數學傳播 36卷3期, pp. 86-96

三角學的歷史對任意角三角函數的教學啓示

楊孝斌

摘要: 三角學的發展歷史表明, "比"的關係一直貫穿著整個三角學的發生發展史, 三角函數的定義的本質應是"三角比", 即與角有關的線段 (或有向線段) 之比。國中的銳角三角函數是採用"三角比"來定義的, 這正是初高中三角函數知識的銜接點。高中討論的是任意角的三角函數的定義, 主要以平面直角坐標系中點的坐標爲研究工具。點的坐標並不是三角函數的定義中的最本質的東西, 最本質的是"比"的關係。教師在教學中應開展基於三角學發展史的教學設計, 幫助學生理解任意角三角函數定義的本質

關鍵字:教育取向的數學史研究; 三角學; 三角函數; 數學教學。

0. 引言: 開展教育取向的數學史研究

數學史家李文林先生認爲, 數學史的研究具有三重目的: 一是歷史的目的, 即恢復歷史的本來面目; 二是數學的目的, 即古爲今用, 爲現實的數學研究與自主創新提供歷史借鑒; 三是教育的目的, 即在數學教學中利用數學史, 這在當前已成爲一種國際現象。[1]

數學教師要重視數學史在數學教學中的意義和作用, 要學習與教學內容有關的數學史實, 並在數學教學中展現數學知識的發現歷程, 讓學生瞭解數學知識的來龍去脈。展現數學知識的發現過程, 不是簡單敍述數學史實, 重複數學家的"原發現過程"。而是需要教師開展教育取向的數學史研究, 將數學知識的"學術形態"轉化爲 "教育形態", 從中獲得對數學教學的啓示, 引導學生重走數學發現之路。

所謂教育取向的數學史研究, 就是從課程與教學的角度出發, 對數學史的相關內容進行教學法加工和方法論重建, 以實現數學史研究的教育目的。其主要方法是通過對數學史的壓縮、整

合、刪繁就簡、提煉數學思想方法等, 並在此基礎上結合教學內容進行基於數學史和數學思想方法的教學設計。

教育取向的數學史研究, 其最終目的是利用知識的發生學原理, 在數學教學中借鑒數學家研究數學的經驗和數學知識發生發展的理論。然而, 數學家研究數學的經驗、數學知識發生發展的理論對數學教學的指導也是有限的, 因爲學校數學和科學數學是兩種不同形態的數學, 而且學生也無法在有限的時間內重複數學家們所走過的漫長道路。那麼, 數學教學如何借鑒數學家研究數學的經驗呢?

以下以"三角學發展簡史"與"任意角的三角函數的教學"爲例, 探討如何在數學教學設計中借鑒數學家研究數學的經驗。

1. 三角學發展簡史[2]

(1) 三角學概述

三角學這門學科是從確定平面三角形和球面三角形的邊和角的關係開始的, 其最初的研究目的是爲了改善天文學中的計算。古代三角學的萌芽可以說是源出於古希臘哲學家泰利斯 (Thales, 約前 624-前 547) 的相似理論。古希臘天文學家喜帕恰斯 (Hipparchus, 約前 190 年~前 125 年), 曾著有三角學 12 卷, 可以認爲是古代三角學的創始人。

到 15 世紀, 德國的雷格蒙塔努斯 (J. Regiomontanus, 1436~1476) 的《論三角》一書的出版, 才標誌古代三角學正式成爲獨立的學科。這本書中不僅有很精密的正弦表、餘弦表等, 而且給出了現代三角學的雛形。16 世紀法國數學家韋達 (F. Viete, 1540~1603) 則更進一步將三角學系統化, 他已經對解直角三角形、斜三角形等作出了闡述, 並且還有正切定理以及和差化積公式等。

直到 18 世紀瑞士數學家歐拉 (L. Euler, 1707~1783) 才研究了三角函數。這使三角學從原先靜態研究三角形的解法中解脫出來, 成爲反映現實世界中某些運動和變化的一門具有現代數學特徵的學科。

