

投稿類別：自然領域

篇名：

河內塔多根柱探討

作者：

諶 靚。花蓮縣立壽豐國中。九年智班

李 婕。花蓮縣立壽豐國中。九年智班

李凱恩。花蓮縣立壽豐國中。九年智班

孫佳萱。花蓮縣立壽豐國中。九年智班

指導老師：

陳錦松老師

壹●前言

一、研究動機

我們在看了「猩球崛起¹」這部電影時看到一隻名叫「亮眼」的猩猩，正在使用河內塔測牠的智商，而我們很好奇那個叫座河內塔的東西為甚麼可以用來測智商。「亮眼」排4個圓盤時，用了20步，研究人員說滿分是15步。這引起了我們的興趣，原來河內塔可以用來考試啊。我們就在想，那第一個玩河內塔的人，或沒玩過河內塔的人，怎麼知道自己有走出了最少的步數？如果把可移動的柱子增加，最少的步數會不會有差別？

二、名詞解釋

1883年，一位法國的數學家 Edouard Lucas 教授在歐洲的一份雜誌上介紹了一個遊戲。這個遊戲名為河內塔² (Tower of Hanoi)，越南有一座神廟，從天神創世紀起，就在神廟地底的中心處立了三根鑽石的針，一根針上串了64個用金子鑄成的圓片，自上而下圓片就越來越大，神廟的僧侶按照由上而下由小而大，一次搬運一個圓片的方法，把這64個金圓片搬到第三根鑽石針上，據古代的傳聞，移動這六十四個金圓片有個規定：大盤不可放在小盤上，一次只能拿起1個金圓片，套在另一根細柱後才可以移動下一個金圓片。若將這六十四個金圓片自一根細柱全部移動到另一根細柱，而且不違反規定，則佛祖及眾神將再度降臨人世，天下太平，若一秒一步，這需要 $2^{64}-1$ 步，亦即18,466,744,073,709,551,615秒，縱使僧侶毫不犯錯，也得花個5849億年才能搬得完。

¹ 《猩球崛起》是1968年的美國科幻片《人猿星球》系列的重拍版，2001年的《決戰猩球》也是《人猿星球》的重拍版。〈註三〉

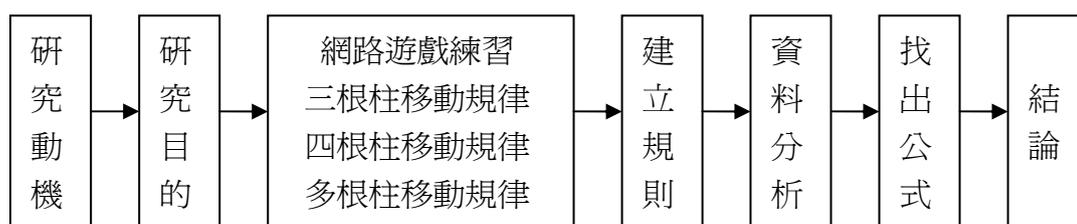
² 〈河內塔的起源〉，九章出版社。〈註一〉

三、研究目的

我們想幫神廟僧侶們一把，如果遊戲的規定與方法不變，但我們把柱子增為4根或5根柱甚至是多根柱，那是否可以節省一些移動的步數與時間？

四、研究方法與架構

河內塔基本架構是有三根柱子，柱子上有大小不同的盤子。遊戲規定一次只能拿起一個盤子，而且小盤一定要在大盤上。遊戲的最終目標是把所有的圓盤，都移到與開始不同的另一根柱子上。我們先把三根柱的走法與規律完成，之後再找出四根柱，五根柱，六根柱，多根柱的規律。



貳●正文

一、三根柱的規律

我們發現要完成河內塔的遊戲，有其規律性。例如要完成5盤的遊戲，必需先完成4盤，要完成4盤，需先完成3盤，要完成2盤，需先完成1盤。因此，5盤最少步數是由4盤步數乘2再加1；4盤最少步數是3盤最少步數乘2再加1，依此類推。



(圖一) 三根柱有其移動的規律 (來源：本小組網路螢幕複製編輯³)

³ 河內之塔網路遊戲，<http://home.educities.edu.tw/oddest/math181.htm> 〈註四〉

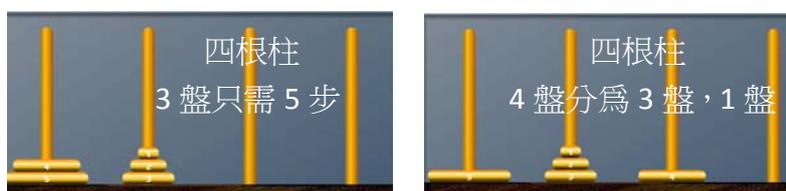
(表一) 河內塔三根柱的規律 (來源: 本小組整理)

