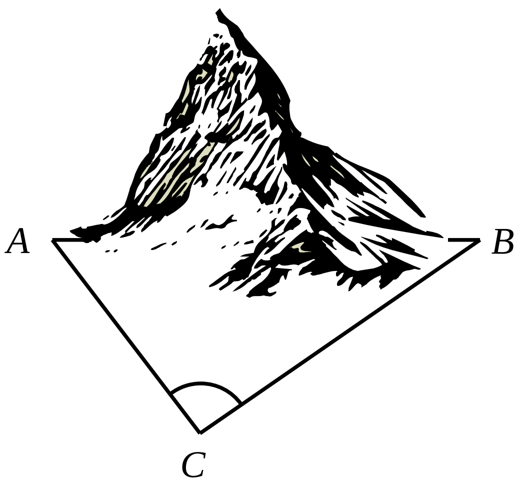
因此，

$$\begin{aligned}A_0A &= A_0C - AC\\ &= (AB + BC) - AC\\ &= (340 + 85) - 344.3\\ &= 80.7\\ &\approx 81\ \text{mm}\end{aligned}$$

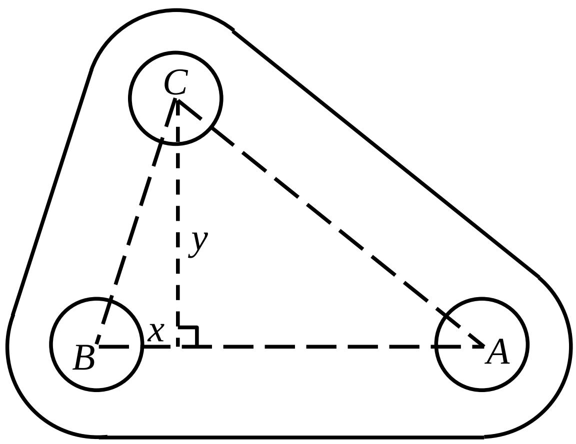
**答：**曲柄自 $CB_0$ 轉 $80°$ 時，活塞的移動距離約為 81 mm。

**練　習**

1. 如圖，為了測量兩點 $A$、$B$(這兩點之間不能互相看到，也不能直達)間的距離，在地面上選擇適當的點 $C$，測得 $AC$ = 213.4 m、$BC$ = 252.1 m、 $\angle ACB = 50°13'$。計算 $AB$ 的長。




(第 1 題)

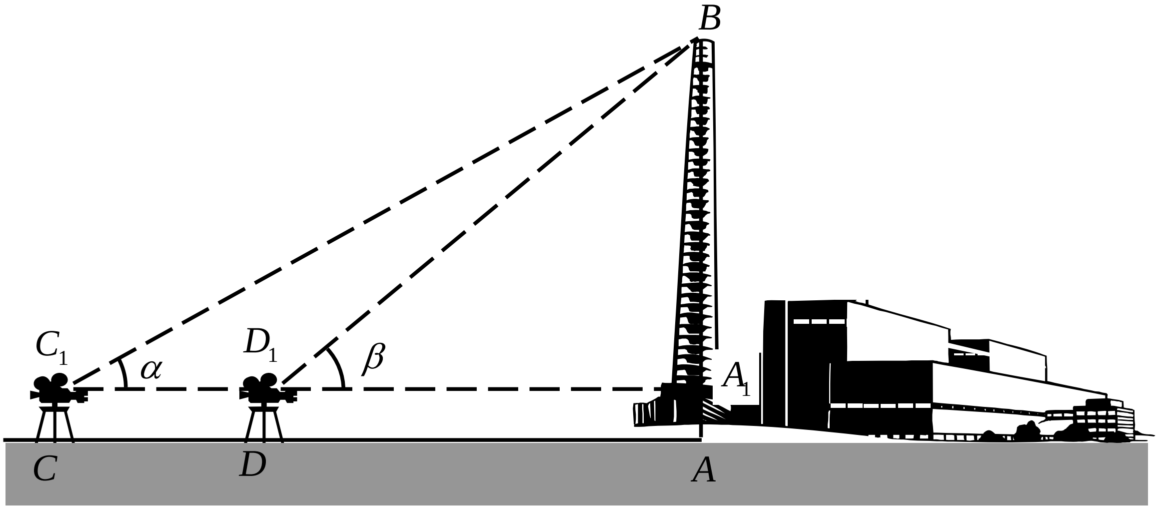



(第 2 題)