(2) 最初的三角學

現在稱爲三角函數的那些比值, 無論是喜帕恰斯, 還是梅內勞斯 (Menelaus, 70~130 年)、克勞地亞斯 · 托勒密 (Ptolemy(Claudius Ptolemaeus), 約 90~168), 以及任何其他的古希臘人都沒有使用過。他們只講 一個角的弦(chord of an angle)。如圖 1, 角 2α 的弦即爲 "角 2α 所張的

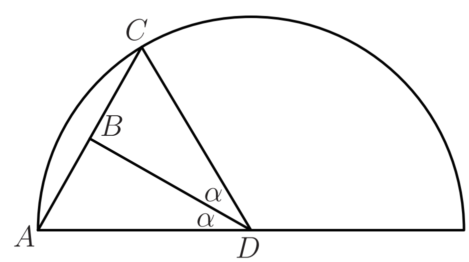

圖 1: 角 2α 的弦。

弦的長度”[1], 記爲 chord 2α (即線段 AC)。若視半徑爲單位長, 不難看出, $\frac{1}{2}$chord 2α (即線段 AB) 和 $\sin\alpha$ 是兩個等價運算式。這裏的 $\frac{1}{2}$chord 2α 則正是哥白尼的學生尼提克斯 (Rhaeticus, 1514∼1576) 給出的角 α 的正弦的最初定義。

由此定義出發, 在等份圓周的基礎上, 托勒密等人建立了以 $(\frac{1}{2})^\circ$ 爲間隔的從 $(\frac{1}{2})^\circ$ 到 180° 之間所有角度的弦數表。在今天看來, 這實際上建立的是一個以 $(\frac{1}{4})^\circ$ 爲間隔的 $(\frac{1}{4})^\circ$ 到 90° 角的正弦表。他們所遵循的原理如下:

他們首先認識到, 確定不同角度的弦相當於如何設法解決用圓的直徑長度表示圓內接正多邊形的邊長問題。承認了這點之後, 他們把圓周分成 360 等份, 即 360°; 直徑則被分成 120 等份。例如, 一個圓內接六邊形, 它的邊就是 60° 角的弦。而這顯然又等於半徑, 或直徑上120等份中的60等份, 於是有 chord $60^\circ=60$, $\frac{1}{2}$ chord $60^\circ=\sin 30^\circ=30$, 如以半徑 (=60) 的分數來表示, 這個結果就是 $\sin 30^\circ=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$。其他角度的弦也可以用類似的方法得到。

托勒密利用類似的方法, 進一步得到了等價於今天的 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$、兩角差的正弦公式以及 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 等諸多結論, 並製作了一張精確到小數點後第六位的弦數表。比如, 他得出了 chord $108^\circ=97.0807$, 這就是以直徑 (=120) 來表示的 chord 108°, 又 $\frac{1}{2}$ chord $108^\circ=\sin 54^\circ$。因此 $\sin 54^\circ$ 等於 48.5404, 以半徑 (=60) 的分數來表示, 則爲 0.80901, 這正是 54° 的正弦值。

在托勒密之後, 人們對天文學的興趣衰落了。直到西元5世紀才由印度人進一步繼承並發揚了亞歷山大學派的天文學知識, 恢復了對三角學這門基礎科學的研究興趣。印度人也是利用等分圓的辦法來計算角的正弦, 他們通常是把圓分成360度或21600分, 把半徑分成120等份。

印度的天文學家阿利耶毗陀 (Aryabhata, 476∼550) 曾採用一種度量半徑的方法, 他用這種方法能把角的正弦表示出來, 這與後來的弧度制十分相似。阿利耶毗陀使圓周仍舊被分成 21600 等份, 他已經知道, 圓周與直徑之比是 $3.1416:1$, 這意味著半徑的長度爲: $\frac{21600}{2\times 3.1416}$ 或 3438, 其度量單位就是圓周的 $\frac{1}{21600}$。

