

國立中央大學

光電科學與工程學系

碩士論文

奈米平凹透鏡之成像特性研究
Study on the imaging properties of
some plano-concave nanolenses

研究生：何治樺

指導教授：樂丕綱 博士

中華民國一百零一年六月

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

光電科學與工程 學系/研究所 何治樺 研究生
所提之論文 奈米平凹透鏡之成像特性研究 係由
本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 何治樺 (簽章)

101年9月11日

國立中央大學碩士班研究生
論文口試委員審定書

光電科學與工程 學系/研究所 何治樺 研究生
所提之論文 奈米平凹透鏡之成像特性研究
經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人 柯宜謀
委員 饒丕綱
邱經德
周趙遠鳳
蔣輔力

中華民國 101 年 7 月 11 日

摘要

傳統上，要將平行光聚焦於一個小光點，需要使用一個凸透鏡。近年來關於光子晶體的研究提供了另一種途徑：選擇光子晶體的負折射頻帶為工作頻帶，則以此光子晶體做成的凹透鏡就可以將光聚焦。已有大量的論文研究過光子晶體的負折射特性，此外也已經有幾篇關於光子晶體凹透鏡的研究被發表。這類透鏡做為一類奈米光學元件，具有短焦距以及能進行次波長成像的優點。然而這類透鏡的設計與實作還是顯得複雜，因此本論文提出空氣透鏡的概念以取代並簡化相關設計，並探討其成像特性。

本論文首先探討二維光子晶體奈米平凹透鏡的負折射行為與成像特性，接著將二維光子晶體以一維光子晶體取代，最後提出空氣透鏡的概念，以期不必使用光子晶體的複雜結構，亦能達到於奈米尺度之環境中有效將入射光聚焦的目標。

我們在介電質背景中置入一空氣平凹透鏡，其中之凹面為圓柱面，並選取背景介電係數與透鏡介電係數相差甚大的參數進行模擬。當光從背景介質傳播進入凹透鏡形狀的凹洞中（由光密介質進入光疏介質）再回到背景介質中，光線會產生與玻璃凸透鏡一樣的匯聚行為，達到聚焦的效果。為了找出較好的聚焦特性，我們對空氣平凹透鏡做非球面的處理，將凹面以幾種圓錐曲面取代，並比較在各種圓錐曲面下，以時域有限差分法（以 Maxwell 方程組為基礎的波動光學）與光線追跡法（幾何光學）進行聚焦位置的預測及成像點大小的分析比較。

在我們的分析中，以橢圓 2 的成像品質最佳（幾何光學預測與波動光學現象吻合度最高）。作為一個應用的例子，我們將空氣透鏡與光子晶體波導組合在一起，形成光學耦合器，並展示其有效將光強集中導入波導的結果。我們相信，適當設計的奈米級空氣透鏡元件將能在未來的奈米光子學中獲得普遍應用。

Abstract

Traditionally, to focus a beam of light into a tiny spot, we need a convex lens. Recently, alternative approach based on the researches of the propagating waves in photonic crystals (PhC) has been proposed: by choosing a negative-refraction (NR) photonic pass-band as operating band, a plano-concave lens of PhC makes a beam of incident light converge. Up to now, a huge amount of research papers discussing the features of NR in PhC together with a few papers studying the focusing ability of concave lenses of PhC have been published. As a kind of nano-optical component, a concave lens of PhC has the advantage of shortening the focal length and focusing the incident light beam into a spot of sub-wavelength size. However, the design and fabrication of a PhC lens are still too complicated. We therefore propose in this thesis the new idea of ‘air lens’ to simplify the previous designs. In addition, we investigate thoroughly the focusing characteristics of this device.

In the thesis, we begin with the investigation of the NR phenomenon and imaging characteristics of plano-concave nanolens in a 2D PhC. We then replace the 2D PhC structure with a 1D PhC and explore if the same work can still be done. Finally, the idea of air lens is proposed. We hope to avoid such a complicated structure like PhC but achieve the same goal of making light converged effectively in the nanoscale environment.

We first create a plano-concave air lens in a dielectric medium, whose concave surface is cylindrical. As one of the simulation parameters, a large dielectric constant of the background medium $\epsilon_b = 12.96$ is assumed in order to focus the incident light effectively. When light propagates from a denser medium into a less dense one and back to the denser medium, the concave air lens converges light like the convex glass lens does in air. To find better converging characteristics, we then make the concave surface non-cylindrical. We replace the cylindrical surface with several conic surfaces. Moreover, we use FDTD (the wave optics based on Maxwell equations) method as well as the ray-tracing (geometrical optics) method to simulate and predict the locations of the focal points. In addition, we compare the spot sizes and focus locations for different surfaces.

In our analysis, the second type of oblate elliptical surface has the best imaging performance, in which the geometrical prediction matches the wave phenomenon very well. As an example of application, we assemble an optical coupler of concave air lens and a photonic-crystal waveguide (PCW) and show how efficiently the light beam can be coupled into the PCW. We believe that appropriately designed air nanolens will become a commonly used component in the nanophotonics in the future.

誌謝

首先謝謝樂老師在碩士兩年期間的指導，不論是生活上的大小事、或是研究方面的專業建議，都讓我學到很多為人處世的大道理。接著謝謝游政峰、張高德、江鎮余學長在寫程式方面的指教與提攜，有你們的熱心幫助，我才能順利跨越從讀 paper 到跑模擬中間那道極高的門檻。謝謝同時畢業的徐福駿、游勝濱學長，有你們的陪伴，讓口試當天氣氛著實輕鬆許多。謝謝敏仲、凱興這一年多來在助教工作上的相互照應，讓我得以在工作與研究中間取得一個良好的平衡。謝謝實驗室過去及新加入的夥伴們，樂老師曾說過：「或許你們在碩士兩年之間無法學到多深的物理，但是我希望你們能帶走的，是一份能明確告訴別人你在做什麼研究的自信與肯定。」，用這句話與你們共勉，也祝福你們修課及研究都能如願在時間內順利完成。

最後，謝謝我的家人，對我過去二十多年來的不懂事與莽撞，總是給予最大的包容與體諒，您們辛苦了。謝謝召會朋友幾個月來的代禱，謝謝主耶穌一路扶持我的軟弱，給予我堅定持續的力量，感謝主，榮耀歸神，Hallelujah！

目錄

中文摘要.....	I
Abstract.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖索引.....	V
表目錄.....	VII
第一章 緒論.....	1
1.1 光子晶體簡介與發展.....	1
1.2 光子晶體基本特性.....	3
1.2.1 帶隙.....	4
1.2.2 異常折射效應.....	5
1.3 研究動機.....	6
1.4 論文架構.....	7
第二章 理論基礎.....	8
2.1 馬克斯威爾方程式.....	8
2.2 布洛赫定理.....	10
2.3 布里淵區與頻帶結構.....	11
第三章 數值模擬方法.....	13
3.1 平面波展開法.....	13
3.2 時域有限差分法.....	14
3.2.1 基本理論.....	14
3.2.2 吸收邊界條件.....	16
3.3 多重散射法.....	19
第四章 奈米平凹透鏡之成像特性.....	24
4.1 二維光子晶體平凹透鏡文獻回顧.....	25
4.1.1 階梯狀—介電質平板挖空氣柱.....	25
4.1.2 圓柱面—介電質平板挖空氣柱.....	28
4.1.3 圓柱面—背景空氣排介電質柱.....	29
4.2 一維光子晶體平凹透鏡文獻回顧.....	32
4.3 空氣平凹透鏡.....	34
4.3.1 圓柱面.....	36
4.3.2 直橢圓面.....	38
4.3.3 橫橢圓面.....	40
4.3.4 拋物面.....	42
4.3.5 雙曲面.....	44
第五章 結論與未來展望.....	48
參考資料.....	50

圖索引

圖 1-1 色彩繽紛鮮豔的蛋白石[1].....	1
圖 1-2 電子顯微鏡下的蛋白石斷面結構[2].....	2
圖 1-3 一維、二維及三維光子晶體結構示意圖[5].....	2
圖 1-4 交叉線區域為完整光子帶隙[6].....	3
圖 1-5 共振腔內的共振模態與電磁波於波導中分佈情形[8].....	3
圖 1-6 三角晶格光子晶體頻帶結構圖	4
圖 1-7 三角晶格聲子晶體頻帶結構圖[10].....	5
圖 1-8 等頻率曲線與負折射示意圖[10].....	6
圖 2-1 第一布里淵區示意圖[14].....	11
圖 2-2 二維三角晶格光子晶體(圓柱填充 GaAs, 背景為空氣)[15] 等效折射率-頻率關係圖與頻帶結構	12
圖 3-1 Yee 晶格示意圖[16].....	15
圖 3-2 Berenger 的 PML 理論示意圖[18].....	16
圖 3-3 電導率與磁導率在 PML 當中的分布圖[18]	18
圖 3-4 多重散射之示意圖	19
圖 4-1 梯型平凹透鏡示意圖[23].....	25
圖 4-2 (左)為梯型平凹透鏡聚焦電場強度圖 (右)將匯聚光耦合導入波導中[23]	25
圖 4-3 二維光子晶體三角晶格頻帶結構圖[24]	26
圖 4-4 階梯狀逐步填滿結構示意圖	26
圖 4-5 階梯狀逐步填滿電場強度圖	27
圖 4-6 圓柱面平凹透鏡示意圖[22].....	28
圖 4-7 (左)為圓柱面平凹透鏡聚焦電場強度圖 (右)將匯聚光有效導入光子晶體波導中[22]	28
圖 4-8 二維光子晶體平凹透鏡, R 為曲率半徑.....	29
圖 4-9 二維光子晶體三角晶格頻帶結構圖	30
圖 4-10 平面波經由二維光子晶體聚焦電場強度圖	30
圖 4-11 沿 x 方向成像點大小	31
圖 4-12 沿 y 方向成像點大小	31
圖 4-13 一維光子晶體頻帶結構圖[19].....	32
圖 4-14 一維光子晶體圓柱面平凹透鏡結構示意圖與電場強度圖	32
圖 4-15 將點波源放置在聚焦處, 重建電場分布示意圖	33
圖 4-16 將點波源放置在聚焦處, 重建電場強度分布示意圖	33
圖 4-17 光線追跡示意圖	35
圖 4-18 平凹透鏡(圓柱面)不同曲率半徑之成像強度圖及光線追跡圖.....	36
圖 4-19 平凹透鏡(圓柱面)不同曲率半徑 R0 對應之 x 方向強度分布圖.....	37

圖 4-20	平凹透鏡(圓柱面)不同曲率半徑 R_0 對應之 y 方向強度分布圖.....	37
圖 4-21	平凹透鏡(直橢圓面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖.....	38
圖 4-22	平凹透鏡(直橢圓面)不同焦距 x 方向強度分布圖.....	39
圖 4-23	平凹透鏡(直橢圓面)不同焦距 y 方向強度分布圖.....	39
圖 4-24	平凹透鏡(橫橢圓面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖.....	40
圖 4-25	平凹透鏡(橫橢圓面)不同焦距 x 方向強度分布圖.....	41
圖 4-26	平凹透鏡(橫橢圓面)不同焦距 y 方向強度分布圖.....	41
圖 4-27	平凹透鏡(拋物面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖.....	42
圖 4-28	平凹透鏡(拋物面)不同焦距 x 方向強度分布圖.....	43
圖 4-29	平凹透鏡(拋物面)不同焦距 y 方向強度分布圖.....	43
圖 4-30	平凹透鏡(雙曲面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖.....	44
圖 4-31	平凹透鏡(雙曲面)不同焦距 x 方向強度分布圖.....	45
圖 4-32	平凹透鏡(雙曲面)不同焦距 y 方向強度分布圖.....	45
圖 4-33	不同圓錐曲面與對應焦距 f 誤差百分比及側向成像大小之比較...	46
圖 5-1	橫橢圓面平凹透鏡與二維三角晶格光子晶體波導結構示意圖.....	48
圖 5-2	(左)為橢圓面空氣平凹透鏡有效將入射波耦合進入 PCW 之中 (右)為移除透鏡後，平面波直接入射 PCW 的電場強度分布.....	49

表目錄

表 4-1 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(圓柱面).....	36
表 4-2 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(直橢圓面).....	38
表 4-3 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(橫橢圓面).....	40
表 4-4 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(拋物面).....	42
表 4-5 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(雙曲面).....	44
表 4-6 FDTD 與光線追跡之焦距誤差百分比之綜合比較.....	46

第一章 緒論

由入射波長與系統尺度相對的大小關係，過去我們習慣將物理現象簡單區分為宏觀 (macroscopic) 與微觀 (microscopic) 兩大類。一般日常所見的光學現象 (如：凸透鏡的聚焦)，常以幾何光學 (geometric optics) 分析之，由於可見光波長遠小於透鏡厚度及傳播距離，屬於宏觀現象；當相位的同調性突顯時，需要以傅氏光學 (Fourier optics) 來分析光的波動行為 (如：建設性與破壞性干涉)，我們稱之為微觀現象。

近年來隨著科技的發展，實驗得以觀察到奈米尺度下豐富的物理現象，進而引起學界對介觀 (mesoscopic) 現象廣泛的研究與討論。介觀系統是指尺度落於宏觀與微觀之間的系統。在介觀尺度下，量子的波函數除了滿足邊界條件或外加電磁場的限制，亦能將相位特性充分地展現出來。以介觀光學系統為例，當光經過厚度約為數個波長大小的系統時 (例如：蝴蝶翅膀結構)，光波相位的疊加、偏振特性及系統內部的多重散射都將被納入考量，無法以單純的干涉行為來處理。

1.1 光子晶體簡介與發展

不同介電物質於空間中做週期性的排列，我們稱之為光子晶體 (photonic crystal, 簡稱 PhC)。自然界當中存在許多光子晶體的結構，例如：蝴蝶翅膀、孔雀蛤表面以及蛋白石，其週期約略為數百奈米，且具有不完全的頻隙 (band gap)，使它們在可見光的範圍內，得以呈現鮮豔的顏色。

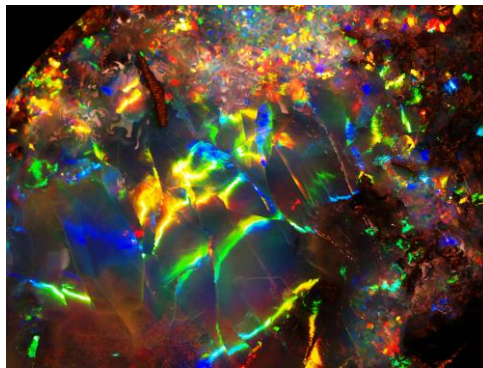


圖 1-1 色彩繽紛鮮豔的蛋白石^[1]

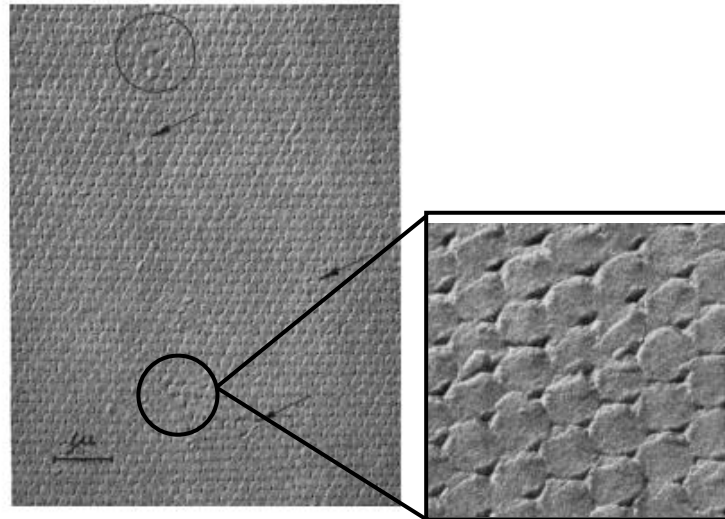


圖 1-2 電子顯微鏡下的蛋白石斷面結構^[2]

科學家對於光子晶體的研究最早可追溯到 1987 年，美國 UCLA 電機系 Eli Yablonovitch 教授與加拿大 University of Toronto 物理系 Sajeev John 教授個別在五月及三月於 Physical Review Letters 發表的兩篇論文^[3-4]：Yablonovitch 教授發現，以光子頻隙 (photonic band gap) 結構圍繞原子，原子將不能以自發輻射 (spontaneous emission) 方式放射；John 教授則以電子可被帶有缺陷的晶體侷限住 (localization)，推論光子亦可能被光子晶體中的缺陷所侷限。日後兩位教授便決定使用光子頻隙與光子晶體命名相關的研究領域。

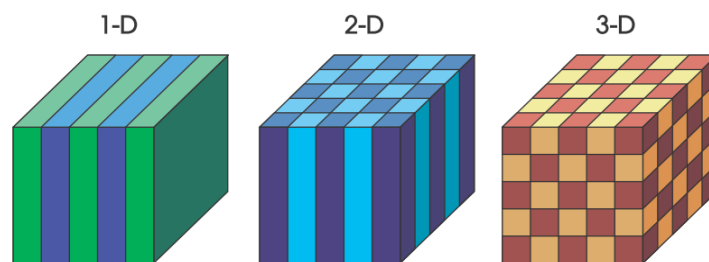


圖 1-3 一維、二維及三維光子晶體結構示意圖^[5]