2. 如圖，某零件要鑽三個孔 $A$、$B$、$C$，已知孔心距 $AB$ = 112.5 mm、$BC$ = 75.4 mm、$AC$ = 114.2 mm，如果 $A$、$B$ 兩孔已加工完畢，刀桿在 $B$ 孔處，刀桿要沿著 $BA$ 方向與垂直於 $BA$ 方向各移動多少 mm(即求 $x$ 與 $y$，精確到 0.1 mm)，才能鑽出 $C$ 孔？

## 練　習

3. 如圖，要測底部不能到達的煙囪高 $AB$ 從與煙囪底部在同一水平直線上的 $C$、$D$ 兩處，測得煙囪的仰角分別是 $\alpha = 35°12'$ 與 $\beta = 49°28'$，$C$、$D$ 間的距離是 11.12 m。已知測角儀器高 1.52 m，求煙囪的高。

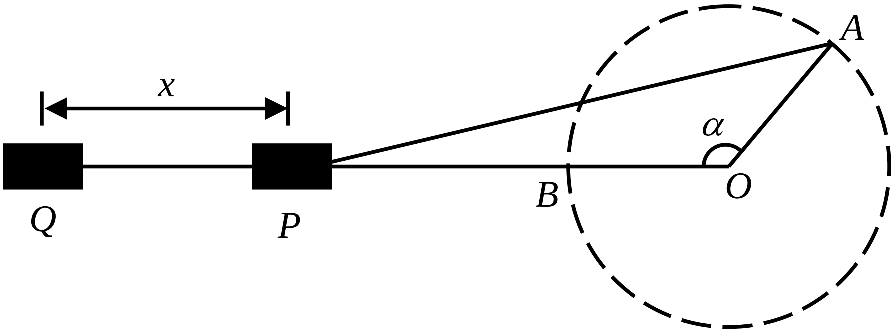



(第 3 題)

4. 圖為曲柄連桿機構示意圖。當曲柄 $OA$ 在水平位置 $OB$ 時，連桿端點 $P$ 在 $Q$ 的位置。當 $OA$ 自 $OB$ 按順時針方向旋轉 $\alpha$ 角時，$P$ 與 $Q$ 之間的距離是 $x$。已知 $OA$ = 25 cm、$AP$ = 125 cm，求在下列條件下的 $x$ 值：

(1)　$\alpha = 50°$；　　(2)　$\alpha = 90°$；

(3)　$\alpha = 135°$；　　(4)　$OA \perp AP$；




(第 4 題)

## 習　題　十　一

1. 求下列三角函數值：
   (1) $\sin 158°54'$、$\cos 172°36'$、$\tan 105°6'$、$\cot 91°42'$；
   (2) $\sin 136°27'$、$\cos 118°38'$、$\tan 155°56'$、$\cot 142°19'$。

2. 把下列各式寫成銳角 $\alpha$ 或 $\beta$ 的三角函數的形式：
   (1) $\sin(180°-\alpha)$；　(2) $\cos(180°-\beta)$；
   (3) $\tan(90°-\alpha)$；　(4) $\cot(180°-\beta)$。

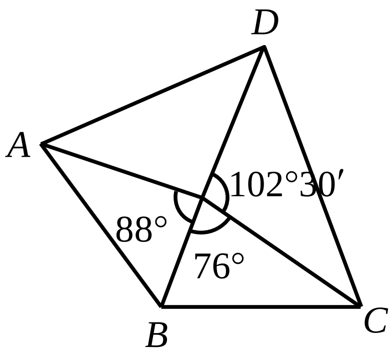
3. 設 $A$、$B$、$C$ 為一個三角形的三個內角，求證：
   (1) $\sin(A+B)=\sin C$；　(2) $\cos(B+C)=-\cos A$。

4. 求適合下列各式的三角形內角 $A$：
   (1) $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$、$\cos A=-\dfrac{1}{2}$、$\tan A=-1$、$\cot A=-\sqrt{3}$；
   (2) $\sin A=0.2529$、$\cos A=-0.9756$、$\tan A=-1.998$。