利用這些方法, 印度人得出了 $\sin 60^\circ=\frac{2977}{3438}(\approx 0.8659)$ 的結論, 這和 $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(\approx 0.8660)$ 是等價的。印度人計算出從 0° 到 90° 角的正弦值, 他們還知道了半形公式 $2\sin^2(\frac{1}{2}\theta)=1-\cos\theta$, 這是他們從托勒密所發現的公式中推導出來的。他們利用這一公式, 從 $\sin 60^\circ$ 的已知值出發, 推出了 60° 的各倍分角的正弦函數值, 直到 3.75°。

值得一提的是, 印度數學家巴士卡拉 (Bhaskara, 12世紀) 已經有了把正弦值看做一個比值的概念, 即弧與半徑之比的概念, 他曾得出過 $\sin 1^\circ=\frac{10}{573}(\approx 0.017452)$, 這就是 1° 的正弦值。他可能是和前人一樣, 把圓周分成 21600 等份, 並接受了阿利耶毗陀的以數值 3438 作爲半徑量度的做法而導出 $\sin 1^\circ$ 的這個值的, 也即是

$$\sin 1^\circ=\frac{\text{弧 }1^\circ}{\text{半徑}}=\frac{1}{360}\times\frac{21600}{3438}=\frac{10}{573}.$$

[1]註: 這裡用 2α 而不用 α, 是爲了敘述的方便。

(3) 三角函數的引進

首先發現三角函數的是歐拉 (Euler, 1707～1783)。1748年歐拉在《無窮小分析論》中寫到: 三角函數是一種函數線與圓半徑的比值。具體地說, 任意一個角的三角函數都可以認爲是以這個角的頂點爲圓心, 以任意長爲半徑作圓後, 由角的一邊與圓周的交點 P 向另一邊作垂線 PM 後所得的線段 OP、OM、PM(即函數線) 相互所取的比值, 如 $\sin\alpha = \frac{PM}{OP}$, $\cos\alpha = \frac{OM}{OP}$, $\tan\alpha = \frac{PM}{OM}$ 等 (如圖 2 所示), 若令半徑爲單位長, 那麼所有的六個函數又可大爲簡化。

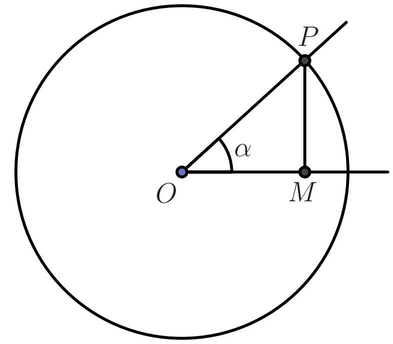

圖 2: 三函數線。

歐拉的這個定義是極其科學的, 它使三角學從靜態的只是研究三角形解法的狹隘天地中解放了出來, 有可能去反映現實世界一切可以三角函數反映的運動或變化過程, 從而使三角學成爲一門具有現代特徵的分析性學科。正如歐拉所說, 引進三角函數以後, 原來意義下的正弦等概念都可以脫離幾何圖形去進行自由運算, 一切三角關係式也將很容易的從三角函數的定義出發而導出。這樣就使得從喜帕恰斯開始的許多數學家爲之奮鬥而得出的三角關係式有了堅實的理論依據, 而且大大地豐富了。嚴格地說, 這時才是三角學的眞正確立。

歐拉不僅引進了三角函數的定義, 而且還引進了弧度制。歐拉在他上述的劃時代著作中的第八章中提出了弧度制的思想。他指出單位圓的半圓周長等於 π, 因此, $\frac{1}{2}$ 的半圓周長就是 $\frac{\pi}{2}$, 如此下推, 就可得出弧長的各個弧度量值。這樣, *把直線與圓弧的度量單位統一起來* (*弧度制的本質: 以直量曲, 統一度量, 把角度轉換爲實數, 並在此基礎上建立從數集到數集的映射—三角函數*), 大大簡化了三角公式和三角函數值的計算。

