中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030402

河內塔問題

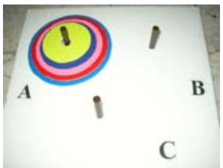
學校名稱：　苗栗縣立通霄國民中學

作者：	指導老師：
國一　古浩平	蕭淑汎
國一　張乃文	許宗誠

關 鍵 詞：線性函數、符號代表數、數列

作品名稱：河內塔

摘要：由 EdouArd LuCAs 提出的「河內塔問題」:一平面上豎著 A、B、C 三根木樁，其中的木樁 A 由上而下套著由小而大的 N 個相異的圓盤，如右圖：



假設我們想要將這幾個圓環由木樁 A 搬到木樁 C，而且搬動過程受到以下三項限制：一、一次只能搬動一個圓環。二、每次搬動都須由某根木樁搬到另一根木樁，圓環不能被暫時放到其他地方。三、對任何木樁上的任意兩個相疊的圓環而言，上面的圓環一定要比下面的圓環小。藉由這個基本的模型問題來推論出不同的變形問題，所以在下面的本文中介紹了四種推廣類型，而在推廣討論四的部分，由於時間的匆促，我們並沒有做出完整的推論，這是比較遺憾的部分，也希望藉此能引發更多的人對其餘不同的變形問題能做更深入的探討。

壹、研究動機

一開始，數學老師介紹我們閱讀「數學悠哉遊」這本書時，我們迫不及待掀開來看，在第一篇的第八小篇中，碰到一個有趣的問題。由 EdouArd LuCAs 提出的「河內塔問題」。

一平面上豎著 A、B、C 三根木樁，其中的木樁 A 由上而下套著由小而大的 N 個相異的圓盤，如下圖：

假設我們想要將這八個圓環由木樁 A 搬到木樁 C，而且搬動過程受到以下三項限制：

一、一次只能搬動一個圓環。

二、每次搬動都須由某根木樁搬到另一根木樁，圓環不能被暫時放到其他地方。

三、對任何木樁上的任意兩個相疊的圓環而言，上面的圓環一定要比下面的圓環小。

剛開始接處這個問題時，我們便對這個有趣的問題產生強烈的好奇心與想找到解答的求知慾，雖然這個問題已經有許多人研究過，但是我們還是希望藉由這個問題來推論不同的變形問題，挑戰自己對數字變化的極限，看看我們是否能夠克服難關，找出解答，研究成功，藉由科學展覽的機會將我們的研究成果，展現出來，和每個人分享，引發大家的共鳴，激發每個人的求知慾與好奇心，更進一步探索不同的謎題，找出解答，分享結果，拓展數學學習領域，讓學習無止盡。