光子晶體依呈現週期排列的維度區分成三類：一維、二維及三維光子晶體。一維光子晶體常見於多層膜的設計(如：眼鏡的抗反射膜)；二維光子晶體可用於設計波導元件、分光器及干涉儀；三維光子晶體擁有完全光子帶隙(complete photonic band gap)，將落於帶隙內來自任意傳播方向、具有任意偏振方向的光波反射回去，作為全方位反射器 (omnidirectional reflector) 之用。

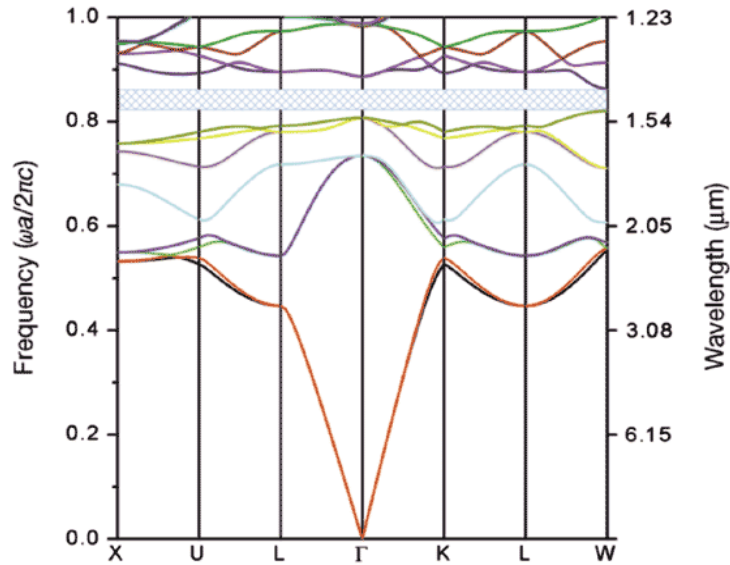


圖 1-4 交叉線區域為完全光子帶隙^[6]

1.2 光子晶體基本特性

光子晶體周期性排列的結構衍生出許多光學基本特性，當中帶隙 (band gaps) 與異常折射效應 (anomalous refraction) 是多數研究的重點進行方向。帶隙主要的應用在於光子晶體波導 (waveguides)，可藉由移除光子晶體結構中的介電質柱，製造點缺陷 (point defects) 或線缺陷 (line defects) 來破壞周期性，將波侷限在缺陷中，進而形成共振腔 (resonant cavities) 或波導；異常折射效應(或稱負折射)突破傳統透鏡的繞射極限 (diffraction limit)，用於製作具有極佳解析度 (resolution) 的超透鏡 (superlenses)^[7]。

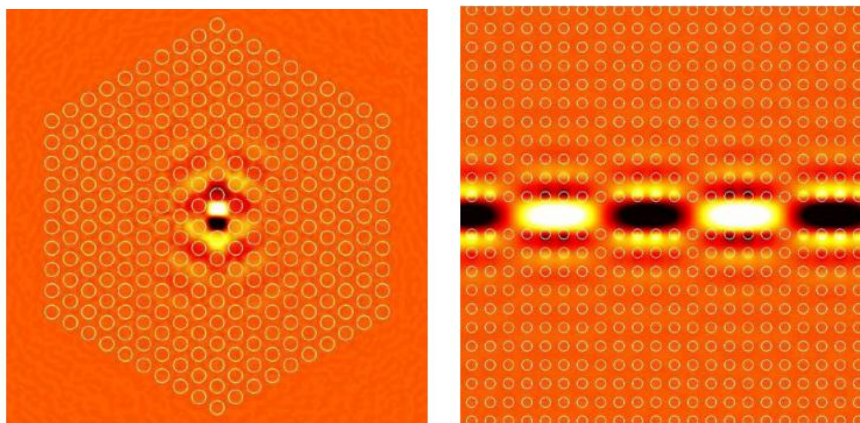


圖 1-5 共振腔內的共振模態(左圖)與電磁波於波導中分佈情形(右圖)^[8]

1.2.1 帶隙

在討論材料的導電性時，我們引入能隙的概念，絕緣體因為具有寬度極大的能隙，致使電子不易從價帶躍遷至傳導帶。光子晶體也有相對應的光學特性：光子晶體穿透帶 (photonic pass band)。光波經過週期性結構，會使落在帶隙內的頻率無法通過，使其餘的光穿透。

將週期排列的晶格經由傅氏轉換轉入倒晶格 (reciprocal lattice) 座標空間中，根據晶格結構的對稱性，我們可以找到約化布里淵區 (reduced Brillouin zone)，並畫出不同偏振方向對應的頻帶結構。圖 1-6 為一光子晶體的頻帶結構圖，橫軸為光波傳播進入晶體的入射方向，座標平面落在倒晶格空間，縱軸對應光波的入射頻率，位於帶隙內(灰色區域)的頻率皆無法穿透。

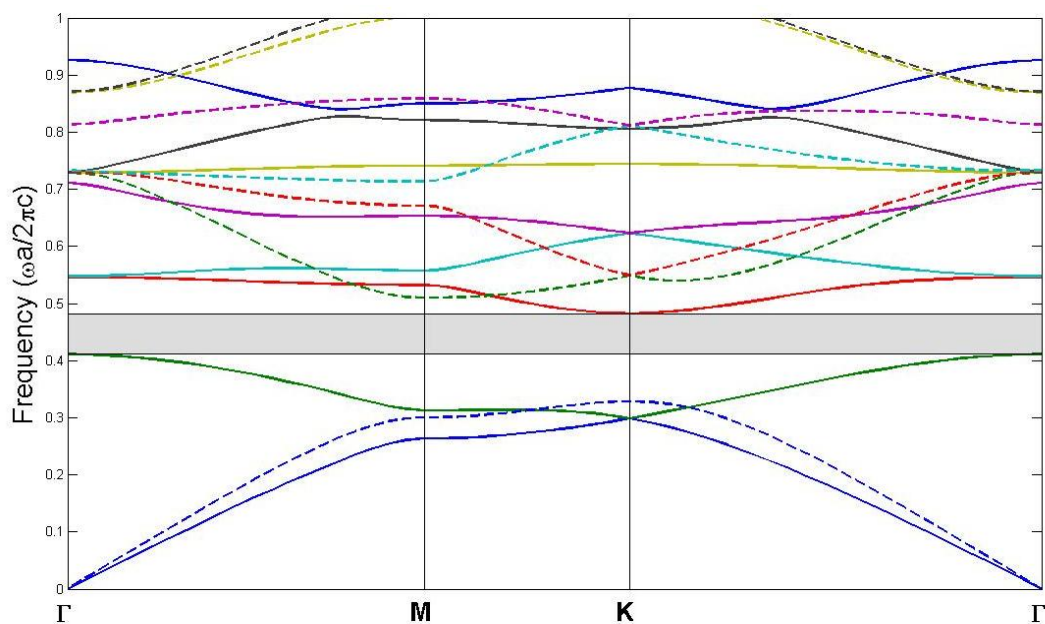


圖 1-6 三角晶格光子晶體頻帶結構圖

1.2.2 異常折射效應

一般折射現象，描述光在不同介質中的傳播速度不同，使得光朝法線或遠離法線方向偏折，折射光與入射光分別落在法線的兩側。異常折射效應描述的正是光從真空進入到介質中，折射光與入射光落在法線同側的傳播行為。

1968 年蘇聯的 Veselago 教授提出了負折射的概念^[9]，若均勻介質具有負值的 ϵ 和 μ (或稱左手介質)，為維持 \mathbf{E} 場、 \mathbf{H} 場平行介面分量連續以及 \mathbf{D} 場、 \mathbf{B} 場垂直介面分量連續等邊界條件，波向量 \mathbf{k} 與能流 \mathbf{S} 方向必須反平行，導致能流密度的負折射。

然而在 ϵ 和 μ 不小於零的情形下，選定特定頻率入射到光子晶體或聲子晶體結構當中，亦能達到負折射的效果。依據布洛赫定理與布里淵區的概念(詳細說明請參見第二章)，對於不同排列方式(如：正方晶格、三角晶格)的晶體，我們可以畫出對應的頻帶結構、等頻率曲線與光錐線(light line)，並於傳導帶及光錐線交會的反曲點附近找到負折射發生的頻率。

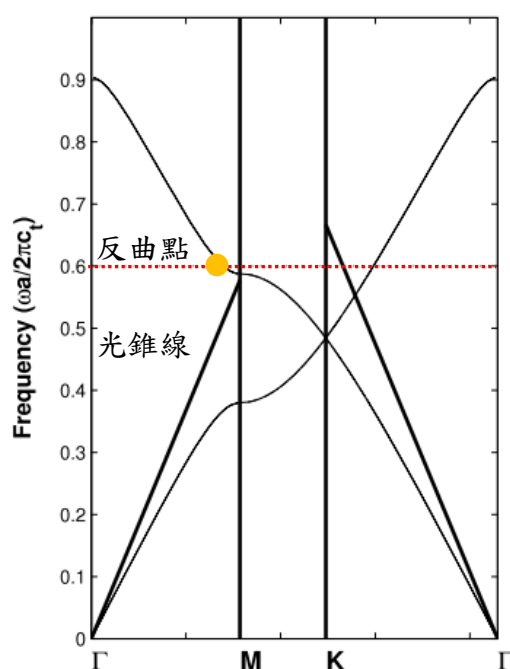


圖 1-7 三角晶格聲子晶體頻帶結構圖^[10]

舉三角晶格聲子晶體為例。ΓK 為介面方向，聲波沿 ΓQ 方向入射，通過 Q 點對 ΓK 介面作法線交六角形等頻率曲線於 P 點。由於能流速度 $\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{S}}{U}$ 與群速度 $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k})$ 相同^[11]，對等頻率曲線作通過 P 點的垂線(即桃紅色箭頭所指方向)，代表能流傳播方向。

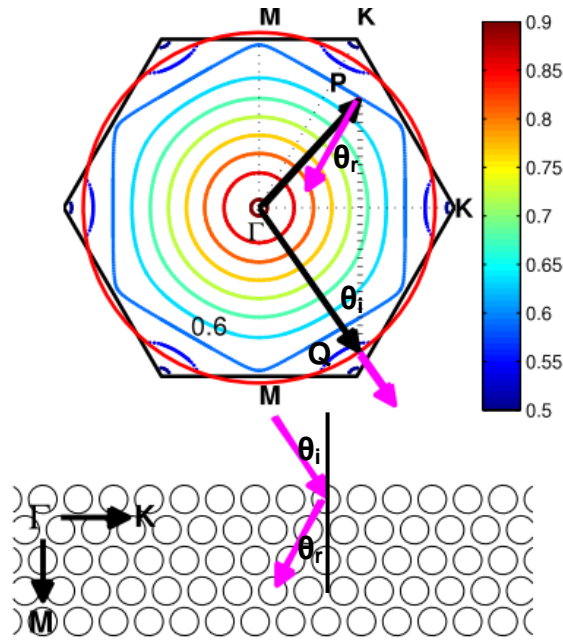


圖 1-8 等頻率曲線與負折射示意圖^[10]

1.3 研究動機

負折射的概念提出後，使得近年來多數關乎光子晶體的研究集中於平板透鏡 (PhC slabs) 成像品質的討論。有的利用縮短光源與平板透鏡間的距離，激發表面模態 (surface mode) 補償衰減的消逝波，達到次波長成像^[12]；有的則是探討表面厚度(與平板內第一排空氣柱的距離)對成像品質好壞的影響^[13]。縱使光子晶體的負折射行為，能突破傳統的繞射極限，達到次波長的聚焦，但其週期性的結構(不論是排柱子或挖洞)，在實驗上需相當繁複的工程以做出堪用的成品。

為此本文提出空氣透鏡的概念，藉由讓光從背景介質傳播進入凹透鏡形狀的凹洞中(光密介質進入光疏介質)，光線會產生與玻璃凸透鏡一樣的匯聚行為，來達到聚焦的效果。空氣透鏡的結構簡單，在折射率落差極大的情形下，模擬的結果亦能形成小於一個波長的成像，作者希望藉由提出這個概念，並提供相關的數值分析，增加未來實作出品的可能性。

1.4 論文架構

本文第一章旨在簡述光子晶體的發展過程與近年來該領域的重點研究方向；第二章以馬克斯威方程式為出發點，進行理論所需公式的推導，並引入布洛赫定理，以等頻率曲面及頻帶結構說明負折射發生的原因；第三章著重在數值模擬方式的介紹，當中包括計算頻譜的平面波展開法、計算電場與強度的時域有限差分法及多重散射法；第四章先針對一維、二維的光子晶體平凹透鏡進行模擬，進一步以相同的尺寸設計空氣透鏡，並對其成像品質做數值分析、比較；第五章為論文的總結與介紹未來可能的發展。

第二章 理論基礎

2.1 馬克斯威爾方程式

馬克斯威爾方程式以高斯制表示可寫成

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi\vec{J}_f \quad (2.4)$$

其中 \vec{E} 為電場 (electric field)、 \vec{H} 為磁場 (magnetic field)、 \vec{D} 為電通量密度 (electric displacement)、 \vec{B} 為磁通量密度 (magnetic induction)、 ρ_f 為電荷密度 (charge density)、 \vec{J}_f 為電流密度 (current density) 而 c_0 為真空中光速。

式(2.1)與式(2.2)分別為電與磁高斯定律：流出一封閉曲面電通量密度之面積分等於該封閉曲面包圍之空間總電荷量；磁極因同時具有南北極，積分淨值為零，說明了磁單極 (magnetic monopole) 不存在。式(2.3)為法拉第定律，說明隨時間變化的磁通量可以產生電場。式(2.4)為修正後的安培定律，說明電流與時變的電場可以產生磁場。

電場與電通量密度、磁場與磁通量密度間具有本構關係 (constitutive relations)

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ϵ 為介電係數 (permittivity)， μ 為磁導係數 (permeability)。

處理二維系統的電磁波問題，通常習慣將電磁場分解成 E 偏振 (TM mode) 與 H 偏振 (TE mode) 兩個方向的疊加，兩偏振波相互垂直不耦合，可以分開討論。在二維系統中，我們只考慮在 xy 平面傳遞的電磁波，因此相關的物理量都與 z 座標無關。介質參數可用 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 和 $\mu = \mu(x, y)$ 表示，電磁場以 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, t)$ 和 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, t)$ 表示。

這邊首先討論 TM 波的情形，令 $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$ 且 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ，可將波動方程式寫成

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu} \right) &= \nabla \times \left(\frac{\nabla \times (E\hat{\mathbf{z}})}{\mu} \right) = \nabla \times \left(\frac{\nabla E \times \hat{\mathbf{z}}}{\mu} \right) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}\partial_y E - \hat{\mathbf{y}}\partial_x E}{\mu} \right) = (\hat{\mathbf{x}}\partial_x + \hat{\mathbf{y}}\partial_y) \times \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}\partial_y E - \hat{\mathbf{y}}\partial_x E}{\mu} \right) \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \left[\partial_x \left(\frac{\partial_x E}{\mu} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial_y E}{\mu} \right) \right] = -\hat{\mathbf{z}} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla E}{\mu} \right)\end{aligned}\quad (2.6)$$

同理可得 TE 波的情形，令 $\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{z}}$ 且 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ，可得

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{H}}{\varepsilon} \right) = -\hat{\mathbf{z}} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla H}{\varepsilon} \right)$$

進一步可推導出二維系統中 TM 與 TE 的波動方程式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\nabla E}{\mu} \right) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \nabla \cdot \left(\frac{\nabla E}{\mu} \right) - \frac{1}{\mu c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla \cdot \left(\frac{\nabla H}{\varepsilon} \right) - \frac{\mu}{c_0^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \nabla \cdot \left(\frac{\nabla H}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0\end{aligned}\quad (2.7)$$

$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 為介質中傳播的光速。

上述兩式具有相同的形式，可整理成通用之波動方程式：

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)}{\alpha(\mathbf{r})} \right) - \frac{1}{\alpha(\mathbf{r})c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0\quad (2.8)$$

$\alpha(\mathbf{r})$ 是介質參數， $c(\mathbf{r})$ 介質中的波速。

2.2 布洛赫定理

布洛赫 (F. Bloch) 在研究電子於晶體物質內部的運動如何受到晶體中週期性位能的影響而發現這個定理。利用傅立葉分析，週期性位能以 $V(\mathbf{r})$ 表示， \mathbf{R} 為晶格平移向量。

$$V(\bar{\mathbf{r}}) = V(\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{r}})$$

$$\bar{\mathbf{R}} = n_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + n_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + n_3 \bar{\mathbf{a}}_3$$

電子在週期性位能影響下的定態薛丁格方程式可寫成

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{\mathbf{r}}) \right) \psi(\bar{\mathbf{r}}) = E \psi(\bar{\mathbf{r}}) \quad (2.9)$$