採用弧度製作爲角的度量單位, 有很多好處。一個直接的、顯而易見的好處是爲計算扇形的面積與弧長提供了方便。加入我們有一個扇形, 其所在圓的半徑爲 r, 圓心角的大小爲 θ (弧度), 所夾的弧長爲 s, 又假定扇形的面積爲 A, 顯然有:

$$\begin{cases} s = r\theta & (1) \\ A = \frac{r^2\theta}{2} & (2) \end{cases}$$

總之, 如果使用弧度制來度量角, 那麼扇形的面積公式與弧長公式就顯得極爲簡單方便。此外, 我們還可以利用弧度制簡便地計算弓形的面積。

但是, 這還不是弧度制引進的主要原因。弧度制引進的主要原因是爲了適應微積分創立之後科學計算的需要。更具體地說, 弧度的引入使得微積分中的關於三角函數的各種公式, 如微分公式、積分公式和泰勒公式等等, 與用角度制相比, 得到了大大的簡化。限於篇幅, 作者不在此一一推演。有興趣的讀者可以參看 R. 科朗、H. 羅賓的名著《什麼是數學》的有關內容。

此外, 歐拉還徹底解決了三角函數在四個象限中的符號問題, 從而把各種三角公式推廣到

一般情況。另外, 他還發現了著名的歐拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$, 把三角函數同指數函數聯繫了起來。就這樣, 經過四千年的探索, 一門具有廣泛理論意義和實用價值的三角學完全確立了。

2. 三角學的歷史對任意角三角函數教學的啓示

通過上述對三角學的歷史的簡要介紹, 可以從中窺見諸多重要的數學事實:

(1) 在托勒密時代, 是用直徑 (或半徑) 去度量圓心角所對的弦的長, 這是一個角的弦(chord of an angle) 的本質;

(2) 印度天文學家阿利耶毗陀所採用的以圓周的 $\frac{1}{21600}$ 作爲單位去度量圓的半徑的方法, 這與弧度制十分相似;

(3) 印度數學家巴士卡拉把正弦值看做一個比值的概念, 即弧與半徑之比的概念, 並且得出了 $\sin 1^\circ = \dfrac{\text{弧 } 1^\circ}{\text{半徑}} = \dfrac{1}{360} \times \dfrac{21600}{3438} = \dfrac{10}{573}$;

(4) 上述 (2) 與 (3) 可能對弧度制的產生有很大的啓示意義。弧度制的核心是保持弧長單位和弦長單位的統一, 是利用半徑去量弧長, 即“以直量曲”、“化曲爲直”, 這與阿利耶毗陀所用的方法正好相反;

(5) 歐拉的三角函數定義是“函數線與圓半徑的比值”, 其本質是“三角比”。

聯繫任意角的三角函數的教學, 上述論述的目的無非是要引出一個重要的事實 — “比”的關係一直貫穿著整個三角學的發生發展史。因此, 三角函數的定義的本質應是“三角比”, 即與角有關的線段 (或有向線段) 之比。國中的銳角三角函數是採用“三角比”來定義的, 這正是初高中三角函數知識的銜接點。

現在來看看高中數學教材關於任意角的三角函數的定義:

人教 A 版《數學4》教材中給出的定義是: 設 α 是一個任意角, 它的終邊與單位圓交於點 $P(x, y)$, 那麼

(1) y 叫做 α 的正弦, 記作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = y$;

(2) x 叫做 α 的餘弦, 記作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha = x$;

(3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 記作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$。

江蘇版《數學4》教材中給出的定義是: 一般地, 對於任意角 α, 設 α 的終邊上任意一點 P 的坐標是 (x, y), 我們規定:

(1) 比值 $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦, 記作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$;

(2) 比值 $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的餘弦, 記作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha = \frac{x}{r}$;

(3) 比值 $\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ 叫做 α 的正切, 記作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$。

其中, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。

概括地說, 人教 A 版採用的是"單位圓定義法", 江蘇版採用的是"終邊坐標法"。是否借助單位圓定義任意角的三角函數是二者的最大不同, 江蘇版是在"終邊坐標法"定義之後給出了"單位圓定義法"。[3]