貳、研究目的

一、找出「河內塔問題」的解答，並尋求其規律性。

二、利用該題型推至其它相關題型。

三、其次，利用討論的過程中，培養出面對數學問題時，能具有邏輯規律，但又能具有創造思維、具創意的思考模式，並瞭解分工合作以及團隊精神的重要性。

參、研究設備及器材

紙、筆、自製圓盤、數位相機。

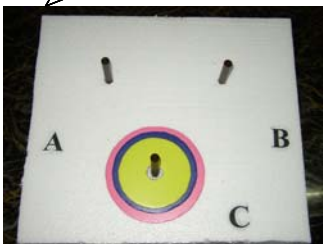
肆、研究過程或方法

在排列的過程中，因爲相同驟步的排列方法不只有一種，所以在此僅列出一種僅供參考。

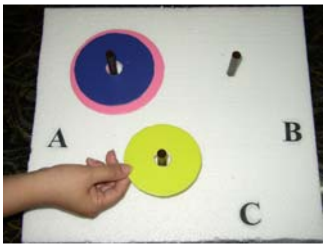
移動前

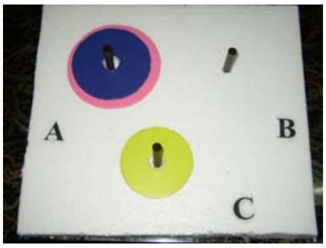
移動後

一．三個圓盤
（操作說明）
將三個圓盤依下列步驟移至三個木樁中的其中一根木樁

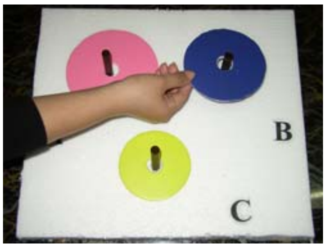


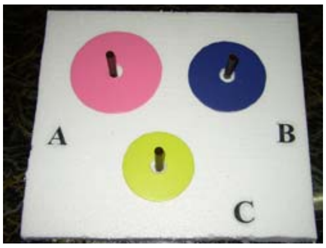
步驟一：淺綠圓盤至 C



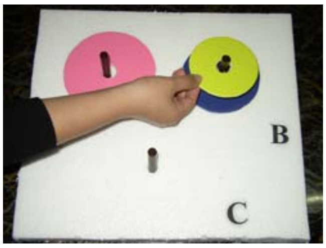


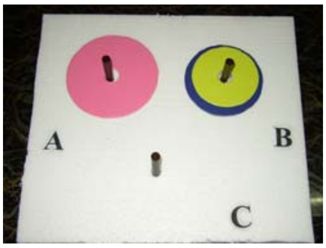
步驟二：深藍圓盤至 B



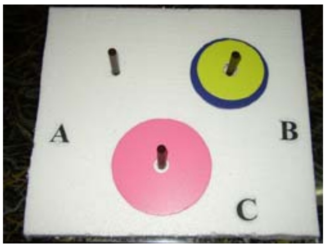


步驟三：淺綠圓盤至 B

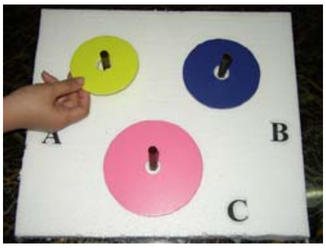


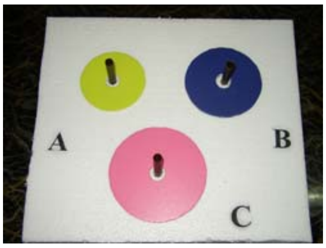


步驟四：粉紅圓盤 C

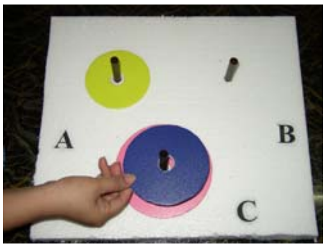