當中能量本徵函數 (eigenfunction) $\psi(\bar{\mathbf{r}})$ 是由各個能量本徵函數 $\psi_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{r}})$ 所疊加而成

$$\psi_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{r}}) = u_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{r}}) \exp(i\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}}) \quad (2.10)$$

$$u_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{r}}) = \sum_{\mathbf{G}} u_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{G}}) \exp(i\bar{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{r}})$$

$$\bar{\mathbf{G}} = n_1 \bar{\mathbf{b}}_1 + n_2 \bar{\mathbf{b}}_2 + n_3 \bar{\mathbf{b}}_3$$

當波函數的解 $\psi_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{r}})$ 具有空間週期函數 $u_{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{r}})$ 乘上相位 $\exp(i\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}})$ 的形式，我們稱此為布洛赫定理。

而電磁波系統中所對應的本徵值問題則可用下式表示：

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

其中磁場 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的解亦具有相位乘上周期向量函數的形式

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.12)$$

2.3 布里淵區 (Brillouin zones) 與頻帶結構 (band structure)

二維系統中，將鄰近原點的所有倒晶格向量 \mathbf{G} 連線取中垂線，由眾多中垂線所包圍的最小面積為第一布里淵區 (first Brillouin zones)。若擴充到三維系統討論，則是由眾多中垂面所包圍的最小體積定義之。

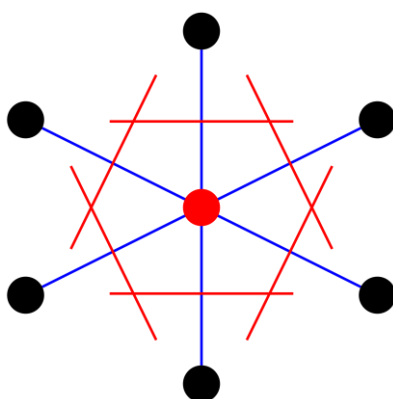


圖 2-1 第一布里淵區示意圖^[14]

從固態物理的角度出發，布拉格繞射是波經過週期性晶格散射形成建設性干涉的現象，其成立條件為

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}' - \vec{k} = \vec{G}$$

或用下式表示

$$2\vec{k} \cdot \vec{G} = G^2$$

並改寫成

$$\vec{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{G}\right) = \left(\frac{1}{2}G\right)^2 \quad (2.13)$$

由上式(2.13)亦可看出當布拉格繞射條件成立時， \mathbf{k} 向量會落在第一布里淵區內。

週期系統中傳導波的本徵函數 $\psi_{\mathbf{k}}$ 當中的 \mathbf{k} 向量皆被限制在第一布里淵區。而所有落在布里淵區外的 \mathbf{k} 向量可經由加減一個倒晶格向量 \mathbf{G} 回到區內，因此布里淵區內的同一 \mathbf{k} 向量可以對應無窮多個能量本徵值 $E_{\mathbf{k}}$ ，將之由小到大作遞增排列，並引入帶指標 (band index) $n=1,2,3\dots$ ，可將相對應的 $E_{\mathbf{k}}$ 改寫成 $E_{\mathbf{k}n}$ 。

二維光子晶體系統中，頻率本徵值以 ω_{kn} 表示，可畫出 \mathbf{k} - ω 空間中連續變化的曲面，稱之為頻帶結構。簡而言之，頻帶結構是波週期性環境中傳播，受環境調制而產生建設性與破壞性干涉的結果。

關於調制的概念，2000 年日本的 Notomi 教授曾針對帶隙鄰近區域的似負折射行為進行詳細的討論^[15]。當光經過弱調制性 (weakly modulated) 光子晶體結構，其傳播行為類似通過光柵產生的繞射；光經過強調制 (strongly modulated) 光子晶體結構，分析等頻率曲面 (equifrequency surface, 簡稱 EFS)，發現在帶隙鄰近區域，會產生負折射行為。當頻率 ω 落在 0.59-0.635 範圍之內，等頻率曲線半徑隨頻率的增加而逐漸減小，代表波傳播方向的群速度 $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$ 指向圓內，使得折射角變成負值，為滿足 Snell's law，勢必存在對應的等效負折射率。

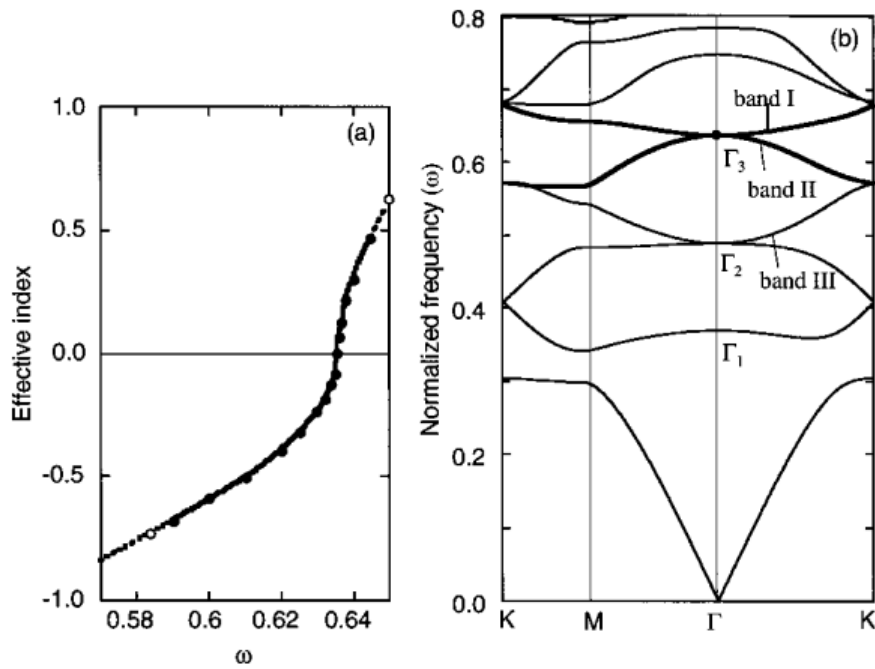


圖 2-2 二維三角晶格光子晶體(圓柱填充 GaAs，背景為空氣)

等效折射率-頻率關係圖(左圖)與頻帶結構(右圖)^[15]

第三章 數值模擬方法

模擬光子晶體結構常用的數值計算方法有：傳遞矩陣法 (transfer-matrix method)、平面波展開法 (plane wave expansion method)、多重散射法 (multiple-scattering method) 以及時域有限差分法 (Finite-Difference-Time-Domain Method)。依據模擬的結構不同，會使用不同的計算方法：傳遞矩陣法用於一維多層的結構；平面波展開法用於計算帶隙與頻帶結構；多重散射法適用於二維圓柱光子晶體，計算電磁場分布與強度；時域有限差分法則可計算任意結構的電磁場，卻相當耗時。本章將主要介紹平面波展開法、時域有限差分法及多重散射法。

3.1 平面波展開法

二維光子晶體的週期性介質函數 $\varepsilon(\mathbf{r})$ 可用傅立葉展開式表示：

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \varepsilon(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.1)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_a & \text{if } \mathbf{r} \in \text{region a} \\ \varepsilon_b & \text{if } \mathbf{r} \in \text{region b} \end{cases}$$

以 Fourier trick 處理，可得 $\varepsilon(\mathbf{G})$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{G}) &= \frac{1}{A_c} \int_{\text{cell}} \varepsilon(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2r \\ &= \frac{1}{A_c} \int_a \varepsilon_a \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2r + \frac{1}{A_c} \int_b \varepsilon_b \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2r \\ &= \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{A_c} \int_a \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2r + \frac{\varepsilon_b}{A_c} \int_{a+b=\text{cell}} \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2r \end{aligned} \quad (3.2)$$

由於上式第二項在 $\mathbf{G} \neq 0$ 為零， $\mathbf{G} = 0$ 為 ε_b ，進一步可推得 $\varepsilon(\mathbf{G})$

$$\varepsilon(\mathbf{G}) = \begin{cases} \Delta\varepsilon S(\mathbf{G}) & \text{if } \mathbf{G} \neq 0 \\ f \varepsilon_a + (1-f) \varepsilon_b \equiv \bar{\varepsilon} & \text{if } \mathbf{G} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

當中 $\Delta\varepsilon = \varepsilon_a - \varepsilon_b$ 是背景與圓柱填充介電係數的差值， $\bar{\varepsilon}$ 是空間介電係數的空間平均值， $f = \frac{A_a}{A_c}$ 是介電質 ε_a 在晶胞中的填充率(filling fraction)， $S(\mathbf{G})$ 被稱為結構因子(structure factor)

$$S(\mathbf{G}) = \frac{1}{A_c} \int \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2r \quad (3.4)$$

3.2 時域有限差分法

3.2.1 基本理論

時域有限差分法(簡稱 FDTD)將解析空間切割成一小塊一小塊區域，而每小塊的邊長 dx 必須小於波長的 $1/20$ ，接著對每一小區域電場作線積分為該區域的磁通量變化、每一小區域磁場作線積分為該區域的電場電通量變化，不斷地重複交互計算整個解析空間電場與磁場。根據馬克斯威爾方程式，安培定律與法拉第定律可以下列形式表示：

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{H}} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{J}}_e & \bar{\mathbf{J}}_e &= \sigma \bar{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} - \bar{\mathbf{J}}_m & \bar{\mathbf{J}}_m &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

當中 $\bar{\mathbf{J}}_e$ 是電流源、 $\bar{\mathbf{J}}_m$ 是磁流源，而 σ 是電導率。討論 E 偏振的情形下 $\bar{\mathbf{J}}_m = 0$ ，

若為 H 偏振則 $\bar{\mathbf{J}}_m \neq 0$ 。式 3.5 在直角坐標系下展開可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu H_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

Yee 晶格架構下，空間被切割成許多小塊的晶格。單位晶格中，每一個電場分量被四周磁場分量圍繞，由周圍磁場決定中間電場的變化量，每一個磁場分量被四周電場分量圍繞，由周圍電場決定中間磁場的變化量。

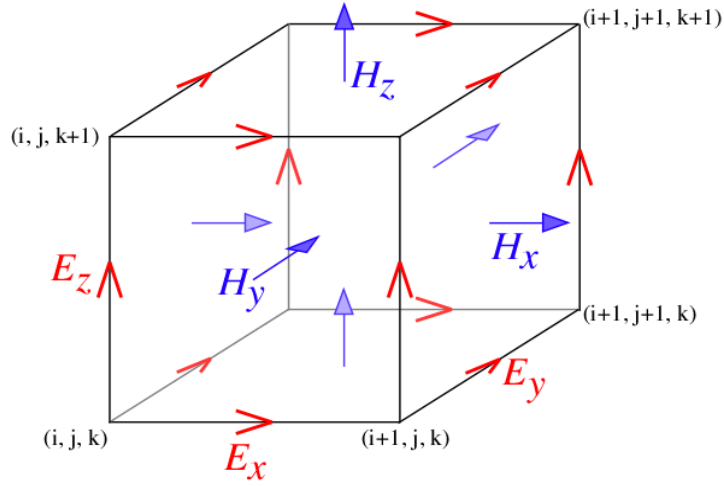


圖 3-1 Yee 晶格示意圖^[16]

為減低誤差及滿足收斂性，空間與時間切割大小的限制如下：

$$dx \leq \frac{\lambda}{20} \quad (3.7)$$

$$dt \leq \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{1}{dz}\right)^2}}$$

本文第四章對二維光子晶體進行 FDTD 模擬所使用的限制參數為：

$$dx = dy = \frac{a}{40}$$

$$a = 0.3\lambda$$

$$dt = \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{1}{dy}\right)^2}}$$

3.2.2 吸收邊界條件

電磁波完全不反射的邊界稱為吸收邊界，用於模擬開放空間中的電磁波散射情形。一般邊界理論依據處理場的方式不同分作 Differential-based 以及 Materials-based 兩種。前者是由不反射吸收邊界的近似微分方程式推導出的邊界條件，以 Mur 理論為代表；後者是假設在邊界的位置具有使入射波衰減的吸收性材料所取得的邊界條件，其中 Berenger 的 PML(perfectly matched layer)理論是目前最有效且常用的模擬方法^[17]。下文將針對 PML 理論作進一步的說明。

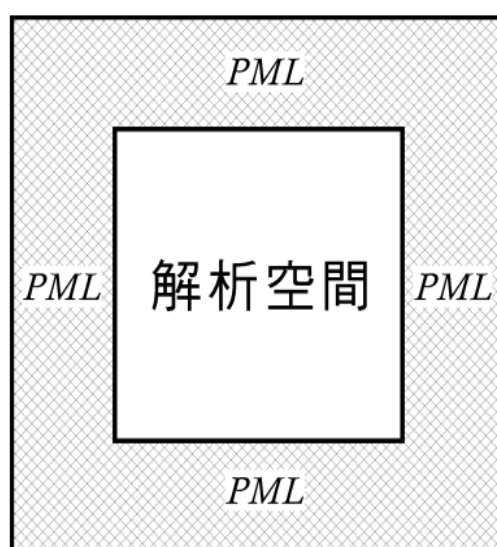


圖 3-2 Berenger 的 PML 理論，解析空間的四周被吸收性介質包覆^[18]

波在不同介質中傳遞，對於一般非吸收性介質，其磁導係數 μ 與介電係數 ε 之比值稱為阻抗(impedance)，真空中的阻抗以 Z_0 表示；而在吸收性介質中傳播，則須另外考慮電導率 σ 、磁導率 σ^* 與入射波頻率 ω ，對安培與法拉第定律及其阻抗 Z 給予修正。

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_e & \vec{J}_e &= \sigma \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{J}_m & \vec{J}_m &= \sigma^* \vec{H} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (3.9)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu + \frac{\sigma^*}{j\omega}}{\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}}}$$

由介面的阻抗匹配條件 $Z_0=Z$ 可得

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma^*}{\mu} \quad (3.10)$$

舉二維 FDTD 為例，將 TE 波的 H_z 分解成 H_{zx} 和 H_{zy} 的疊加，TM 波的 E_z 分解成 E_{zx} 和 E_{zy} 的疊加，代入式(2.3)、(2.4)中可得：

TE:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \left(\sigma_y^* + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) H_{zy} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \left(\sigma_x^* + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) H_{zx}$$

$$\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} = \left(\sigma_y + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x$$

$$\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} = - \left(\sigma_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_y$$

TM:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = - \left(\sigma_y + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{zy} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \left(\sigma_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{zx}$$

$$\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} = - \left(\sigma_y^* + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) H_x$$

$$\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} = \left(\sigma_x^* + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) H_y$$

當入射波是沿 x 方向前進的平面波，阻抗匹配條件如下：

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\varepsilon} &= \frac{\sigma_x^*}{\mu} \\ \sigma_y &= \sigma_y^* = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

分割成 L 層的漸進式 PML 則可用下式表示， σ_{\max} 代表最外層的電導率

$$\begin{aligned} \sigma_x(i\Delta x) &= \sigma_{\max} \left\{ \frac{\left(i - \frac{1}{2}\right)}{L} \right\}^M \\ \sigma_{\max} &= -\frac{(M+1)\varepsilon_0 c}{2L\Delta x} \ln|R(0)| \end{aligned} \quad (3.14)$$

L 為 PML 的總層數， Δx 為每一層厚度，M 為介於 2~4 之間的係數，第 i 層的電導率可用 $\sigma_x(i\Delta x)$ 表示，由內而外呈指數函數遞增。

	<i>PML</i> $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_x^* \neq 0$ $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_y^* \neq 0$	<i>PML</i> $\sigma_x = 0 \quad \sigma_x^* = 0$ $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_y^* \neq 0$	<i>PML</i> $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_x^* \neq 0$ $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_y^* \neq 0$
	<i>PML</i> $\sigma_y = 0 \quad \sigma_y^* = 0$ $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_x^* \neq 0$	解析空間	<i>PML</i> $\sigma_y = 0 \quad \sigma_y^* = 0$ $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_x^* \neq 0$
y ↑ x →	<i>PML</i> $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_x^* \neq 0$ $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_y^* \neq 0$	<i>PML</i> $\sigma_x = 0 \quad \sigma_x^* = 0$ $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_y^* \neq 0$	<i>PML</i> $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_x^* \neq 0$ $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_y^* \neq 0$

圖 3-3 電導率與磁導率在 PML 當中的分布圖^[18]
當 σ 或 σ^* 不為零時，其數值由內而外增加。

本文第四章對二維光子晶體進行 FDTD 模擬所使用的 PML 總厚度皆為 $0.4a$ 。

3.3 多重散射法

由均勻散射體與背景介質所構成的二維有限系統(例如：光子晶體或聲子晶體)，不論散射體的排列是否整齊、大小是否一致，只要每個散射體皆為圓柱體，便能使用多重散射法計算空間中各點波場大小與強度。

假設有許多圓柱型散射體散布在空間中，並將點波源放在二維空間中的原點(或稱三維空間中與 z 軸重合的線波源)，不與任何散射體重疊，連續向外發射頻率 ω 的單頻波 $\Phi_{inc}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{inc}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ 。波源發出的波在散射體間經歷多重散射後，疊加形成穩態波 $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ ，為通用波動方程式(2.8)的解。