高中討論的是任意角的三角函數的定義, 主要以平面直角坐標系中點的坐標爲研究工具。因此, 點的坐標並不是三角函數的定義中的最本質的東西, 最本質的是"比"的關係, 平面直角坐標系只是研究任意角三角函數的定義的工具。既然平面直角坐標系只是研究的工具, 那麼單位圓也只能算是研究的工具而已。

根據上述三角學簡史的? 述, 可以得出結論: 採用"終邊坐標法"定義任意角的角函數 — 允許圓的半徑任意長, 而非單位長, 其實質是採用比值定義 — 符合三角函數形成與發展的歷史, 而"單位圓定義法"只是爲了簡化定義和給出三角函數的幾何表示, 不利於學生把握任意角三角函數的定義的本質。

很顯然, "單位圓定義法"只是"終邊坐標法"的特例, 學生只要掌握了"終邊坐標法"定義的一般結論, 當 $r = 1$ 時學生自然可以得到"單位圓定義法"的結論。同時, "終邊坐標法"更利於初、高中三角函數知識的銜接, 有利於開展由舊知引出新知的教學。此外, 從整體上考查三角函數單元的教學內容可以發現, 引進任意角三角函數的單位圓定義, 其目的是爲了給三角函數誘導公式的討論帶來方便。

因此, 從知識發生發展歷史的視角考察, 在任意角三角函數的教學中不宜過早地引入單位圓定義, 而是應該在學生掌握了任意角三角函數的終邊坐標定義之後, 再借助"單位圓定義法"幫助學生理解"終邊坐標法"。這樣做, 不僅符合數學知識的發生發展歷程, 而且更便於學生認識到三角函數的數學本質。如果在教學中先給出任意角三角函數的"單位圓定義", 或者同時給出這二者, 其合理性都是有待商榷的。

3. 揭示任意角三角函數定義的本質

首先, 從內容上分析。嚴格意義上講, 國中沒有三角函數, 只有三角比, 即銳角的正弦、餘弦和正切等。這種三角比是用銳角所在的直角三角形的邊的比定義的, 雖然比值是數, 但是國中還沒有引入弧度制, 而是角度值, 此時的三角比是角的集合與數集之間的映射, 不是函數。因此, 這節課首先要解決的是在高中函數概念下重新定義與理解銳角三角函數, 再推廣到任意角的三

角函數, 由國中的比值定義過渡到終邊坐標定義, 最後介紹單位圓定義法。

其次, 從教法上分析。(1) 教師的教學要抓住概念的本質。要讓學生從銳角三角比的複習中, 聯繫高中的函數概念, 深刻認識到銳角三角比是相似比, 與點的選取無關, 同時更要突出比值只與角 α 的大小有關, 要讓學生理解"α 確定時, 比值唯一確定", 明確這裏的比值是角 α 的函數, 認識到三角函數是角 (弧度制) 與比值之間的映射關係, 並進一步體會引進弧度制的意義。(2) 要做好教學設計。教師要對從舊知引出新知做好設計, 不能過分強化複習舊知, 避免學生仿照定義銳角三角比的辦法, 試圖仍然採用直角三角形的邊之比來定義任意角的三角函數。在研究方法上, 要抓住時機恰當引進"平面直角坐標系"這個研究工具, 通過"終邊坐標法"建立起任意角三角函數的定義。最後對"位圓定義法"要愼重處理, 關於"單位圓定義法"與"終邊坐標法"之比較, 以上已有論述。

因此, 三角函數首先是函數, 這是教師在這節課的教學中首先要明確的問題。教師可以設計如下的一系列提示語啓發學生的思考, 逐步揭示出三角函數的函數本質。[2]

引導學生認識三角函數的函數本質:

你打算如何給任意角的三角函數下定義?

問題是什麼? 目標是什麼?("給任意角的三角函數下定義")

這個目標中你最看中哪個? 這句話中哪個詞是最關鍵、最根本的?

任意角? 三角? 函數? 你覺得哪個詞是最關鍵的?

"低矮的木頭房子", 哪個詞最關鍵? 最根本的是什麼 (—房子!)

那麼, 這裏的"任意角的三角函數", 首先應該是什麼?(—函數!)