5. 在△$ABC$ 中：
   (1) 已知 $a=49$、$b=26$、$C=107°$，求 $c$、$B$；
   (2) 已知 $a=84$、$b=56$、$c=74$，求 $A$；
   (3) 已知 $c=68$、$A=34°$、$B=56°$，求 $a$ 與 $S_{\triangle}$。
   (本題要求角度精確到1°，邊長、面積保留兩個有效數字)

6. 根據下列條件，解三角形(角度精確到1°，邊長保留兩個有效數字)：
   (1) $b=26$、$c=15$、$C=23°$；
   (2) $b=54$、$c=39$、$C=115°$。

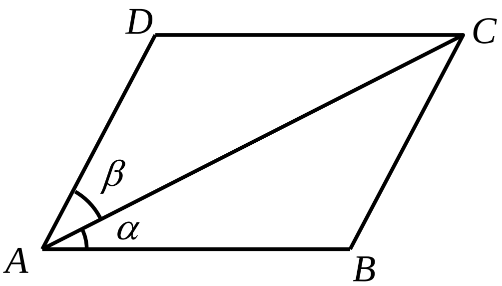
7. 從四邊形操場 $ABCD$ 內的 $O$ 點，測得 $OA=39.8$ m、$OB=36.7$ m、$OC=42.3$m、$OD=44.1$m、$\angle AOB=88°$、$\angle BOC=76°$、$\angle COD=102°30'$，求這個操場的面積(保留兩個有效數字)。



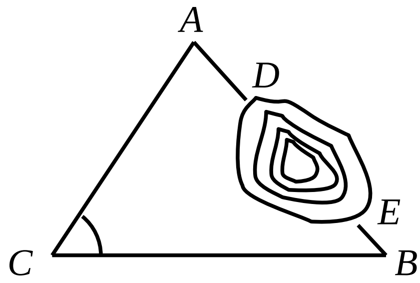
(第 7 題)

8. 已知平行四邊形兩條鄰邊的長分別是$4\sqrt{6}$ cm 與$4\sqrt{3}$ cm，它們的夾角是45°，求這個平行四邊形的兩條對角線的長與它的面積。

9. 如圖，已知平行四邊形 *ABCD* 的對角線 *AC* = 57 cm，它與兩條鄰邊 *AB* 與 *AD* 的夾角分別是$\alpha = 27°$與$\beta = 35°$，求 *AB* 與 *AD* (精確到 1 cm)。



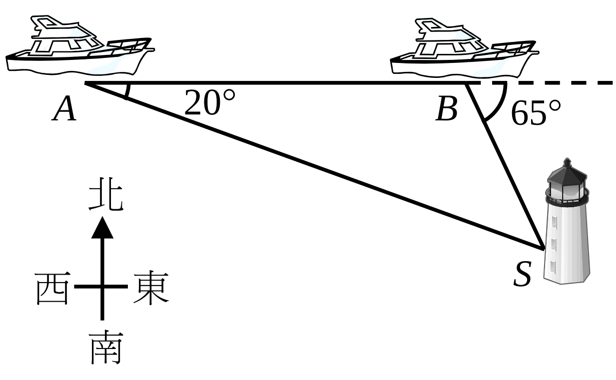
(第 9 題)



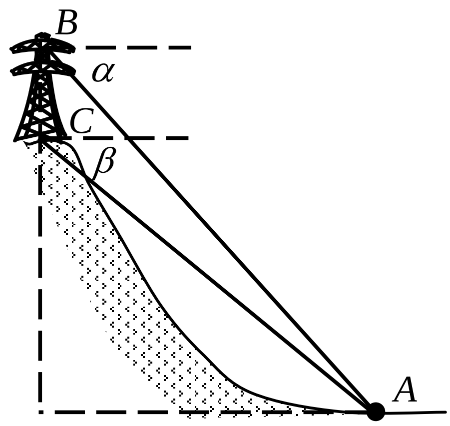
(第 10 題)

10. 為了開鑿隧道，要測量隧道口 *D*、*E* 間的距離。為此在山的一側選取適當的點 *C*(如圖)，測得 *CA* = 482.8 m、*CB* = 631.5 m、$\angle ACB = 56°18'$，及 *A*、*B* 兩點到隧道口的距離 *AD* = 80.12 m、*BE* = 40.24 m(*A*、*D*、*E*、*B* 在一直線上)。計算隧道 *DE* 的長。