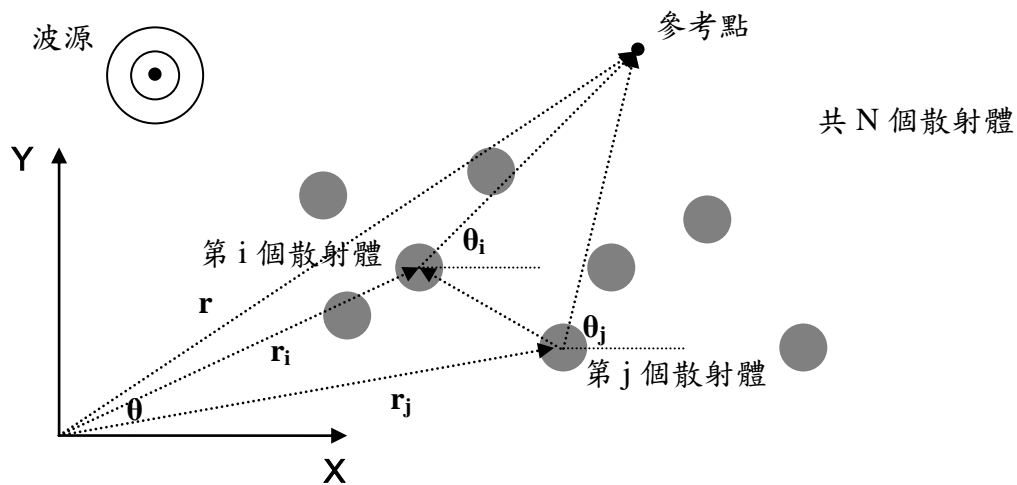


圖 3-4 多重散射之示意圖

A. 波源

若空間中沒有散射體，只有點波源發射的波場，滿足亥姆霍茲方程式

(Helmholtz equation)

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

當中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 為二維拉普拉斯算符。

滿足式(3.14)的解為

$$G(\mathbf{r}) = i\pi H_0^{(1)}(kr)$$

$H_0^{(1)}$ 是第零階第一類 Hankel 函數，而第一與第二類 Hankel 函數的定義如下：

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (3.16)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z)$$

J_n : Bessel 函數 Y_n : Neuman 函數

B. 背景空間中散射體外部的場

站在參考點 \mathbf{r} 的位置，接收到來自第 j 個散射體的散射場為

$$\Phi_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\pi A_n^j H_n^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|) e^{in\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}} \quad (3.17)$$

當中 $\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}$ 為向量 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_j$ 的幅角。

第 i 個散射體周圍接受到的波為來自波源與其他散射體散射波的加總

$$\Phi_{inc}^i(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \Phi_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \quad (3.18)$$

由於入射波在 \mathbf{r}_i 處不具奇異性(singularity)，等式左邊可整理成 Bessel 函數的疊加

$$\Phi_{inc}^i(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^i J_n(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) e^{in\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}} \quad (3.19)$$

等式右邊第一項 $G(\mathbf{r})$ 可利用 Hankel 函數的加法定理^[19]整理成

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= i\pi H_0^{(1)}(kr) \\ &= i\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{-n}^{(1)}(k|\mathbf{r}_i|) e^{-in\theta_{\mathbf{r}_i}} J_n(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) e^{in\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^i J_n(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) e^{in\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}} \\ S_n^i &= i\pi H_{-n}^{(1)}(k|\mathbf{r}_i|) e^{-in\theta_{\mathbf{r}_i}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

同理可得等式右邊第二項

$$\begin{aligned} \Phi_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{i,j} J_n(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) e^{in\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}} \\ C_n^{i,j} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} i\pi A_l^j H_{l-n}^{(1)}(k|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|) e^{i(l-n)\theta_{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

綜合式(3.18)、(3.19)與(3.20)可得以下係數關係式：

$$B_n^i = S_n^i + \sum_{j=1, j \neq i}^N C_n^{i,j} \quad (3.22)$$

外部總波場為式(3.18)加上第 i 個散射體的散射波

$$\Phi_{ext}(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[B_n^i J_n(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) + i\pi A_n^i H_n^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) \right] e^{in\theta_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}} \quad (3.23)$$

C. 散射體內部的場

第 i 個散射體內部波場不具奇異性，可仿造式(3.18)寫成 Bessel 函數的疊加

$$\Phi_{int}^i(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^i J_n(k_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{in\theta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_i}} \quad (3.24)$$

當中散射體內波速為 c_1 ，波數 $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$

D. 邊界條件

散射體表面須滿足的邊界條件為

$$\begin{aligned} \Phi_{ext} &= \Phi_{int} \\ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ext} &= \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{int} \end{aligned} \quad (3.25)$$

當中 α 為背景介質物質參數， α_1 為散射體內之物質參數。

若入射波為 E 偏振的情況，其邊界條件為電場切分量連續、磁場切分量除以物質參數 μ 連續；若為 H 偏振的情況，其對應之邊界條件為磁場切分量連續、電場切分量除以物質參數 ε 連續。

將式(3.22)與(3.23)代入式(3.24)中，令 $a^i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ ，整理可得

$$B_n^i J_n(ka^i) + i\pi A_n^i H_n^{(1)}(ka^i) = D_n^i J_n(ka^i/h) \quad (3.26)$$

$$B_n^i J_n'(ka^i) + i\pi A_n^i H_n^{(1)'}(ka^i) = \frac{1}{gh} D_n^i J_n'(ka^i/h)$$

$$g = \frac{\alpha_1}{\alpha} \quad h = \frac{k}{k_1} = \frac{c_1}{c} \quad (3.27)$$

解聯立消去 D_n^i 可得

$$B_n^i = i\pi \Gamma_n^i A_n^i \quad (3.28)$$

$$\Gamma_n^i = \frac{H_n^{(1)}(ka^i) J_n'(ka^i/h) - gh H_n^{(1)'}(ka^i) J_n(ka^i/h)}{gh J_n'(ka^i) J_n(ka^i/h) - J_n(ka^i) J_n'(ka^i/h)} \quad (3.29)$$

E. 解總場

比較式(3.22)與式(3.28)可得

$$\begin{aligned} \Gamma_n^i A_n^i - \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{n,l}^{i,j} A_l^j &= T_n^i \\ G_{n,l}^{i,j} &= H_{l-n}^{(1)}(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) e^{i(l-n)\theta_{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}} \\ T_n^i &= S_n^i / i\pi = H_{-n}^{(1)}(k|\mathbf{r}_i|) e^{-in\theta_{\mathbf{r}_i}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

當中散射體編號 i, j 的範圍是 1 至 N ；Bessel 與 Hankel 函數的階數以 n, l 表示，範圍為 $\pm\infty$ 。

式(3.30)具有矩陣方程 $\mathbf{MA} = \mathbf{T}$ 的形式。將等式左邊乘上一反矩陣(inverse matrix)，可解 $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}$ ，代入式(3.28)可解 B_n^i ，並求得外部總場

$$\Phi_{ext}(\mathbf{r}) = i\pi H_0^{(1)}(kr) + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\pi A_n^i H_n^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{in\theta_{\mathbf{r} \mathbf{r}_i}} \quad (3.31)$$

將式(3.26)解聯立消去 B_n^i ，可由以下關係式找到 D_n^i ；

$$D_n^i = i\pi Z_n^i A_n^i \quad (3.32)$$

$$Z_n^i = \frac{H_n^{(1)}(ka^i) J_n'(ka^i) - H_n^{(1)'}(ka^i) J_n(ka^i)}{\left[J_n(ka^i/h) J_n'(ka^i) - \frac{1}{gh} J_n(ka^i) J_n'(ka^i/h) \right]}$$

將 D_n^i 代入式(3.24)可解出散射體內部的場。

第四章 奈米平凹透鏡之成像特性

目前多數關於光子晶體 (Photonic Crystals, 簡稱 PhC) 的研究, 普遍集中於平板透鏡 (PhC slabs) 成像解析度 (resolution) 的討論, 對於成像位置的預測著墨不多。2005 年後, 平凹透鏡 (plano-concave lens) 的研究逐漸興起, 主要是發現由頻帶結構決定的負折射率 n_g 與對應的負折射角, 與幾何光學中的斯乃爾定律 (Snell's law) 相當吻合^[15], 進而可以用凹透鏡之焦距公式, 預測聚焦位置, 甚至驗證光的可逆性^[20]。相關的研究包括了一維條狀 PhC 稜鏡 (prism) 與圓柱面平凹透鏡^[20]、二維介電質柱 PhC^[21](或介電質塊材上挖空氣柱 PhC^[22-23])圓柱面平凹透鏡及梯型平凹透鏡^[24]等等, 當中甚至有不少結構已被製作出來, 得以比對實驗與模擬之間的誤差。

除了討論光子晶體平凹透鏡的情形, 為使透鏡結構更為精簡, 本章亦討論在介電質背景中放入空氣透鏡的情形。與一般在空氣背景中放入玻璃透鏡情況相反, 光從密介質(背景)通過疏介質(透鏡)再進入密介質(背景)的過程, 使得原先發散的凹透鏡, 得以有聚焦的效果, 希冀不用到光子晶體如此複雜的結構, 亦能達到成像點小於一個波長的成效。為減少像差與得到更好的成像品質, 筆者進一步對空氣平凹透鏡進行非球面的優化, 並以聚焦位置及成像點大小作為判斷成像品質良莠的依據。

本章前兩節使用平面波展開法 (PWE) 計算出光子晶體的頻帶結構, 進而找出負折射發生的頻率, 接著以 FDTD 模擬一維光子晶體、二維介電質平板挖空氣柱結構、用多重散射法(MS)模擬二維介電質柱結構之電場強度分布圖。第三節主要使用 FDTD 模擬空氣透鏡的場強分布圖, 再與光線追跡結果進行比對。

4.1 二維光子晶體平凹透鏡文獻回顧

4.1.1 階梯狀—介電質平板挖空氣柱

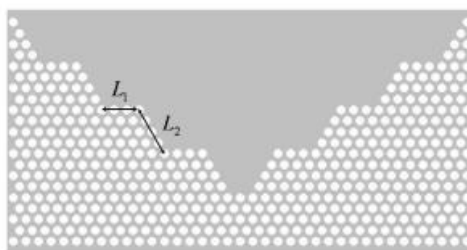


圖 4-1 梯型平凹透鏡示意圖^[21]

利用光子晶體的負折射特性，並求結構簡單易於製造，2007 年在 PIERS ONLINE 上，張高德博士於長方形介電質平板上挖洞的方式，模擬梯型光子晶體平凹透鏡的負折射聚焦行為。並成功將入射的高斯波匯聚成約為 1 個波長大小的像點，進而將匯聚光有效的導入另一介電質波導中，作為光學耦合器(optical coupler)之用^[24]。

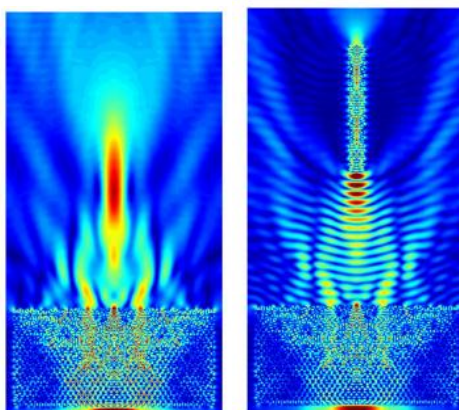


圖 4-2 左圖為梯型平凹透鏡聚焦電場強度圖，右圖將匯聚光耦合導入波導中。^[21]

文中考慮 TM 模態(E 偏振)的情況。 a 為晶格常數，平板介電常數 $\epsilon_b = 12.96$ (GaAs 砷化鎵)，挖洞處填充空氣柱，每根柱子半徑為 $0.4a$ ，梯形週期 L_1 為 $3a$ 、 L_2 為 $4a$ 。透鏡尺寸為 $38a * 5\sqrt{3}a$ 。

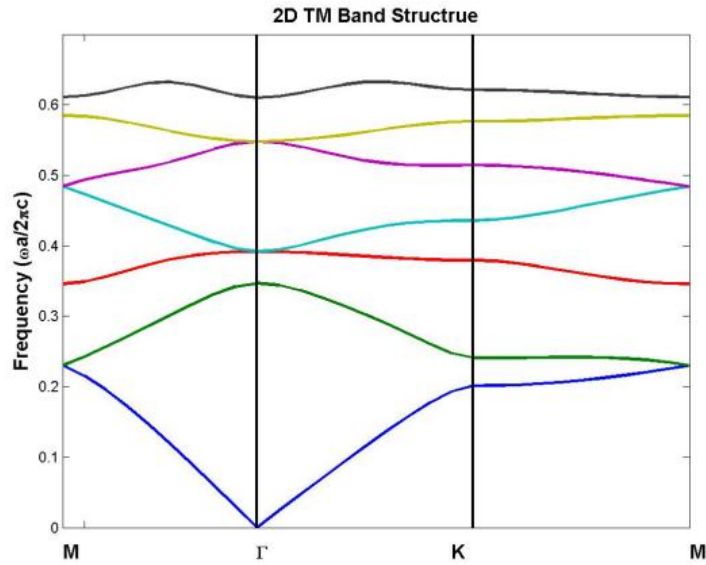


圖 4-3 二維光子晶體三角晶格頻帶結構圖，工作頻率為 0.3^[24]

由上頁提供的結構參數，可以畫出對應的頻帶結構圖，負折射發生頻率範圍在 0.25-0.35 之間，下文模擬選取 0.3 作為入射頻率。若入射波長 $\lambda = 1550\text{nm}$ ，對應的晶格常數 $a = 465\text{nm}$ ，圓柱孔洞直徑 $2r = 372\text{nm}$ 。

接著將階梯形的凹面結構逐步填入介電材料，如下圖所示：

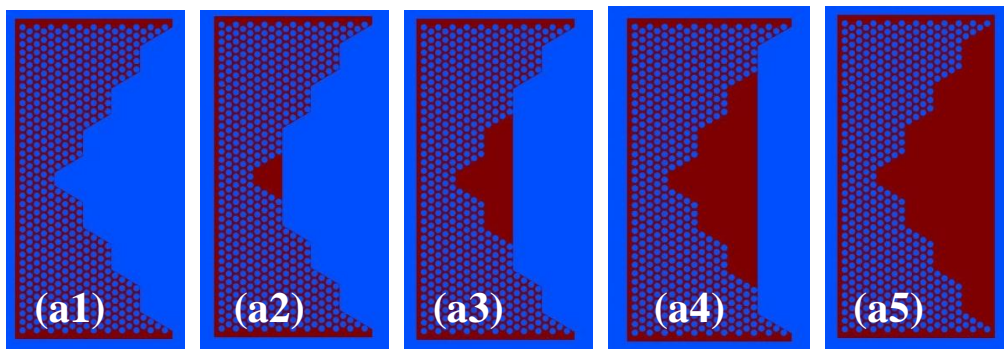


圖 4-4 階梯狀逐步填滿結構示意圖

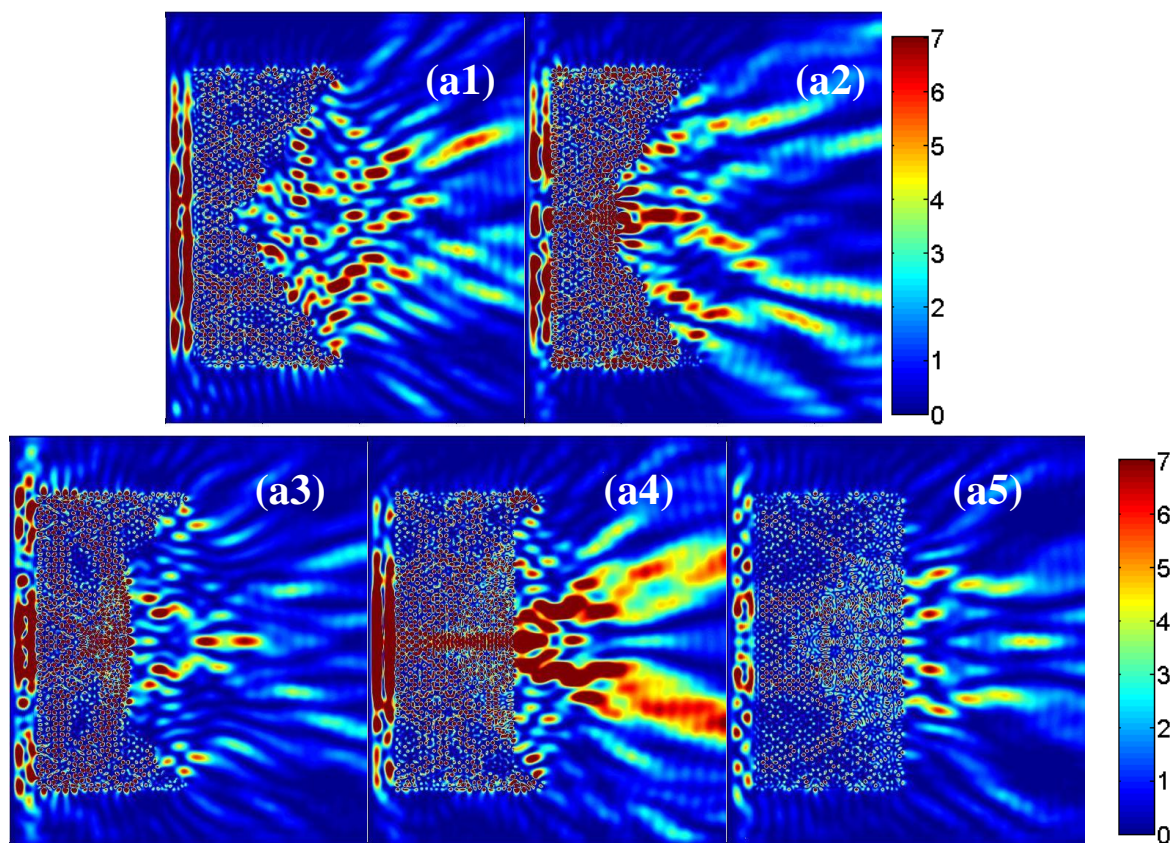


圖 4-5 階梯狀逐步填滿電場強度圖

由圖 4-5 可以看出透鏡表面形狀對成像聚焦形狀有極大的影響，當完全挖空梯形區域時，透鏡表面最為不平整，也因此無法有單一完整的成像；當逐步填滿加至第三張圖時，開始有較為完整平滑卻分散的兩個像點；當填滿所有梯形區域時，則在透鏡右方出現一均勻強度的成像。