盤 數	1	2	3	4	5	6
最少步數	1	3	7	15	31	63
步 數 差	1	2	4	8	16	32
規律性 1	1	1+2	1+2+4	1+2+4+8	1+2+4+8+16	1+2+4+8+16+32
規律性 2	1	1*2+1	3*2+1	7*2+1	15*2+1	31*2+1
規律性 3	2^1-1	2^2-1	2^3-1	2^4-1	2^5-1	2^6-1

由上表發現，三根柱的移動規律有三種。但大家熟知的三根柱最少步數是規律3的公式。但我們發現，要推導出四根柱及五根柱的最少步數，需要利用規律1的步數差之和及前盤最少步數乘2再加1的規律2。

二、四根柱的規律

四根柱的遊戲也有其規律性，我們發現需要的步數有明顯的減少，原因為多一根柱，就可以將圓盤分在2根柱上，不同於三根柱只能將圓盤放在一根柱上。例如要完成5盤的遊戲，就不需要先完成4盤，可以先將4盤分成3盤和1盤，而四根柱的3盤只需5步即可完成，所以5盤的步數只需 $5*2+1*2+1=13$ 步。



(圖二) 四根柱有分盤的規律能找出最少步數 (來源: 本小組網路螢幕複製編輯)



(圖三) 四根柱6盤最少步數的分法 (來源: 本小組網路螢幕複製編輯)

河內塔多根柱探討

(表二) 河內塔四根柱的規律 (來源: 本小組分析整理)

盤數	1	2	3	4	5	6	7	8
盤數最佳分法	0	1,0	1,1	2,1	3,1	3,2	3,3	4,3
最少步數	1	3	5	9	13	17	25	33
步數差	1	2	2	4	4	4	8	8

盤數	9	10	11	12	13	14	15	16
盤數最佳分法	5,3	6,3	6,4	7,4	8,4	9,4	10,4	10,5
最少步數	41	49	65	81	97	113	129	161
步數差	8	8	16	16	16	16	16	32

盤數	17	18	19	20	21	22	23	24
盤數最佳分法	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	15,6	16,6	17,6
最少步數	193	225	257	289	321	385	449	513
步數差	32	32	32	32	32	64	64	64

盤數	25	26	27	28	29	30	31	32
盤數最佳分法	18,6	19,6	20,6	21,6	21,7	22,7	23,7	24,7
最少步數	577	641	705	769	897	1025	1153	1281
步數差	64	64	64	64	128	128	128	128

盤數	33	34	35	36	37	38	39	40
盤數最佳分法	25,7	26,7	27,7	28,7	28,8	29,8	30,8	31,8
最少步數	1409	1537	1665	1793	2049	2305	2561	2817
步數差	128	128	128	128	256	256	256	256

盤數	41	42	43	44	45	46	47	48
盤數最佳分法	32,8	33,8	34,8	35,8	36,8	36,9	37,9	38,9
最少步數	3073	3329	3585	3841	4097	4609	5121	5633
步數差	256	256	256	256	256	512	512	512

盤數	49	50	51	52	53	54	55	56
盤數最佳分法	39,9	40,9	41,9	42,9	43,9	44,9	45,9	45,10
最少步數	6145	6657	7169	7681	8193	8705	9217	10241
步數差	512	512	512	512	512	512	512	1024

盤數	57	58	59	60	61	62	63	64
盤數最佳分法	46,10	47,10	48,10	49,10	50,10	51,10	52,10	53,10
最少步數	11265	12289	13313	14337	15361	16385	17409	18433
步數差	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024

三、五根柱的規律

五根柱的遊戲也和四根柱一樣有其規律性，多2根柱可分盤，我們發現需要的步數減少更多。例如要完成7盤的遊戲，就不需要像三根柱要先完成6盤，可以先將6盤分成4盤、1盤和1盤，而五根柱的4盤只需7步即可完成，另2盤，各需1步，所以所需的步數為 $7*2+1*2+1*2+1=19$ 步，比四根柱的25步少了6步。三根柱的 $2^7-1=127$ 步少108步。



(圖四) 五根柱7盤最少步數的分法 (來源：本小組網路螢幕複製編輯)