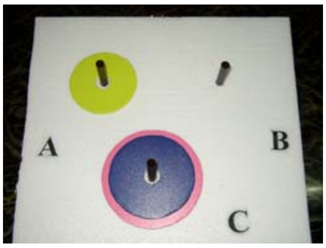
步驟五：淺綠圓盤至 A



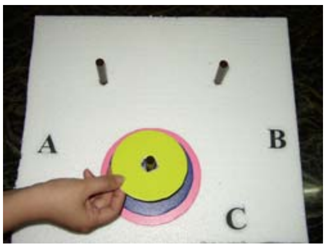


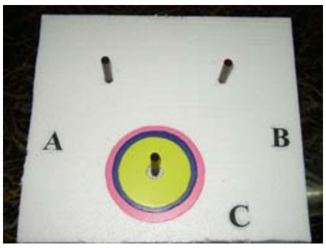
步驟六：深藍圓盤至 C





步驟七：淺綠圓盤至 C

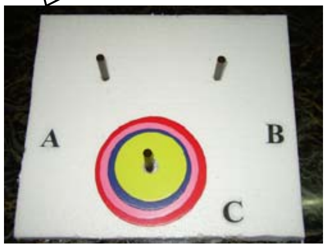




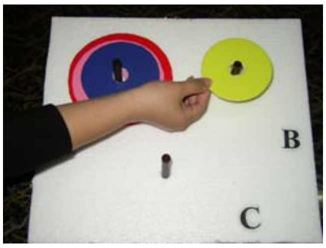
二、四個圓盤
（操作說明）
將四個圓盤依下列步驟移至三個木樁中的其中一根木樁

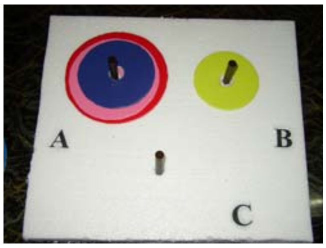
移動前

移動後

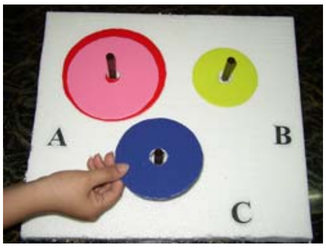


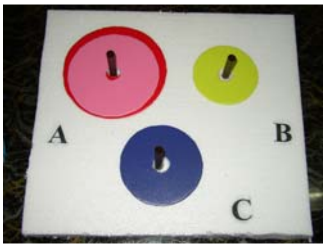
步驟一：淺綠圓盤至 B



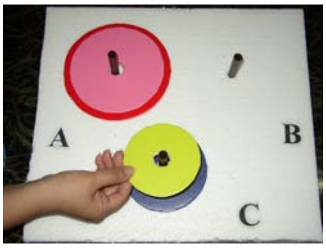


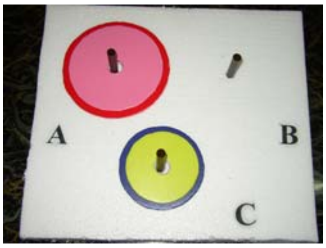
步驟二：深藍圓盤至 C



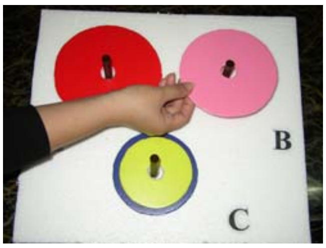


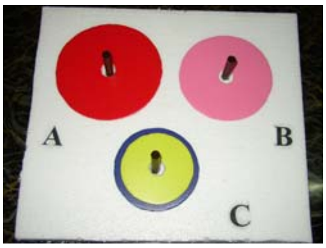
步驟三：淺綠圓盤至 C



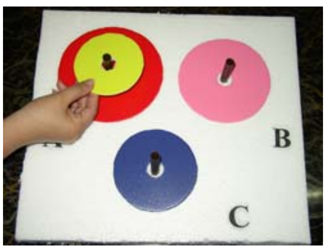


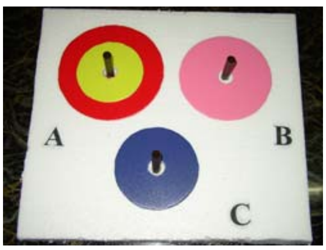
步驟四：粉紅圓盤至 B



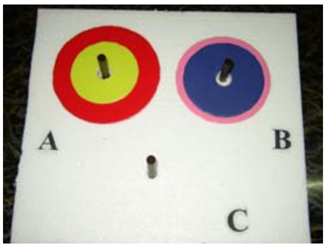


步驟五：淺綠圓盤至 A