4.1.2 圓柱面—介電質平板挖空氣柱

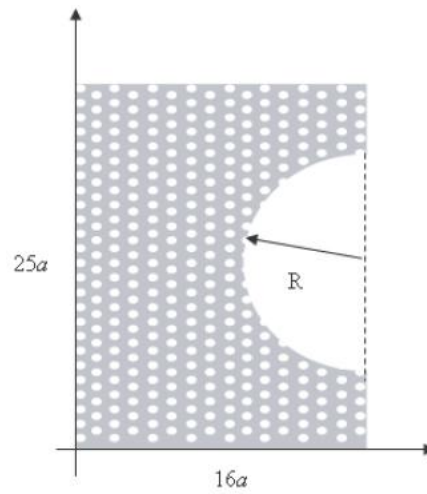


圖 4-6 圓柱面平凹透鏡示意圖^[23]

隔年同樣在 PIERS ONLINE 上，英國的 S. Haxha 教授也發表了相關的論文。由光子晶體圓柱面平凹透鏡與光子晶體波導組合成單一光學晶片(optical chip)，在特定頻率下，能將光強導入波導中，使效率提高至 95%，並減低沒有透鏡情形的大規模光功率溢散。該篇期刊同時指出了將傳統光學晶片面積(約為 $0.5\text{-}5\text{cm}^2$)縮小到微米尺度(μm^2)的可能性^[23]。

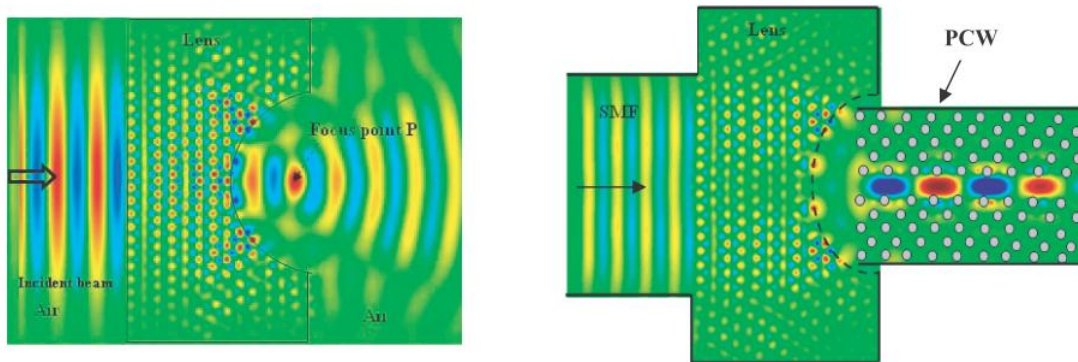


圖 4-7 左圖為圓柱面平凹透鏡聚焦電場強度圖，右圖將匯聚光有效導入光子晶體波導(PCW)中。^[23]

4.1.3 圓柱面—背景空氣排介電質柱

首先考慮 TM 模態的情況，電場 $\mathbf{E} = E\hat{z}$ 平行於 z 軸，波傳播方向則平行於 xy 平面。此三角晶格之介電質柱排列方向： x 為 ΓM 方向， y 為 ΓK 方向。 a 為晶格常數，柱子內介電常數 $\epsilon_a = 15$ ，背景為空氣 $\epsilon_b = 1$ ，每根柱子半徑為 $0.198a$ ，曲率半徑 $R = 6.896a$ ，並將曲率半徑 R 內的圓柱移除，圓周上通過的圓柱則保留。以上數據參考來源為台師大楊謝樂教授 2006 年發表於 J. Opt. Soc. Am. A 期刊的文章^[21]。

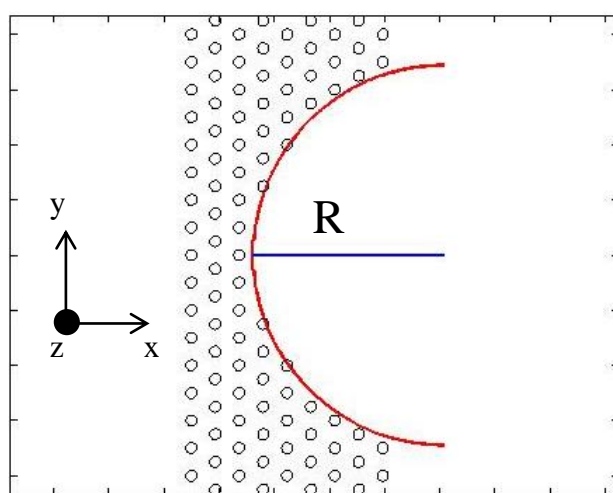


圖 4-8 二維光子晶體平凹透鏡， R 為曲率半徑

排出光子晶體結構之後，接著畫出頻帶結構圖，找出負折射發生頻率範圍為 0.416-0.505，並選取 0.48 作為入射頻率，圖 4-9 用紅色虛線標示之。

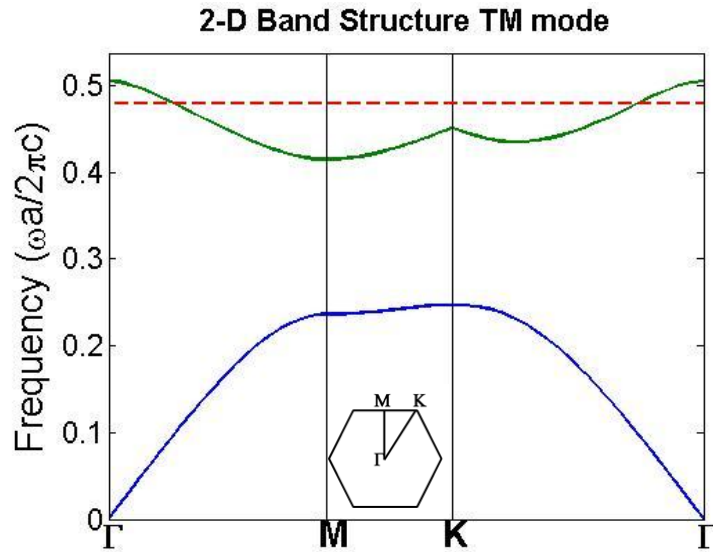


圖 4-9 二維光子晶體三角晶格頻帶結構圖，工作頻率 $\omega a/2\pi c = a/\lambda = 0.48$

接著使用多重散射法，以多個點波源相互干涉後，並給予一個寬度為 $10a$ 的高斯波，作為平面波的近似入射，並以最大值對應的 x 座標與透鏡間距離為焦距，焦長為 $f=2.2848\lambda$ ，此結果與上述論文中 $f=2.38\lambda$ 結果相近。

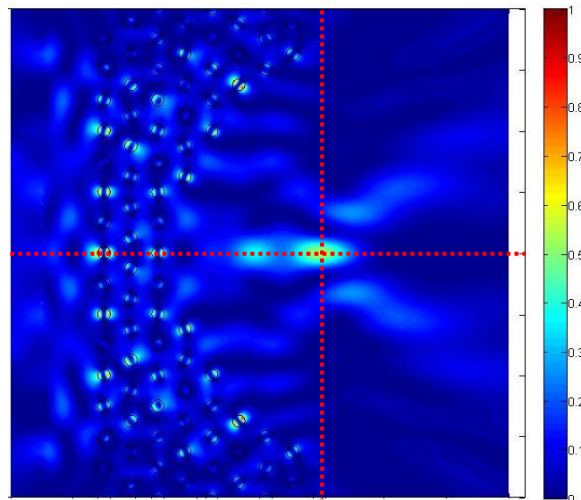


圖 4-10 平面波經由二維光子晶體聚焦電場強度圖，紅色虛線標示在成像位置
分別沿 x 、 y 方向做強度剖面圖

進一步對 x 方向作電場強度剖面圖，找到出透鏡後的強度最大值落在 3.84λ 處，圖 4-11 以紅色虛線標示。並求出 x 方向半高寬(縱向成像點大小 longitudinal spot size) $\Delta x = 0.9024\lambda$ ，以及 y 方向半高寬(側向成像點大小 lateral spot size) $\Delta y = 0.3840\lambda$ ，皆小於一個波長大小。

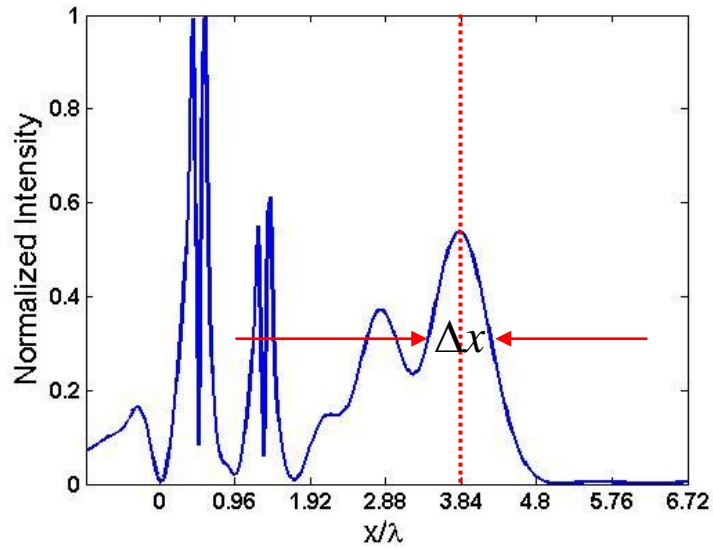


圖 4-11 縱向成像點大小 $\Delta x = 0.9024\lambda$

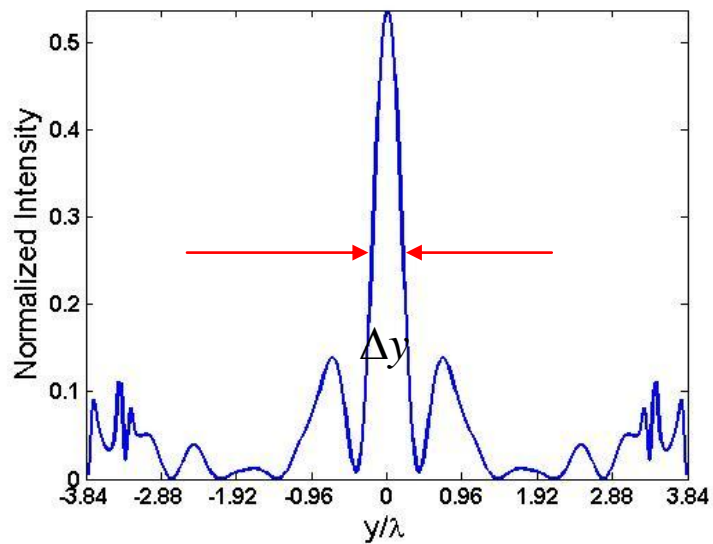


圖 4-12 側向方向成像點大小 $\Delta y = 0.3840\lambda$

4.2 一維光子晶體平凹透鏡文獻回顧

接著針對一維的情形做討論。一樣考慮 TM 模態的情況，電場 $\mathbf{E} = E\hat{z}$ 平行於 z 軸，波傳播方向則平行於 xy 平面。晶格常數 a 為 1cm，條狀長方柱介電常數 $\epsilon_a = 8.9$ ，背景為空氣 $\epsilon_b = 1$ ，每根柱子寬為 0.5cm，負折射發生頻率範圍為 0.306-0.383，選取工作頻率 0.316。以上數據參考來源為 2006 年美國西北大學 P. Vodo 教授發表於 APL 期刊的文章^[20]。

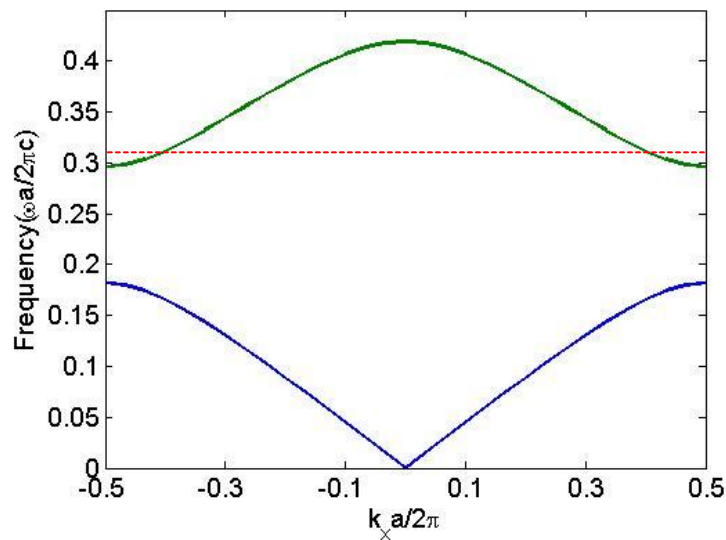


圖 4-13 一維光子晶體頻帶結構圖，工作頻率 $\omega a / 2\pi c = a / \lambda = 0.316$

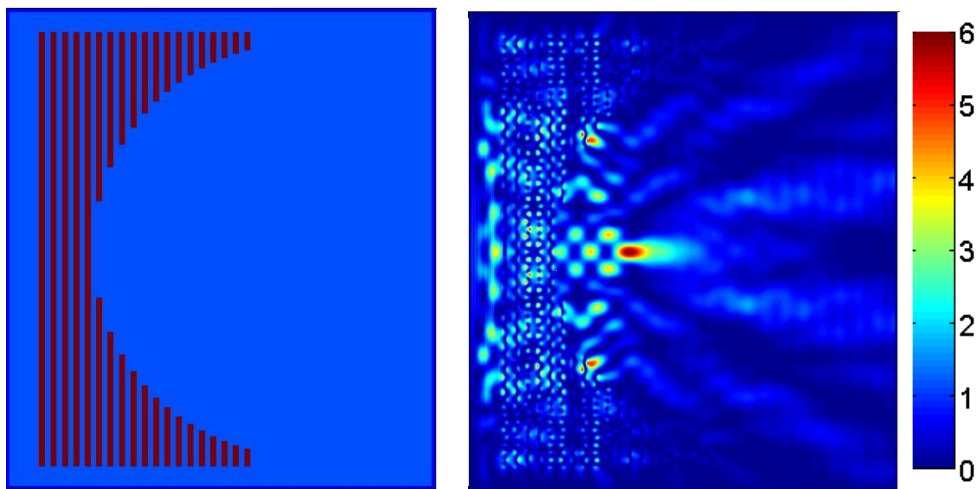


圖 4-14 一維光子晶體圓柱面平凹透鏡結構示意圖與電場強度圖

Vodo 教授這篇論文先從直角三角稜鏡出發，驗證負折射角與負折射率的關係遵守 Snell's Law，進而嘗試在光聚焦的地方，即圖 4-14 強度最大的聚焦位置 $f = 1.9635\lambda$ ，放上一個點波源，試圖重建原先入射的平面波場，證明光的可逆性。然而在作者的測試下，縱使重建的平面波波前仍算一致且平整(見圖 4-15)，但相對強度(見圖 4-16)已經弱了許多，推測多數能量皆被凹面端反射及吸收。