(表三) 河內塔五根柱的規律 (來源：本小組分析整理)

盤 數	1	2	3	4	5	6	7	8
盤數最佳分法	0	1,0,0	1,1,0	1,1,1	2,1,1	3,1,1	4,1,1	4,2,1
最少步數	1	3	5	7	11	15	19	23
步數差	1	2	2	2	4	4	4	4

盤 數	9	10	11	12	13	14	15	16
盤數最佳分法	4,3,1	4,3,2	5,3,2	6,3,2	7,3,2	8,3,2	9,3,2	10,3,2
最少步數	27	31	39	47	55	63	71	79
步數差	4	4	8	8	8	8	8	8

盤 數	17	18	19	20	21	22	23	24
盤數最佳分法	10,4,2	10,5,2	10,6,2	10,6,3	11,6,3	12,6,3	13,6,3	14,6,3
最少步數	87	95	103	111	127	143	159	175
步數差	8	8	8	8	16	16	16	16

河內塔多根柱探討

盤數	25	26	27	28	29	30	31	32
盤數最佳分法	15,6,3	16,6,3	17,6,3	18,6,3	19,6,3	20,6,3	20,7,3	20,8,3
最少步數	191	207	223	239	255	271	287	303
步數差	16	16	16	16	16	16	16	16

盤數	33	34	35	36	37	38	39	40
盤數最佳分法	20,9,3	20,10,3	20,10,4	21,10,4	22,10,4	23,10,4	24,10,4	25,10,4
最少步數	319	335	351	383	415	447	479	511
步數差	16	16	16	32	32	32	32	32

盤數	41	42	43	44	45	46	47	48
盤數最佳分法	26,10,4	27,10,4	28,10,4	29,10,4	30,10,4	31,10,4	32,10,4	33,10,4
最少步數	543	575	607	639	671	703	735	767
步數差	32	32	32	32	32	32	32	32

盤數	49	50	51	52	53	54	55	56
盤數最佳分法	34,10,4	35,10,4	35,11,4	35,12,4	35,13,4	35,14,4	35,15,4	35,15,5
最少步數	799	831	863	895	927	959	991	1023
步數差	32	32	32	32	32	32	32	32

盤數	57	58	59	60	61	62	63	64
盤數最佳分法	36,15,5	36,16,5	37,16,5	38,16,5	39,16,5	40,16,5	41,16,5	42,16,5
最少步數	1087	1151	1215	1279	1343	1407	1471	1535
步數差	64	64	64	64	64	64	64	64

參●結論

我們發現，每多一根柱，就會多一個分盤的機會，這樣會讓最少的步數減少得很快。以 64 盤的遊戲，移動一盤需 1 秒，經過我們的計算，三根柱需 5849 億年；四根柱就減少成 188433 秒，共計 5 小時 7 分又 13 秒；而五根柱只需 1535 秒，竟然只需要花 25 分 35 秒。我們也找出了多根柱的規律，發現每多一盤的步

數差，有 2 的次方變化與規律。其 2 的次方步數差分析製表如下：

(表四) 河內塔多根柱的規律 (來源：本小組分析整理)

步數差數 (個) 柱 數	1 步	2 步	4 步	8 步	16 步	32 步	64 步	128 步	256 步	512 步	1024 步
三根柱	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
四根柱	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
五根柱	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
六根柱	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
七根柱	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
八根柱	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
九根柱	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
十根柱	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448

上表說明如下，以六根柱為例，1 步差整 1 個，2 步差有 4 個，4 步差有 10 個，8 步差有 20 個，16 步差有 35 個，32 步差有 56 個，依此類推。而步數差的個數，由兩個相鄰的數字和完成，如六根柱的 2 步差有 4 個是由 1+3 形成。由上表可知六根柱 64 盤所需的時間=1+4*2+10*4+20*8+29*16=673 秒，合計 11 分 13 秒。而七根柱 64 盤所需的時間=1+5*2+15*4+35*8+8*16=419 秒，合計 6 分 59 秒。依此類推，十根柱 64 盤所需的時間=1+8*2+36*4+19*8=313 秒，合計 5 分 13 秒。

我們發現，依 (表四) 的規律，就能夠找出多根柱的最少步數，而且只要擴充 (表四) 的規律，無論盤數多少，不用限定 64 盤，都能夠計算出來。我們的方法簡單方便，甚至比國內多根柱的相關研究⁴更易上手。我們要驗證最少步數是否真的如 (表四) 的規律，我們將六根柱的分盤方式及最少步數製表如下。