11. 如圖，一艘船以 32.2 km/小時的速度向正北航行。在 *A* 處看燈塔 *S* 在船的北偏東20°，半小時後航行到 *B* 處，在 *B* 處看燈塔 *S* 在船的北偏東65°。求燈塔 *S* 與 *B* 處的距離(精確到 0.1 km)。



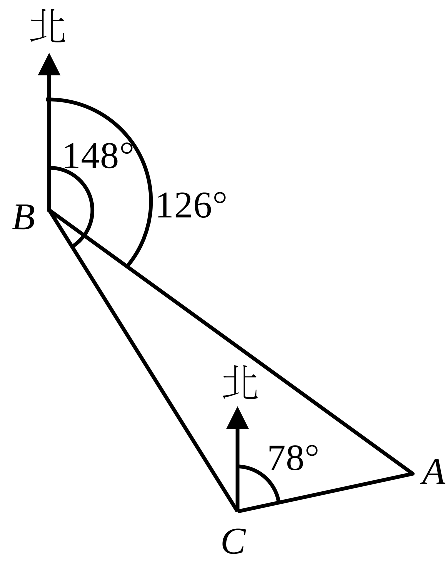
(第 11 題)



(第 12 題)

12. 如圖，在山頂鐵塔上 *B* 處測得地面上點 *A* 的俯角$\alpha = 54°40'$，在塔底 *C* 處測得點 *A* 的俯角$\beta = 50°1'$。已知鐵塔 *BC* 部分高 27.3 m，求山高 *CD*(精確到 1 m)。

13. 如圖，貨輪在海上以 35 km/小時的速度沿著方位角(從指北方向順時針轉到目標方向線的水平角)為 $148°$ 的方向航行。為了確定船位，在 $B$ 點觀測燈塔 $A$ 的方位角是 $126°$，航行半小時後到達 $C$ 點，觀測燈塔 $A$ 的方位角是 $78°$。求貨輪到達 $C$ 點時與燈塔 $A$ 的距離(精確到 1 km)。



(第 13 題)

## 小　结

一、本章主要內容是三角函數的初步概念與解三角形的方法。

二、設角 $\alpha$ 的頂點在原點 $O$，始邊與 $x$ 軸的正半軸重合，終邊上任一點 $P$ 的座標是 $(x, y)$，$OP = r$。角 $\alpha$ 的三角函數是：

角 $\alpha$ 的正弦 $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$、角 $\alpha$ 的餘弦 $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$、

角 $\alpha$ 的正切 $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$、角 $\alpha$ 的餘切 $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$。

三角函數間有下列關係：

(1) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$，$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$，$\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

(2) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$，$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$，$\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$

三、特殊角的三角函數值：

| 三角函數值 \ 三角函數 \ $\alpha$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | 不存在 |
| $\cot\alpha$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

非特殊銳角的三角函數值可以查三角函數表或利用工程計算器計求得。求鈍角的三角函數值，可以根據角$180°-\alpha$與角$\alpha$間的三角函數關係式，把它轉化為求銳角的三角函數值。

若已知銳角或鈍角的三角函數值，可得此銳角或鈍角的值。

四、設直角三角形的一個銳角是$\alpha$。

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}，\quad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\alpha\text{ 的對邊}}{\alpha\text{ 的鄰邊}}，\quad \cot\alpha=\frac{\alpha\text{ 的鄰邊}}{\alpha\text{ 的對邊}}$$

利用這些關係式以及勾股定理與兩銳角互餘的關係，可以解直角三角形，關鍵在於適當選用恰含一個未知量的關係式。

五、任意三角形 $ABC$ 中，邊與角間有如下的關係：

(1) 餘弦定理：$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$

(2) 正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

解任意三角形的問題可以分為下列四種類型：

(1) 已知三邊；　　(2) 已知兩邊與它們的夾角；

(3) 已知兩角與一邊；　　(4) 已知兩邊與其中一邊的對角

一般地，(1)、(2)兩種類型可用餘弦定理與三角形內角和定理來解；(3)、(4)兩種類型可用正弦定理與三角形內角和定理來解。第(1)、(2)、(3) 種三種類型的問題，或者只有一解，或者無解。第(4)種類型的問題，可有兩解、一解或無解。