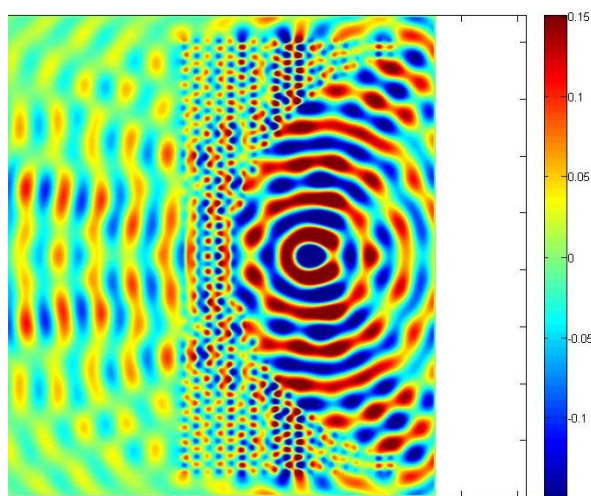


圖 4-15 將點波源放置在聚焦處 $f = 1.9635\lambda$ ，重建電場分布示意圖

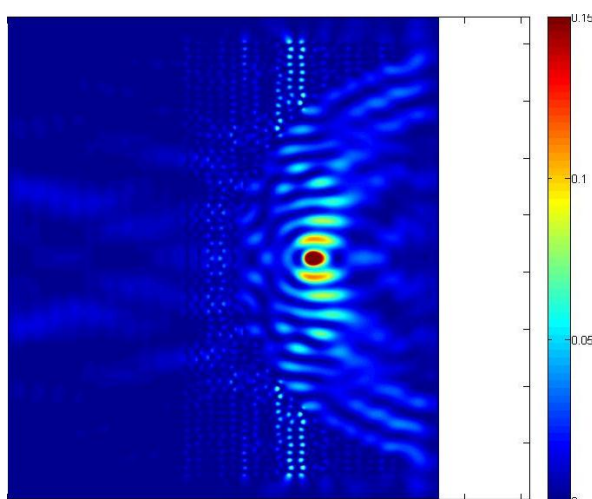


圖 4-16 將點波源放置在聚焦處 $f = 1.9635\lambda$ ，重建電場強度分布示意圖

4.3 空氣平凹透鏡

此處比照前述 2008 年 S.Haxha 教授的文章，在結構為數百奈米的尺度下，對空氣透鏡進行模擬。考慮 TM 模態的情況，電場 $\mathbf{E} = E\hat{z}$ 平行於 z 軸，波傳播方向則平行於 xy 平面，以寬度 $10a$ 的高斯波近似平面波射入透鏡。背景折射率為 $n_b=3.6$ ，平凹透鏡內部填充介質為空氣，工作頻率為 $\omega a / 2\pi c = a / \lambda = 0.305$ ，透鏡尺寸為 $16a \times 25a$ ，並維持透鏡最薄處的厚度 $9.11a$ 。以下模擬旨在比較曲面焦距 f_0 (或曲率半徑 R_0) 長短對各種圓錐曲面成像位置 (focal length) 與成像大小 (spot size) 的影響。藉由使用 FDTD 計算並畫出波動光學下的電場強度圖，再與幾何光學下的光線追跡圖比較成像特性。在做進一步分析之前，下面先對分析電場強度分布圖的方法與光線追跡的方法做詳細的說明：

分析電場強度分布圖的方法—聚焦點 F 與成像點大小

首先以 FDTD 畫出不同圓錐曲面透鏡的電場強度分布圖，並找出光出透鏡後聚焦點 F 的座標 (x_{\max}, y_{\max}) ，並以 F 與透鏡出射面的距離作為焦距 f 。接著移除透鏡，單純以平面波入射背景介質中，並找出聚焦點 F 處的電場強度數值做為比較標準做歸一化處理，畫出該處 x 及 y 方向之強度剖面圖，並以半高寬找出縱向成像點大小 Δx 及側向成像點大小 Δy 。

光線追跡—成像聚焦位置與縱向成像點大小

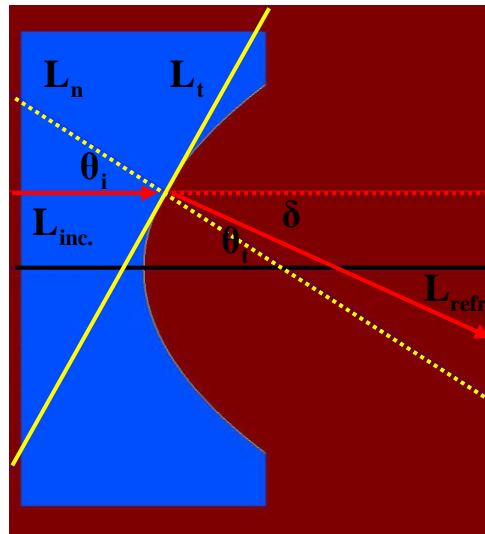


圖 4-17 光線追跡示意圖

由於光源是沿 x 方向正向入射的平面波，所以可以將第一個介面(透鏡平面端)的追跡省略，直接進行第二個介面(透鏡凹面端)的追跡分析。首先給定入射角 θ_i ，根據 Snell's Law 求得折射角 θ_t 與偏移角 $\delta = \theta_i - \theta_t$ ，接著對入射角及偏移角取其正切值，可找出法線斜率 m_n 及折射光線斜率 $m_{refr.}$ ，畫出出射光的軌跡。

$$1 \cdot \sin \theta_i = n_b \sin \theta_t$$

$$\theta_t = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_i}{n_b} \right)$$

$$\tan \theta_i = m_n$$

$$\tan \delta = m_{refr.}$$

當中切線為 L_t 、法線為 L_n 、入射光為 $L_{inc.}$ 、折射光(出射光)為 $L_{refr.}$ 、背景折射率為 n_b 。

接著以上述方式於透鏡直徑內取 60 條等間距光線繪製出光線追跡圖。另一方面，透過取 200 條等間距光線通過透鏡，可找到交於 x 軸的最近點 F_{near} 與最遠點 F_{far} ，將兩點座標加總後取平均值得到聚焦點 F 座標，進而定義出焦距 f 。而縱向成像點大小 Δx 則是取最遠點座標與最近點座標的差值定義之。

4.3.1 圓柱面

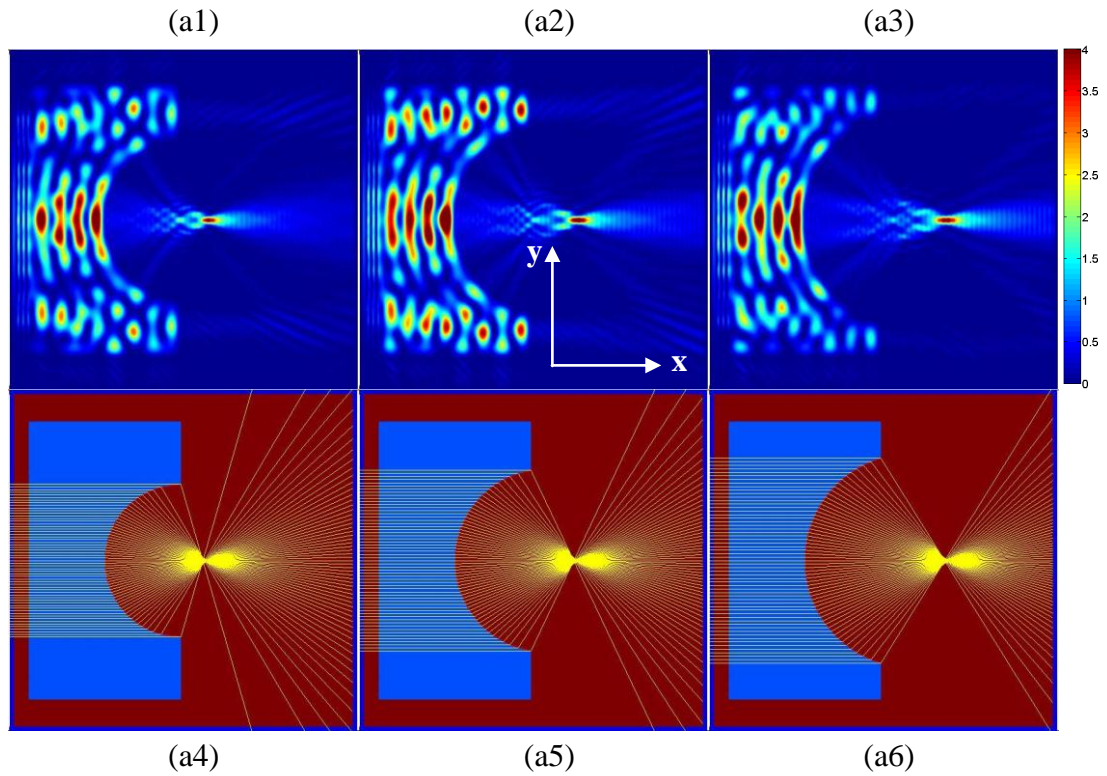


圖 4-18 平凹透鏡(圓柱面)不同曲率半徑之成像強度圖及光線追跡圖，(a1)到(a3)

與(a4)到(a6)分別為 $R_0=R$, $R_0=\frac{6}{5}R$, $R_0=\frac{7}{5}R$

FDTD/ Ray-tracing	焦距 f [單位:波長]	縱向成像點大小 Δx [單位:波長]
圓錐曲面		
圓柱面 1 $R_0=R$	10.27/10.11	1.92/0.72
圓柱面 2 $R_0=6R/5$	12.27/10.68	2.09/0.74
圓柱面 3 $R_0=7R/5$	14.25/11.26	2.33/0.75

表 4-1 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(圓柱面)

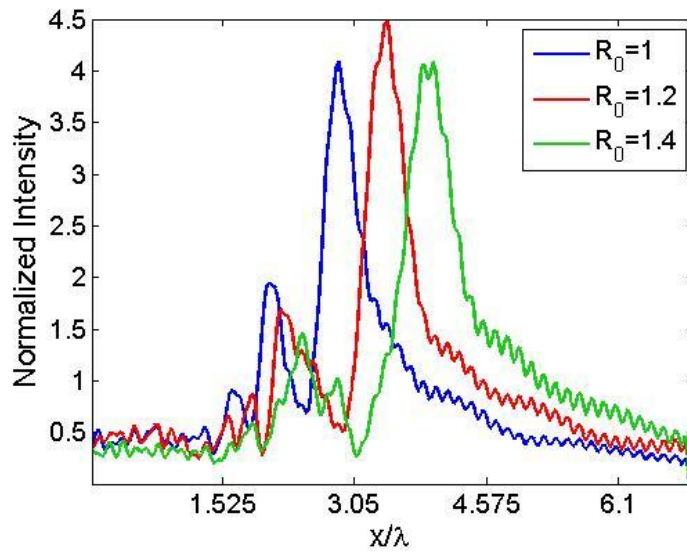


圖 4-19 平凹透鏡(圓柱面)不同曲率半徑 R_0 對應之 x 方向強度分布圖

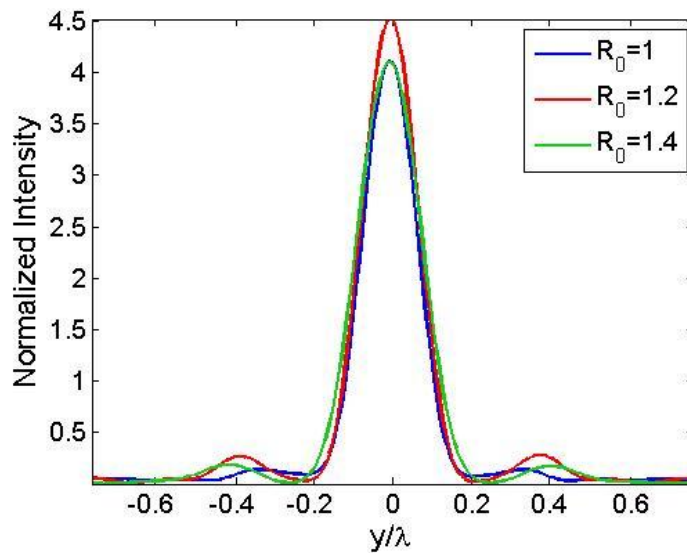


圖 4-20 平凹透鏡(圓柱面)不同曲率半徑 R_0 對應之 y 方向強度分布圖

以圖 4-15(a1)的曲率半徑 $R_0=R$ 為基準，分別取 1.2 與 1.4 倍的大小來做成像品質的比較。為維持透鏡最薄處的厚度不變，曲率中心的位置會隨著半徑增加而往外移，也因此聚焦的位置跟著向右移動，使焦距 f 變長。

4.3.2 直橢圓面

直橢圓面固定半短軸大小 $b=R$ ，以增加半長軸 a 的方式改變曲面焦距 f_0 。

三者具有 $b^2 + f_0^2 = a^2$ 的關係式。

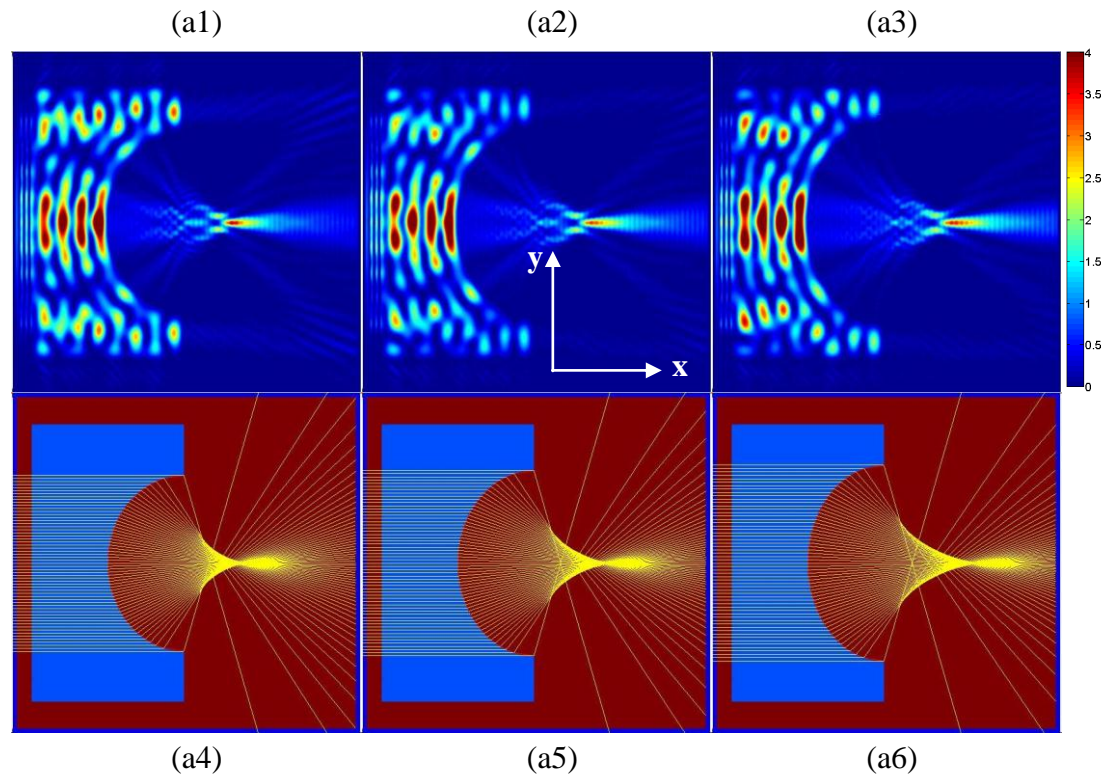


圖 4-21 凹透鏡(直橢圓面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖，(a1)到(a3)與(a4)

到(a6)分別為 $f_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} R$, $f_0 = \frac{6}{5\sqrt{3}} R$, $f_0 = \frac{7}{5\sqrt{3}} R$

FDTD/ Ray-tracing	焦距 f [單位:波長]	縱向成像點大小 Δx [單位:波長]
圓錐曲面		
直橢圓面 1 $f_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} R$	12.30/12.02	3.46/3.87
直橢圓面 2 $f_0 = \frac{6}{5\sqrt{3}} R$	13.26/12.90	4.20/5.19
直橢圓面 3 $f_0 = \frac{7}{5\sqrt{3}} R$	14.27/13.92	4.31/6.77

表 4-2 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(直橢圓面)