⁴ 〈柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係〉，44 屆高中科學展覽，22 頁。〈註二〉

(表五) 河內塔六根柱的規律 (來源: 本小組分析整理)

盤 數	1	2	3	4	5	6	7	8
盤數最佳分法	0	1,0,0,0	1,1,0,0	1,1,1,0	1,1,1,1	2,1,1,1	3,1,1,1	4,1,1,1
最少步數	1	3	5	7	9	13	17	21
步數差	1	2	2	2	2	4	4	4

有 4 個 2 步差

盤 數	9	10	11	12	13	14	15	16
盤數最佳分法	5,1,1,1	5,2,1,1	5,3,1,1	5,4,1,1	5,4,2,1	5,4,3,1	5,4,3,2	6,4,3,2
最少步數	25	29	33	37	41	45	49	57
步數差	4	4	4	4	4	4	4	8

有 10 個 4 步差

盤 數	17	18	19	20	21	22	23	24
盤數最佳分法	7,4,3,2	8,4,3,2	9,4,3,2	10,4,3,2	11,4,3,2	12,4,3,2	13,4,3,2	14,4,3,2
最少步數	65	73	81	89	97	105	113	121
步數差	8	8	8	8	8	8	8	8

盤 數	25	26	27	28	29	30	31	32
盤數最佳分法	15,4,3,2	15,5,3,2	15,6,3,2	15,7,3,2	15,8,3,2	15,9,3,2	15,10,3,2	15,10,4,2
最少步數	129	137	145	153	161	169	177	185
步數差	8	8	8	8	8	8	8	8

有 20 個 8 步差

盤 數	33	34	35	36	37	38	39	40
盤數最佳分法	15,10,5,2	15,10,6,2	15,10,6,3	16,10,6,3	17,10,6,3	18,10,6,3	19,10,6,3	20,10,6,3
最少步數	193	201	209	225	241	257	273	289
步數差	8	8	8	16	16	16	16	16

我們發現有 4 個 2 步差，10 個 4 步差，20 個 8 步差，和 (表四) 的規律相符，證明我們的推論正確。而 16 步差會有 35 個，限於篇幅，就不列出。

而圓盤數的最佳分法，有其規律性。以六根柱為例，可先將圓盤分為四堆，表格中第 1 個數字是六根柱的最少步數，第 2 個數字是五根柱的最少步數，第 3

個數字是四根柱的最少步數，第 4 個數字是三根柱的最步步數。搭配（表一）、（表二）及（表三）的步數差，在 5 盤時每根柱都可放 1 盤，只需 $2*4+1=9$ 步。因為六根柱有 4 個 2 步差，所以 6 盤至 9 盤，都可先增加六根柱的盤數至(5,1,1,1)。而 10 盤到 12 盤的部份則將盤數增加到五根柱的第 2 個數字至(5,4,1,1)，因為（表三）中五根柱有 3 個 2 步差；也因為四根柱（表二）有 2 個 2 步差，所以類推最佳分盤數至(5,4,3,1)的 14 盤分法；同理三根柱（表一），只有 1 個 2 步差，所以 15 盤的分法只能到(5,4,3,2)。分盤中共有 10 個 2 步差，但總步數需乘 2 加 1，所以在六根柱中會有 10 個 4 步差。

依此類推，盤數繼續增加，六根柱（表五）有 10 個 4 步差，五根柱（表三）有 6 個 4 步差，四根柱（表二）有 3 個 4 步差，三根柱（表一）有 1 個 4 步差，所以分盤中共有 $10+6+3+1=20$ 個 4 步差，同理乘 2 倍之後，六根柱就會有 20 個 8 步差。因此，15 盤至 35 盤的最佳分法，會從(5,4,3,2)依規律增至(15,10,6,3)。而五根柱與四根柱的最佳盤數分法，與六根柱的方法相同。

肆●引註資料

一、圖書資料

註一、〈河內塔的起源〉，九章出版社。

註二、〈柱咒毀滅—探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係〉，四十四屆中小學科學展覽（高中組）。

二、網路資料

註三、維基百科—猩球崛起

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%8C%BF%E4%BA%BA%E7%88%AD%E9%9C%B8%E6%88%B0%EF%BC%9A%E7%8C%A9%E5%87%B6%E9%9D%A9%E5%91%BD>

註四、河內之塔網路遊戲

<http://home.educities.edu.tw/oddest/math181.htm>