根據三角形中已知的邊與角(至少包含一條邊)的大小，可以計算出未知的邊與角的大小。這樣從數量上進一步闡明了三角形中各元素間的關係，使我們對三角形的認識又深入了一步。

## 複習參考題十五

1. 已知角$\alpha$的終邊分別經過下列各點，求角$\alpha$的的四個三角函數值。

   (1) $(-8, 6)$；　(2) $(5, \sqrt{7})$；　(3) $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$；　(4) $(0, \dfrac{2}{3})$

2. 在直角三角形 $ABC$ 中，角 $C$ 為直角，$CD$ 是斜邊 $AB$ 上的高。分別寫出等於角 $A$ 的正弦、餘弦、正切的線段的比。這樣的比有多少個？

3. 求下列各式的值：

   (1) $\tan^2 150°+2\sin 60°+\tan 45°\sin 90°-\tan 60°+\cos^2 30°$；

   (2) $\cos 60°-\sin^2 135°+\dfrac{3}{4}\tan^2 30°+\cos^2 30°-\sin 30°$；

   (3) $\dfrac{\sin 90°}{\tan 45°-\sin 120°}$；　(4) $\dfrac{\tan 30°\cos 135°\sin 60°}{\cot 120°\sin 150°}$。

4. 求下列三角函數值：

   (1) $\sin 162°21'$、$\cos 103°16'$、$\tan 93°53'$、$\cot 145°3'$；

   (2) $\sin 109°43'$、$\cos 167°4'$、$\tan 151°32'$、$\cot 100°32'$。

5.　求適合下列各式的三角形的內角 $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$：

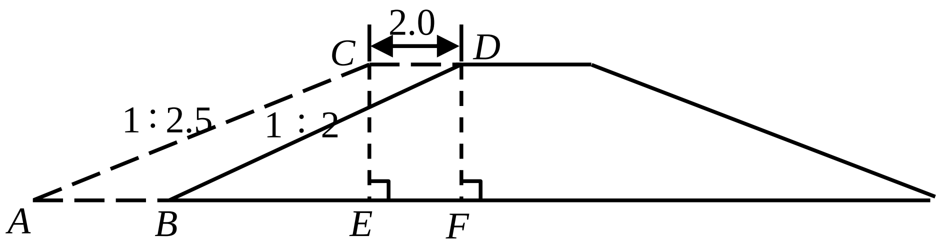
(1) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\cos\alpha = -0.6581$ 、 $\tan\alpha = 35.43$ ；

(2) $\sin\alpha = \sin 15°$ 、 $\cos\alpha = -\cos 45°$ 、 $-\cot\alpha = \cot 115°$ 。

6.　設 $A$、$B$、$C$ 是一個三角形的三個內角，求證：

(1) $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$ ；　(2) $\tan\dfrac{B+C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}$ 。

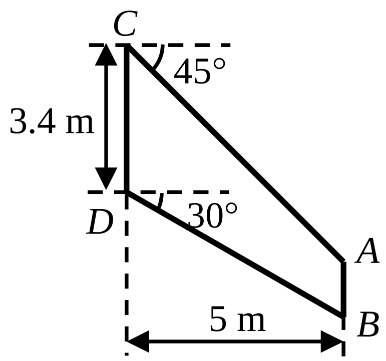
7.　沿著水庫攔水壩的背水坡將壩面加寬 2.0 m，坡度由原來的 1∶2 改成 1∶2.5。已知原背水坡長 $BD$ = 13.4 m、壩長 90 m，求完成這一工程需多少方土(保留兩個有效數字)。




(第 7 題)