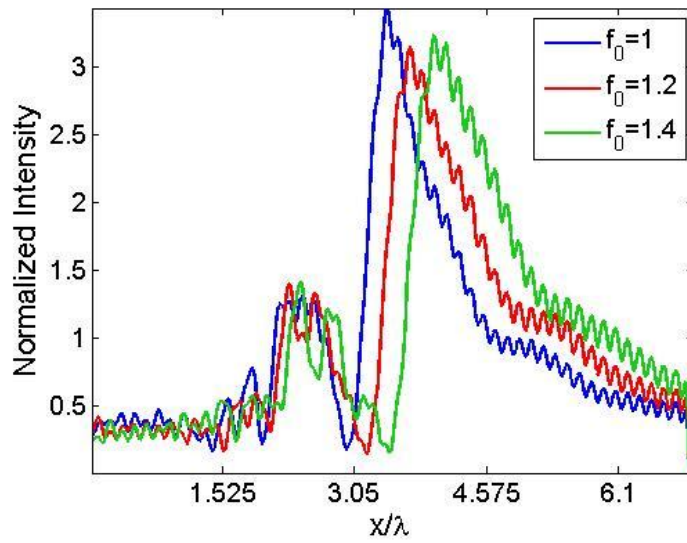


圖 4-22 平凹透鏡(直橢圓面) 不同焦距 x 方向強度分布圖

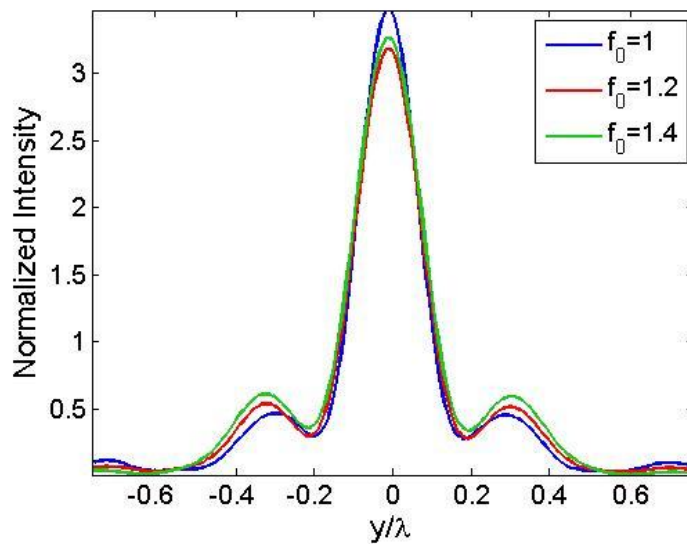


圖 4-23 平凹透鏡(直橢圓面) 不同焦距 y 方向強度分布圖

直橢圓面模擬結果與圓柱面類似，縱向強度分布與側向強度分布皆有極大的一致性。當曲面焦距 f_0 最短時，對應到強度最大值。

4.3.3 橫橢圓面

橫橢圓面固定半長軸大小 $a=R$ ，以減少半短軸 b 的方式使曲面焦距 f_0 增加。三者具有 $b^2 + f_0^2 = a^2$ 的關係式。又由於橢圓的縱軸與 x 軸重疊，當曲面焦距 f_0 增加時，會使成像點愈接近透鏡。

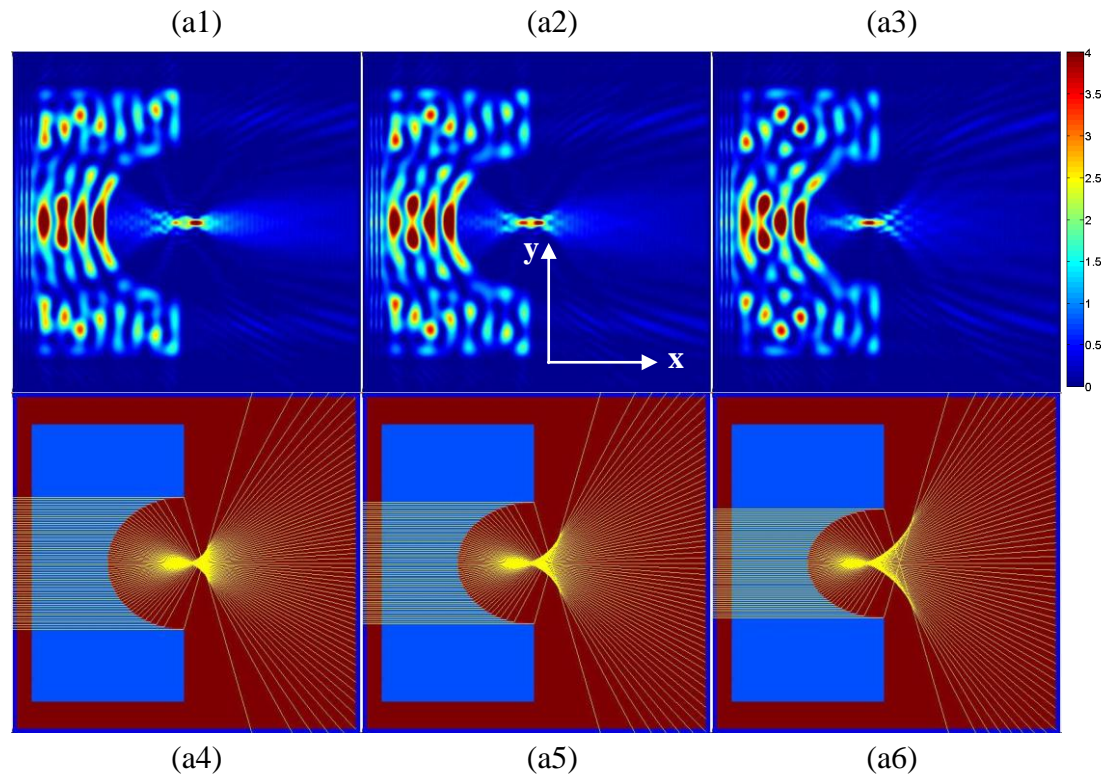


圖 4-24 平凹透鏡(橫橢圓面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖，(a1)到(a3)與 (a4)到(a6)關係分別為 $f_0 = \frac{1}{2}R$, $f_0 = \frac{3}{5}R$, $f_0 = \frac{7}{10}R$

圓錐曲面 \ FDTD/ Ray-tracing	焦距 f [單位:波長]	縱向成像點大小 Δx [單位:波長]
橫橢圓面 1 $f_0 = \frac{1}{2}R$	8.76/8.61	1.35/1.51
橫橢圓面 2 $f_0 = \frac{3}{5}R$	7.93/7.94	1.78/2.48
橫橢圓面 3 $f_0 = \frac{7}{10}R$	6.23/7.09	2.47/3.50

表 4-3 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(橫橢圓面)

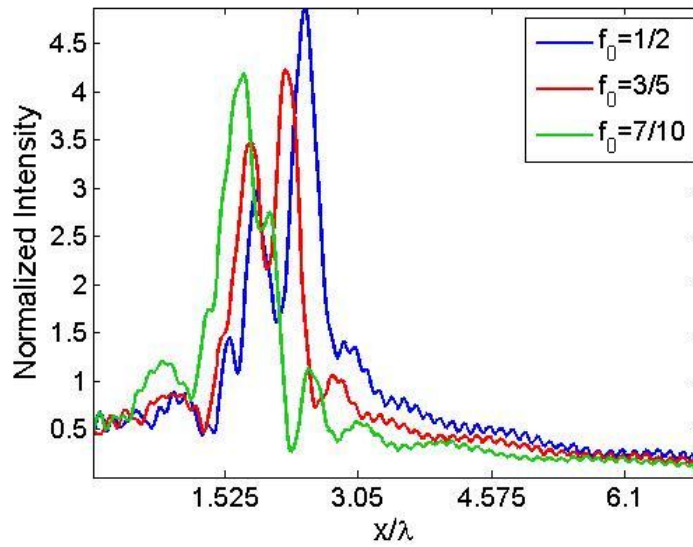


圖 4-25 平凹透鏡(橫橢圓面) 不同焦距 x 方向強度分布圖

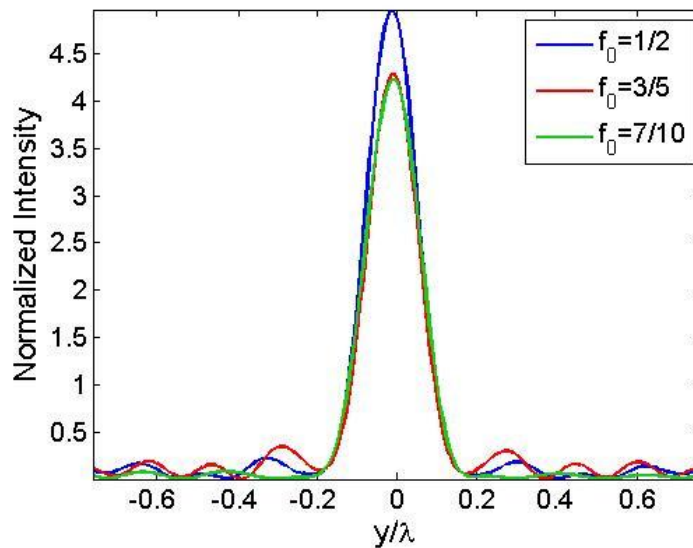


圖 4-26 平凹透鏡(橫橢圓面) 不同焦距 y 方向強度分布圖

橫橢圓曲面焦距為 $0.5R$ 時，出現了一強一弱的兩個縱向像點；當曲面焦距增加到 $0.6R$ 時，兩個像點的強度越來越接近；而增至 $0.7R$ 時則由強度較強的像點吞噬掉較弱的，融合成一個較寬的像點。

4.3.4 拋物面

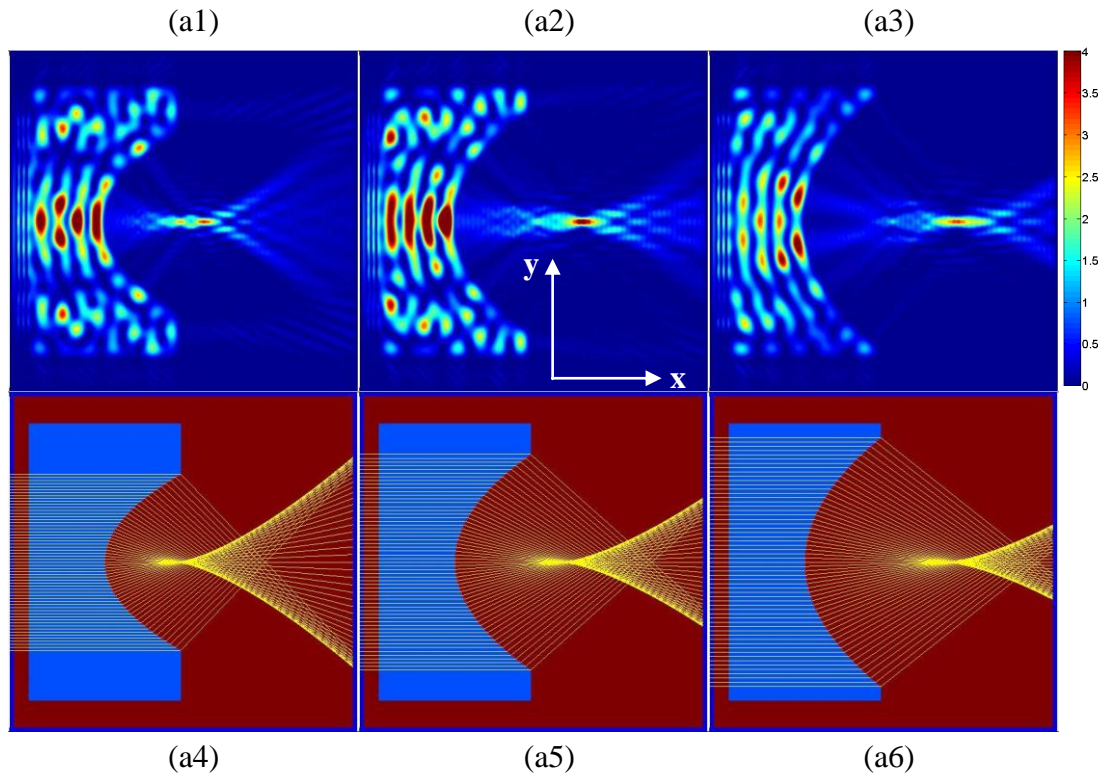


圖 4-27 平凹透鏡(拋物面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖，(a1)到(a3)與(a4)

到(a6)分別為 $f_0 = \frac{R}{3}$, $f_0 = \frac{R}{2}$, $f_0 = \frac{2R}{3}$

FDTD/ Ray-tracing	焦距 f [單位:波長]	縱向成像點大小 Δx [單位:波長]
圓錐曲面		
拋物面 1 $f_0 = \frac{R}{3}$	9.83/11.47	2.31/8.99
拋物面 2 $f_0 = \frac{R}{2}$	12.76/15.03	2.53/9.12
拋物面 3 $f_0 = \frac{2R}{3}$	15.26/18.56	5.74/9.21

表 4-4 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(拋物面)

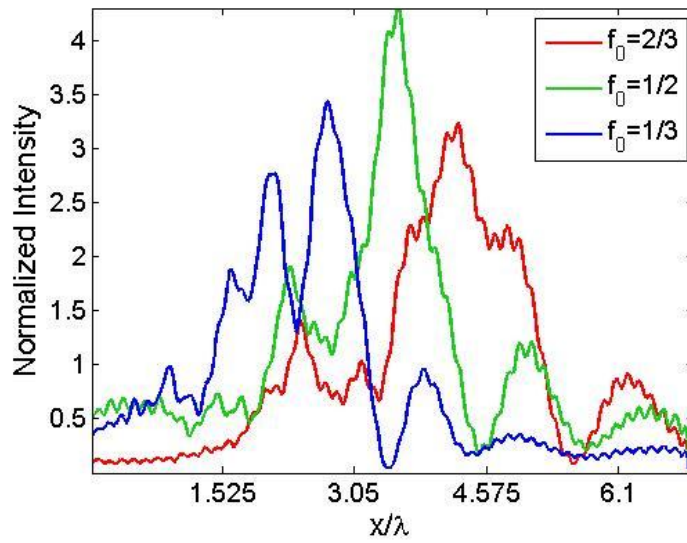


圖 4-28 平凹透鏡(拋物面) 不同焦距 x 方向強度分布圖

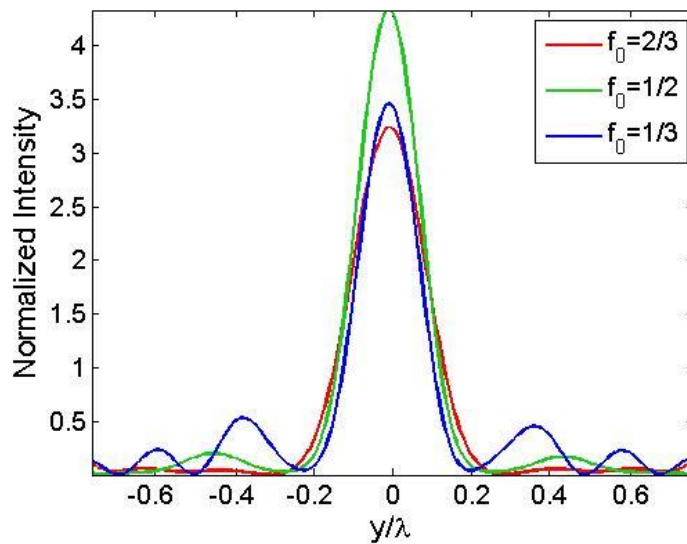


圖 4-29 平凹透鏡(拋物面) 不同焦距 y 方向強度分布圖

當拋物面焦距為 $R/3$ 時，出現了一強一弱的兩個縱向像點；當曲面焦距增至 $R/2$ 時，出現三者中的最大值；當曲面焦距繼續增加時，電場強度開始下降，縱向像點的寬度也逐漸增加。

4.3.5 雙曲面

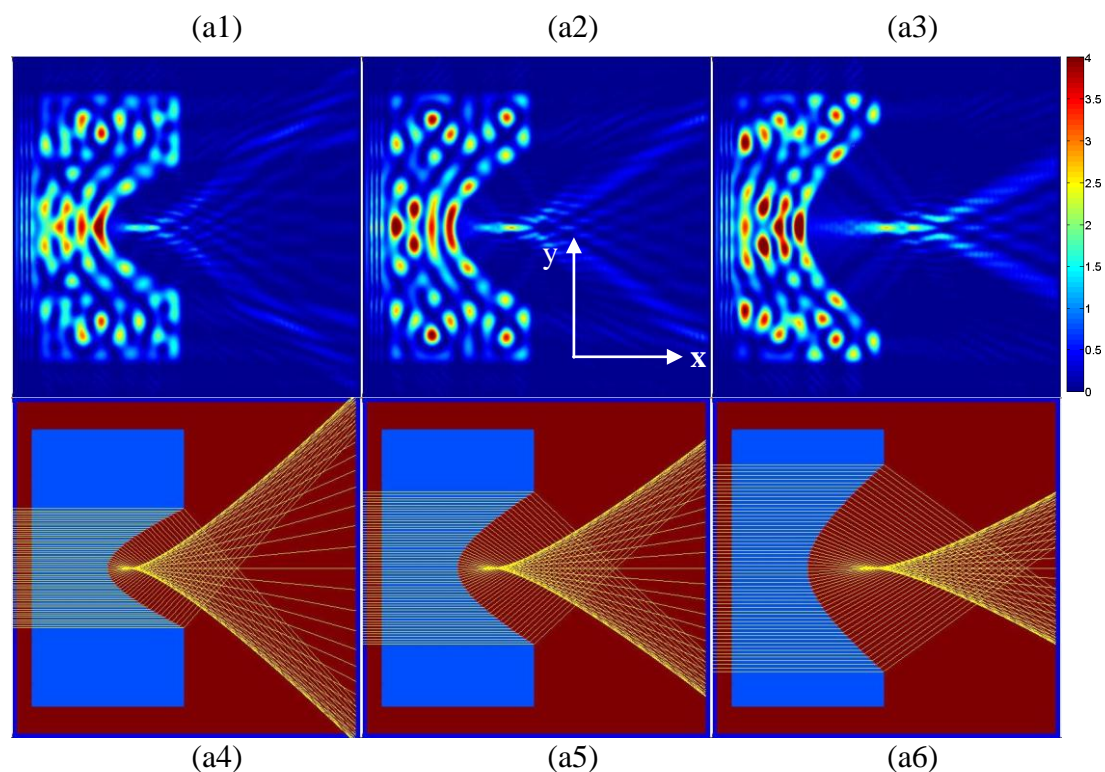


圖 4-30 平凹透鏡(雙曲面)不同焦距之成像強度圖及光線追跡圖，(a1)到(a3) (a4)