因此, 要找的是什麼?(函數!建立函數關係)

什麼函數? 誰的函數?(—任意角的函數)

那麼, 首先要問的是, 函數是什麼?(數集到數集的映射)

"建立任意角的函數", 就是要做什麼?(建立映射)

在誰和誰之間建立映射?(在任意角與實數之間建立映射或對應)

在哪兩個集合之間建立映射?(在角集合與實數集之間的映射)

角集合是圖形的集合, 是不是數集呀?

我們前面已經學習了什麼? 與任意角有關的什麼知識?(弧度制)

通過弧度制, 我們是不是已經把角變成了數?(簡單回憶弧度制)

那麼, 三角函數以誰爲自變數?(角, 弧度制的角)

---

[2]註: 本文所使用的教學提示語, 參考了南京師範大學塗榮豹教授的研課講義。

好了, 現在我們知道了三角函數是以弧度制的角爲自變? 的函數, 那麼, 函數除了自變? 以外, 還有什麼?(對應法則、值域)

那麼, 三角函數的對應法則是什麼? 如何來定義任意角的三角函數呢?

我們先回憶一下, 國中還學過什麼?(銳角三角函數)

...

通過上述一系列的啓發性提示語, 教師可以啓發和引導學生逐步認識到: 任意角三角函數, 首先是函數, 其次是角的函數。這樣的設計, 不僅可以突出三角函數的函數本質, 同時也可以使學生進一步明確三角函數是以角 (弧度制) 爲自變? 的函數。這樣的教學設計, 有利於幫助學生認識到數學物件的數學本質, 促進學生認識力和數學思維能力的發展, 是眞正意義上的思維導向教學設計。

教學實踐中發現, 老師在引導學生討論三角函數的定義域時, 有些學生並沒有認識到這裏的定義域應該是 α 的取值範圍, 總是誤以爲函數的定義域一定是 x 怎麼怎麼樣。當然有可能是思維定勢, 這與學生的數學認知水準有關, 但同時也與教師的教學設計有關。究其原因, 主要就是因爲教師沒有突出三角函數的函數本質, 沒有事先讓學生理解三角函數是以角 (弧度制) 爲自變數、以角的終邊上一點的坐標比值爲因變數的函數。

以上論述一再表明: 三角函數的定義的本質應是"三角比", 即與角有關的線段 (或有向線段) 之比。那麼, 如何在教學中實現初、高中三角函數知識教學的銜接, 如何凸顯三角函數定義的本質、建立新知識的數學意義, 這是數學教師必須思考的問題。

在國中的時候, 學生已經學習了銳角三角比的有關知識, 他們已經知道對於銳角而言, 可以將其放在以這個銳角爲一個內角的直角三角形中, 利用直角三角形的邊之比, 來定義銳角的正弦、餘弦和正切等。

事實上, 歷史上歐拉的三角函數定義是"函數線與圓半徑的比值"。也就是說, 對任意的一個角, 可以利用與角有關的"有向線段之比"來定義其正弦、餘弦和正切等。如圖3所示, 任意角 α 的正弦、餘弦、正切都可以用有向線段 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AP}$ 以及圓的半徑 $R=|OP|$ 之比來定義, 即:

$$\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{AP}}{|OP|};\quad \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}}{|OP|};\quad \tan\alpha=\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{OA}}.$$

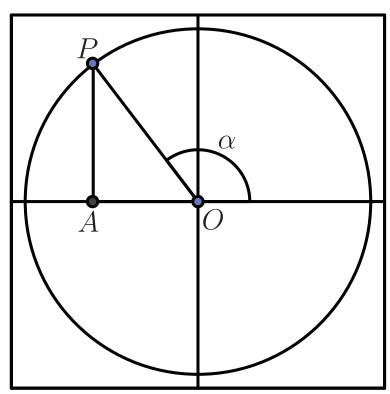

圖3

當然, 引進了直角坐標系以後, 利用角的終邊上點的坐標來定義三角函數更便於說明問題。同時用點的坐標之間的比值, 也更易於計算和表達。也就是說, 引進了有向線段, 最後還是要過渡到"終邊坐