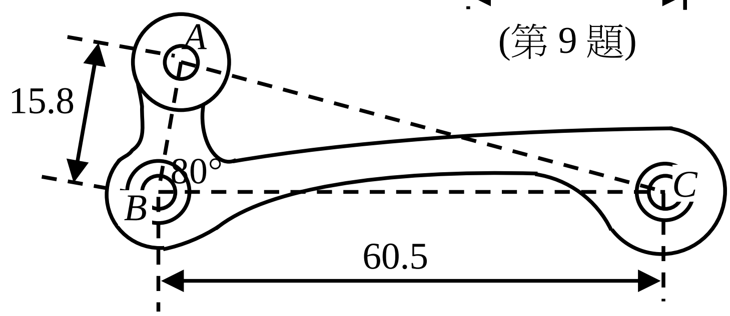
8.　直角三角形 $ABC$ 中，已知 $A = 32°20'$，角 $A$ 的平分線 $AT$ = 14.7 cm。求直角邊 $BC$ 與斜邊 $AB$ 的長(保留三個有效數字)。

9.　某型號飛機的機翼如圖，根據圖示尺寸計算 $AC$、$BD$ 與 $AB$ 的長度(保留三個有效數字)。




(第 9 題)

10.　縫紉機挑線桿的形狀如圖，在加工時須要計算 $A$、$C$ 兩孔中心的距離。若 $BC$ = 60.5 mm、$AB$ = 15.8 mm、$\angle ABC = 80°$，求 $AC$ (保留三個有效數字)。




(第 10 題)

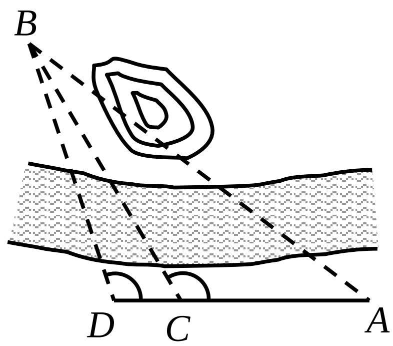
11.　已知梯形 $ABCD$ 的上底 $DC$ = 15.3 cm、下底 $AB$ = 24.2 cm、一腰 $AD$ = 12.0 cm、另一腰 $BC$ = 11.7 cm，求這梯形的各角與面積(保留三個有效數字)。

12. 已知△$ABC$ 的面積為 12 $\text{cm}^2$，邊長 $a = 6$ cm、$b = 8$ cm，求這兩邊的夾角 $C$，並畫圖說明解的情況。

13. 在△$ABC$ 中，$AD$ 為角 $A$ 的平分線，用正弦定理證明：

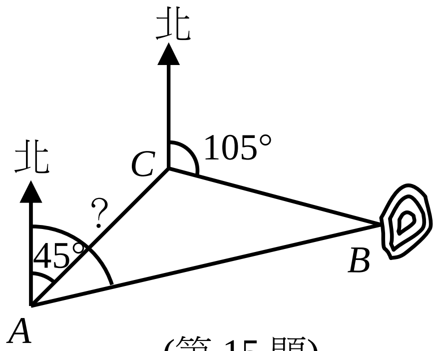
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

14. 如圖，$A$、$B$ 兩點間有小山與小河，為求 $AB$ 的長，選擇一點 $D$，使 $AD$ 可直接丈量且 $B$、$D$ 兩點可以互相看到，再在 $AD$ 上選一點 $C$，使 $B$、$C$ 兩點可以互相看到。已測得：$AC = 149.46\,\text{m}$、$CD = 52.61\,\text{m}$、$\angle ADB = 108°15'$、$\angle ACB = 120°25'$。求 $AB$。



(第 14 題)

15. 某漁船在航行中不幸遇險，發出呼救信號。有一艘軍艦在 $A$ 處獲悉後，立即測出該漁船在方位角為 $45°$、距離為 10 km 的 $C$ 處，並測得漁船正沿方位角為$105°$的方向，以 9 km/小時的速度向小島 $B$ 靠攏。這一艘軍艦立即以 21 km/小時的速度前去營救。求出軍艦的航向與靠近漁船所需的時間(提示：設軍艦收到信號後 $x$ 小時在 $B$ 處靠攏漁船)。



(第 15 題)

16. 用餘弦定理證明：平行四邊形兩對角線平方的和等於四邊平方的和。

17. 根據三角形的面積公式(海倫公式(Heron’s Formula))

$$S_{\triangle}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$a$、$b$、$c$ 是三角形三邊的長)，計算下列各題中的三角形面積 $S_{\triangle}$。

(1) $a=20$、$b=13$、$c=21$； (2) $a=17$、$b=21$、$c=10$。