到(a6)分別為 $f_0 = \frac{19}{10\sqrt{3}}R$, $f_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}R$, $f_0 = \frac{11}{5\sqrt{3}}R$

FTTD/ Ray-tracing	焦距 f [單位:波長]	縱向成像點大小 Δx [單位:波長]
圓錐曲面		
雙曲面 1 $f_0 = \frac{19}{10\sqrt{3}}R$	4.36/7.48	1.84/10.70
雙曲面 2 $f_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}R$	5.33/9.59	2.64/12.19
雙曲面 3 $f_0 = \frac{11}{5\sqrt{3}}R$	7.80/14.05	1.95/15.26

表 4-5 FDTD 與光線追跡之焦距與像點大小比較(雙曲面)

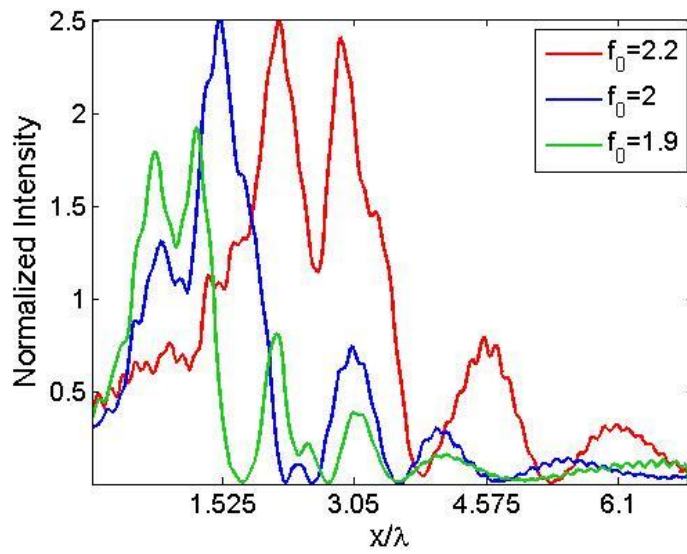


圖 4-31 平凹透鏡(雙曲面) 不同焦距 x 方向強度分布圖

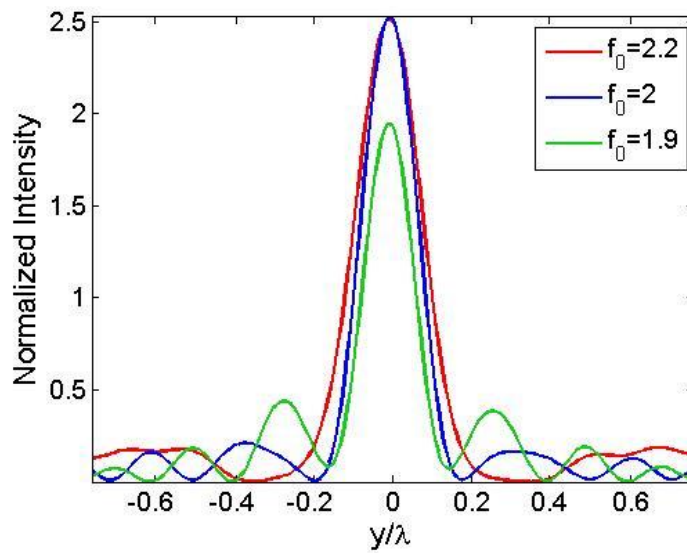


圖 4-32 平凹透鏡(雙曲面)不同焦距 y 方向強度分布圖

觀察電場強度圖可以發現雙曲面與拋物面相似，皆易產生較寬的縱向像點。
亦會出現兩個像點的情形。

下表針對所有模擬當中使用的圓錐曲面做實際聚焦位置 f 的誤差值比較：

編號	圓錐曲面	FDTD 模擬 焦距(A)[λ]	Ray-Tracing 預測焦距(B)[λ]	誤差百分比 (A-B)/A[%]	側向像寬 Δy [λ]
1	圓柱面 1	10.27	10.11	1.56	0.58
2	圓柱面 2	12.27	10.68	12.96	0.58
3	圓柱面 3	14.25	11.26	20.98	0.69
4	直橢圓 1	12.3	12.02	2.28	0.6
5	直橢圓 2	13.26	12.90	2.71	0.71
6	直橢圓 3	14.27	13.92	2.45	0.71
7	橫橢圓 1	8.76	8.61	1.71	0.55
8	橫橢圓 2	7.93	7.94	0.13	0.55
9	橫橢圓 3	6.23	7.09	13.80	0.58
10	拋物面 1	9.83	11.47	16.68	0.63
11	拋物面 2	12.76	15.03	17.79	0.66
12	拋物面 3	15.26	18.56	21.63	0.77
13	雙曲面 1	4.36	7.48	71.56	0.52
14	雙曲面 2	5.33	9.59	79.92	0.58
15	雙曲面 3	7.8	14.05	80.13	0.69

表 4-6 FDTD 與光線追跡之焦距誤差百分比之綜合比較

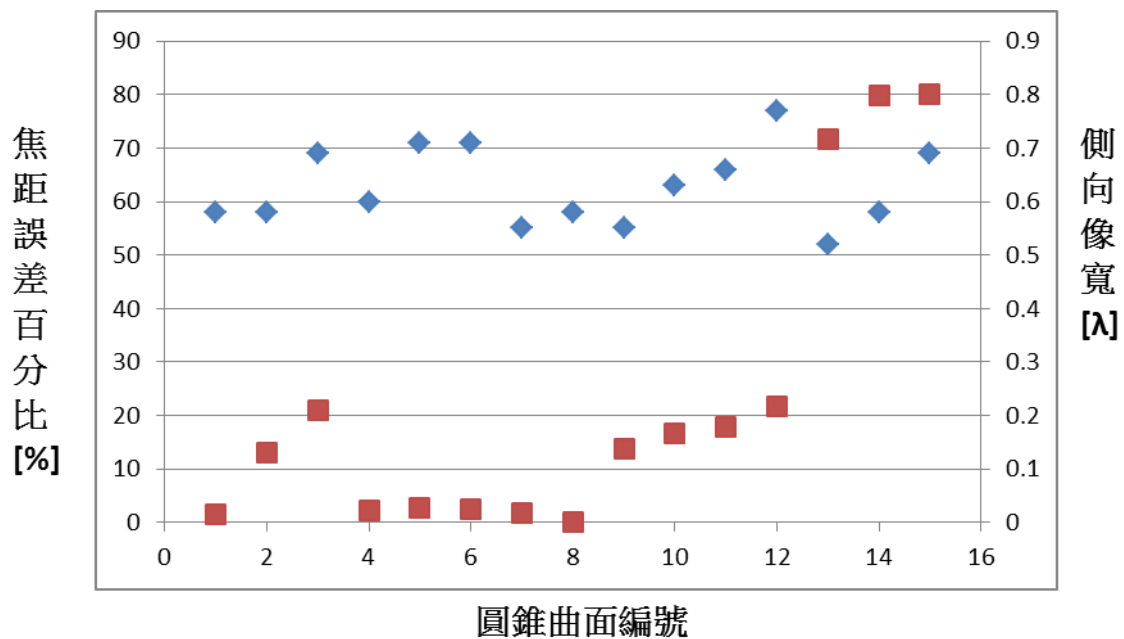


圖 4-33 不同圓錐曲面與對應焦距 f 誤差百分比及側向成像大小之比較

由圖 4-33 可知，以光線追跡的方式預測焦距 f 的距離，較適用於直橢圓面與橫橢圓面的情形，與 FDTD 模擬結果平均誤差小於 4%，圓柱面平均誤差小於 12%，而拋物面的誤差則落在 20% 之內，又以雙曲面誤差值最大，誤差高達 80%。

第五章 結論與未來展望

由上一章節中的模擬結果可知，非球面表面能將成像點大小縮在一定尺度之內(小於一個波長)，不同圓錐曲面中，又以橢圓面的聚焦位置與光線追跡的預測最為接近，誤差小於 4%，一般圓柱面誤差情形則在 12%左右，雙曲面誤差最大達 80%。此處取用前一章節波動與幾何光學預測最接近的橫橢圓 2 數據，在聚焦處 7.93λ 放入空氣柱二維三角晶格光子晶體波導 (PCW)，並以落在負折射範圍內的頻率 0.305 作為入射頻率，背景為介電係數為 $\epsilon_b = 12.96$ ，圓柱及平凹透鏡內皆填充空氣。

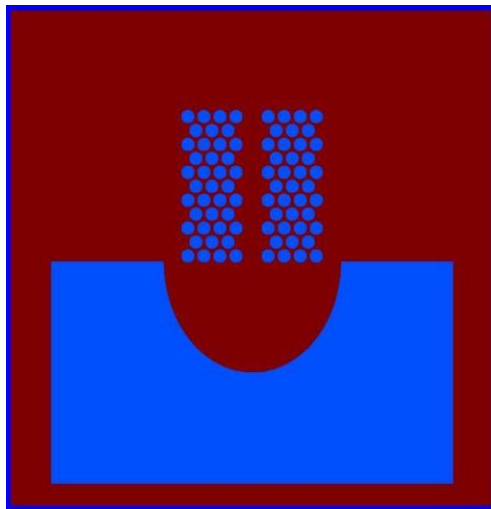


圖 5-1 橫橢圓面平凹透鏡與二維三角晶格光子晶體波導結構示意圖

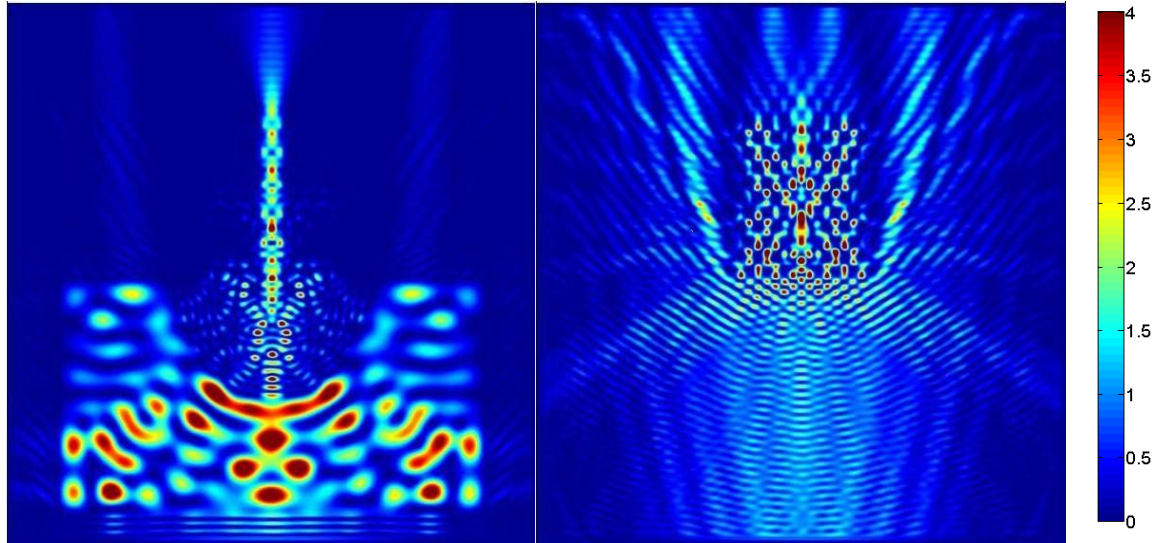


圖 5-2 左圖為橢圓面空氣平凹透鏡有效將入射波耦合進入 PCW 之中

右圖為移除透鏡後，平面波直接入射 PCW 的電場強度分布

由圖 5-2 可知，橫橢圓面平凹空氣透鏡能有效將光強耦合進入光子晶體波導當中，大幅減低移除透鏡後產生之光強溢散情形，進而作為光學耦合器之用。同時，如同光子晶體平凹透鏡，平凹空氣透鏡亦具有拉近焦距、節省整體光學系統體積的優點。

光子晶體透鏡，填充空氣柱或介電質柱的差異在於透鏡內介質的連續性，若為介電質塊材上挖空氣柱的情形，連續性較佳，且當尺度為小於 1 μ m 的微米結構時，挖洞較易製造；而在空氣中排介電質柱的情形，透鏡內部連續性較差，尺度小的機構上，排柱子較難製造；而在尺度為 1cm 較大的範圍時，兩者在製造上的差異則不大。

空氣透鏡的結構簡單，藉由讓光從背景介質傳播進入凹透鏡形狀的凹洞中（光密介質進入光疏介質），達到匯聚光線的效果。在背景與透鏡折射率落差極大的情形下，透鏡材質可以用其他折射率小的介質取代（如：水），作者希望藉由提出這個概念，並提供相關的數值分析，增加未來實際應用的可能性。

參考資料

- [1] <http://www.flickr.com/photos/54179321@N00/3290859609>
- [2] Sanders, J. V., “Colour of precious opal,” *Nature*, **204**, 1151 (1964).
- [3] Yablonovitch, E., “Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics,” *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 2059–2062 (1987).
- [4] John, S., “Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices,” *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 2486–2489 (1987).
- [5] Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N. & Meade, R. D., *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, 2nd ed. (Princeton Univ. Press, Princeton, 2008)
- [6] Blanco, A., Chomski E., Grabtchak S., Ibsate M., John S., Leonard S. W., Lopez C., Meseguer F., Miguez H., Mondia J. P., Ozin G. A., Toader O., van Driel H. M., “Large-scale synthesis of a silicon photonic crystal with a complete three-dimensional bandgap near 1.5 micrometres,” *Nature*, **405**, 437–440 (2000).
- [7] Grbic, A., Eleftheriades, G. V., “Overcoming the Diffraction Limit with a Planar Left-handed Transmission-line Lens,” *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 117403 (2004).
- [8] 樂丕綱、陳啓昌，光子晶體—從蝴蝶翅膀到奈米光子學，五南出版社 (2005)
- [9] Veselago, V. G., “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ,” *Sov. Phys. Uspekhi-USSR*, **10**, 509–514 (1968)
- [10] Chiang, C. -Y., and Luan, P. -G., “Imaging off-plane shear waves with a two-dimensional phononic crystal lens,” *J. Phys.: Condens. Matter*, **22**, 055405 (2010).
- [11] Yariv, A., Yeh, P., *Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation* (John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2003)
- [12] Wang, X. and Kempa, K., “Effects of disorder on subwavelength lensing in two-dimensional photonic crystal slabs”, *Phys. Rev. B*, **71**, 085101 (2005).
- [13] Xiao, S., Qiu, M., Ruan, Z., and He, S., “Influence of the surface termination to the point imaging by a photonic crystal slab with negative refraction”, *Appl. Phys. Lett.*, **85**, 4269 (2004).
- [14] <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wigner-Seitz-Zelle.png>
- [15] Notomi, M., “Theory of light propagation in strongly modulated photonic crystals: Refractionlike behavior in the vicinity of the photonic band gap”, *Phys. Rev. B*, **62**, 10696–10705 (2000).
- [16] <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Image:Yee-cube.png>
- [17] 林振華編譯，電磁場與天線分析—使用時域有限差分法，全華圖書公司 (1999)
- [18] 游政峰，「光子晶體異常折射之研究」，國立中央大學，碩士論文 (2005)

- [19] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., Jeffrey A., "Table of Integrals, Series, and Products", 5th ed. (Academic Press, 1994)
- [20] Vodo, P., Lu, W. T., Huang, Y., Sridhar, S., "Negative refraction and plano-concave lens focusing in one-dimensional photonic crystals", *Appl. Phys. Lett.*, **89**, 084104 (2006).
- [21] Yang, S. -Y., Hong, C. -Y., Yang, H. -C., "Focusing concave lens using photonic crystals with magnetic materials", *J. Opt. Soc. Am. A*, **Vol. 23**, No. 4, 956-959 (2006).
- [22] Zhou, R., Chen, X., Lu, W., "Negative refractive behavior of a two-dimensional negative-index photonic crystals using a wave vector diagram method", *Solid State Communications*, **139**, 345–350 (2006)
- [23] Haxha, S., AbdelMalek, F., "A Novel Design of Photonic Crystal Lens Based on Negative Refractive Index", *PIERS Online*, **Vol. 4**, No. 2, 296-300 (2008).
- [24] Luan, P. -G., Chang, K. -D., "Photonic-crystal Lens Coupler Using Negative Refraction", *PIERS Online*, **Vol. 3**, No. 1, 91-95 (2007).