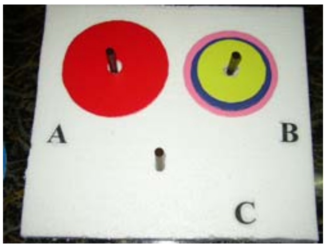




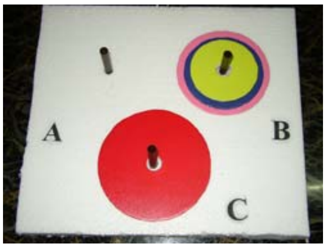
步驟六：深藍圓盤至 B



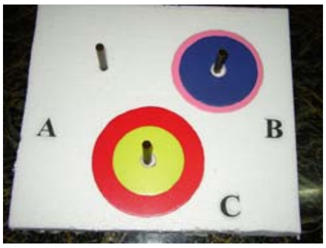
步驟七：淺綠圓盤至 B



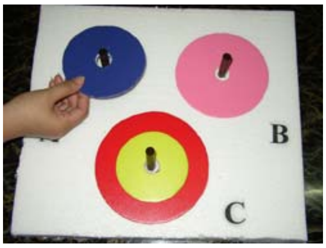
步驟八：紅圓盤至 C

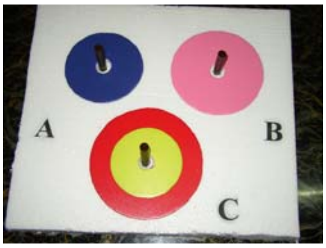


步驟九：淺綠圓盤至 C

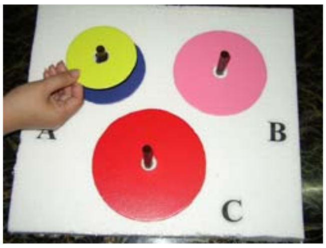


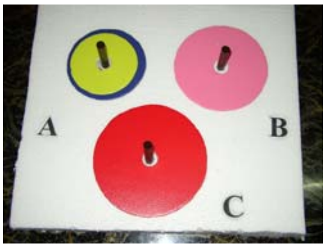
步驟十：深藍圓盤至 A



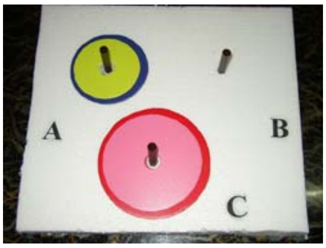


步驟十一：淺綠圓盤至 A

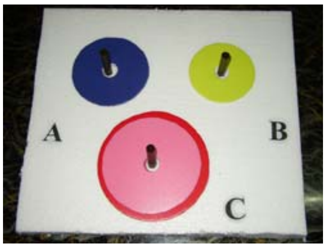




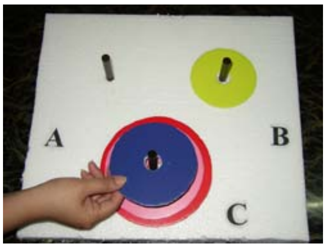
步驟十二：粉紅圓盤至 C

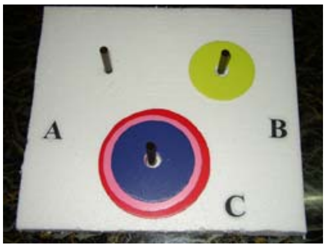


步驟十三：淺綠圓盤－B

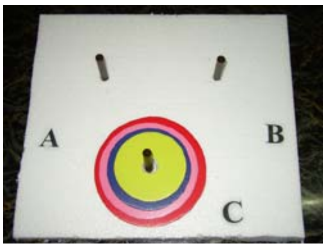


步驟十四：深藍圓盤至 C



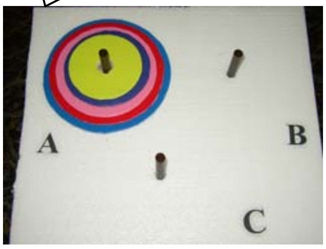


步驟十五：淺綠圓盤至 C



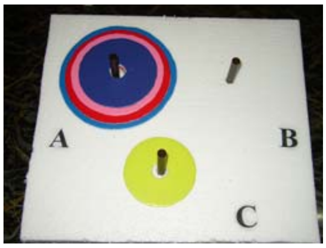
三・五個圓盤；
（操作說明）
將五個圓盤依下列步驟移至三個木樁中的其中一根木樁