標法", 那麼在教學中有沒有必要引進用有向線段呢? 數學教學要關照數學知識的歷史發展, 但不可拘泥於其發展過程。在這裏, 可以反其道而行之, 先引導學生尋找研究工具 (見接下來的論述), 直接引進"終邊坐標法", 然後利用有向線段幫助學生理解三角函數的本質 — 三角比 (或者將其作爲學生課外的數學探究活動), 最後再利用"單位圓定義法"簡化"終邊坐標法"定義, 並認識三角函數線 — 三角函數的幾何表示。

4. 探究新的定義方式—基於三角學發展史的教學設計

教學實踐表明, 這節課的教學中會遇到學生始終無法脫離用直角三角形的邊之比來定義任意角的三角函數、認識不到三角函數是以角 (弧度制) 爲自變? 的函數等問題。那麼, 如何實現從銳角三角比到任意角的三角函數定義呢? 這裏的關鍵是如何從借助直角三角形定義銳角三角函數過渡到用點的坐標來定義任意角的三角函數, 也就是如何引進直角坐標系作爲研究工具。

任意角的三角函數是以角 (弧度制) 爲自變? 的函數, 其概念建立的難點是轉換意義框架, 轉換思考問題的角度, 突破國中階段借助直角三角形定義三角函數 (以下稱"幾何定義法") 的思維限制, 把原來銳角三角函數"幾何定義法"中的直角三角形的邊之比轉換爲適用於任意角三角函數的終邊的點的坐標之比。概念建立的方式是對原有的數學認知結構進行部分改組, 形成新的數學認知結構。基於以上分析, 並對數學史上數學家們定義三角函數的可能的思維活動過程進行歸納概括和教學法加工, 設計如下的任意角三角函數的教學環節:

(1) 從銳角三角比出發, 探究新的定義方式。由於任意角的三角函數是在銳角三角函數的基礎上學習的, 因此任意角三角函數的定義自然應從銳角三角函數定義中尋找啓發。仔細考查銳角三角函數的"幾何定義法", 不難發現: 雖然銳角三角比是借助直角三角形來定義的, 但比值的大小卻是由角的大小確定的, 即銳角三角比就是以角爲自變數的函數, 這是在高中角的概念擴張後, 在弧度制意義框架下對銳角三角比的重新認識。這就暗示我們, 直角三角形只是定義銳角三角函數的載體和工具, 而非銳角三角函數的本質。明確這一點, 既有利於突破"幾何定義法"的思維局限, 也可爲用其他方式定義三角函數埋下伏筆。

(2) 引導學生尋找新的研究載體和工具。既然直角三角形只是定義銳角三角函數的載體和工具, 而非銳角三角函數的本質, 那完全可以尋找新的載體和工具來定義任意角的三角函數, 同時拓展後的定義必須包含銳角三角函數的定義, 這是數學的相容性所要求的。現在要將銳角三角函數推廣到任意角的三角函數, 首先要明確的是任意角是如何定義的。教師此時需要讓學生回憶任意角的定義方式, 從而引導學生聯想到平面直角坐標系, 並在平面直角坐標系的意義框架下重新考查銳角三角函數的定義, 進一步探究任意角的三角函數的定義。

(3) 將"幾何定義法"納入到新的意義框架。在平面直角坐標系的意義框架下重新考查銳角三角函數的定義, 可以引導學生發現, 除了"幾何定義法"之外, 還可以借助銳角終邊上的點的坐

標來定義銳角三角函數, 並且這個新的定義與“幾何定義法”本質上是一樣的。只不過, 當在直角坐標系中銳角的終邊上任取一個點 $P(x,y)$, 再作出直角三角形時, x、y 具有雙重含義。即從幾何角度看, 它們表示直角三角形的邊長; 從代數角度看, 它們表示點 P 的橫坐標和縱坐標。由此, 自然有 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$、$\cos\alpha=\frac{x}{r}$、$\tan\alpha=\frac{y}{x}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

(4) 把銳角三角函數的“終邊坐標法”定義推廣到任意角三角函數。在弧度制意義下理解了銳角三角比的函數本質, 在平面直角坐標系下重新認識了“幾何法定義”, 並用“終邊坐標法”重新定義了銳角三角函數, 這就爲把銳角三角函數推廣到任意角三角函數完成了思維上的轉換和工具上、方法上的準備, 接下來要做的就是把銳角三角函數的 “終邊坐標法”定義進一步推廣到任意角三角函數。如果上述幾個環節做好了, 也就是學生已經理解了銳角 (以及第一象限角) 的三角函數的 “終邊坐標法”定義, 餘下部分完全可以讓學生自主探究, 並通過恰當的交流討論、結論表述等過程, 引導學生的思維自發的產生, 讓學生的數學思維自然地流淌出來, 這便是數學教學思維導向的最佳境界。

(5) 明確“終邊坐標法”定義的科學性、合理性與優越性。儘管數學定義是一種人爲的規定, 但這種規定是以科學性與合理性爲前提的。明確新的定義方式的科學性、合理性、優越性, 對學生學會自主建構數學概念具有非常重要的意義。就任意角的三角函數的定義而言, 不難發現:(a)“終邊坐標法”定義與“幾何定義法”在本質上是一致的。無論從數的角度看, 還是從形的角度看, 它們之間不存在任何矛盾 (註: 明確這一點, 既可體現數與形的內在統一性, 又可爲學習三角函數線作好準備); (b) “幾何定義法”具有形象、直觀等優點, 而“終邊坐標法”定義具有簡潔、精確、便於計算等優點; (c)“終邊坐標法”定義適用於任意角, 功能更強大, 使用更便捷, 同時它蘊含著三角函數的週期性等特點, 爲三角函數知識的進一步學習奠定了基礎。這些優越性, 可以通過適當的課堂練習讓學生進一步體會, 並鞏固任意角的三角函數的“終邊坐標法”定義。

(6) 對“終邊坐標法”定義的簡化–引進“單位圓定義法”。在學生掌握了任意角的三角函數的“終邊坐標法”定義之後, 可以引導學生思考: 既然點 P 是角終邊上異於原點的任意一點, 並且函數值不會隨著點 P 的位置變化而變化 (進一步體會“三角比”的核心 — 相似比)。那麼, 是否可以給點 P 找到一個合適的位置, 使得三角函數的定義更簡潔、明瞭。這時部分學生應該可以想到取點 P 爲角的終邊與單位圓的交點, 此時線段 OP 的長 $r=1$。由此得到“單位圓定義法”的任意角三角函數定義: 設任意角 α 的終邊與單位圓交於點爲 $P(x,y)$, 那麼 $\sin\alpha=y$、$\cos\alpha=x$、$\tan\alpha=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$。同時需要簡要說明, 這兩種定義在本質上是一致的, 而且在使用過程中各有各的好處 — “終邊座標法”更能體現任意角三角函數定義的本質, “單位圓定義法”更能反映出三角函數的週期性質, 也更便於在研究週期現象中發揮作用。

(基金專案: 西華師範大學2010年科研啓動項目“教育取向的數學史研究”(10B012); 西華師範大學服務普通高中課程改革專項“高中數學核心概念的發展史研究”。)

參考資料

1. 李文林, 數學的進化—東西方數學史比較研究[M], 北京: 科學出版社, 2005: 序。
2. 三角學的發展史涉及衆多的數學史實, 這裏選擇與中學數學教學聯繫較爲緊密的內容, 擇其要簡述之, 主要參考了下列文獻: (英) 斯科特著, 侯德潤、張蘭譯, 數學史[M], 桂林: 廣西師範大學出版社, 2002:45-53。(美)M · 克萊因著, 張祖貴譯. 西方文化中的數學 [M], 上海 : 復旦大學出版社, 2007: 59-72。
3. 孫孜, 塗榮豹, "單位圓定義法"VS"終邊坐標法"[J], 中學數學教學參考, 2009(6上): 21-23。

—本文作者任教四川省南充市西華師範大學數學與資訊學院—