移動前

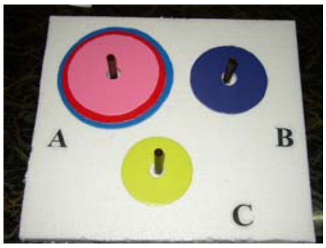


移動後

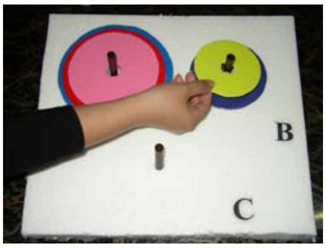
步驟一：淺綠圓盤至 C

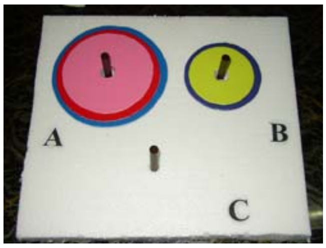


步驟二：深藍圓盤至 B

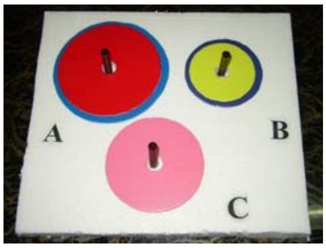


步驟三：淺綠圓盤至 B

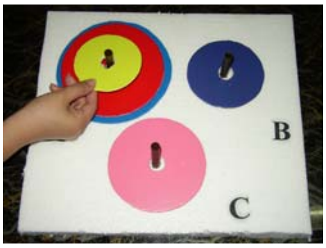


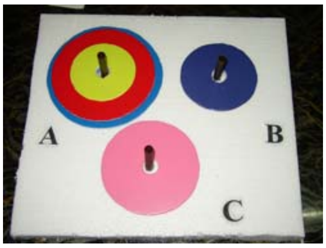


步驟四：粉紅圓盤至 C

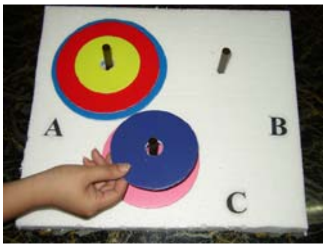


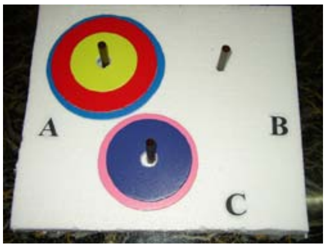
步驟五：淺綠圓盤至 A



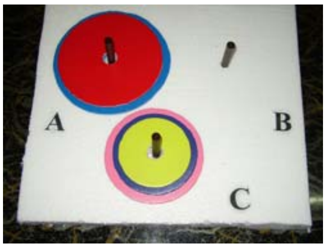


步驟六：深藍圓盤至 C

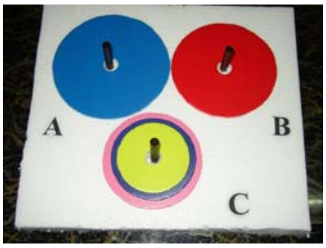




步驟七：淺綠圓盤至 C

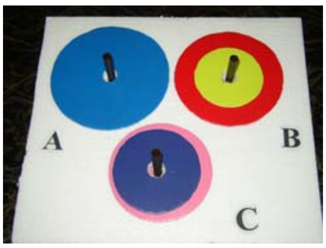


步驟八：紅圓盤至 B



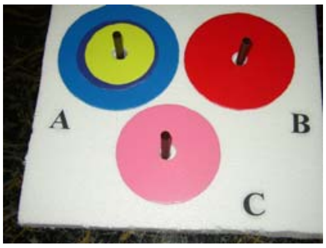
此時的步驟一至步驟八重複了三個圓盤的步驟一至步驟八。

步驟九：淺綠圓盤至 B

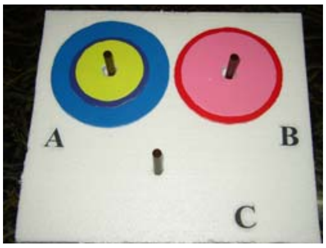


步驟十：深藍圓盤至 A

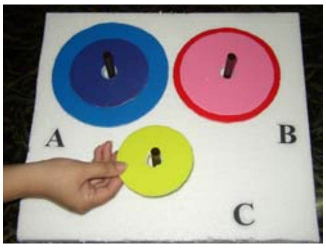
步驟十一：淺綠圓盤至 A

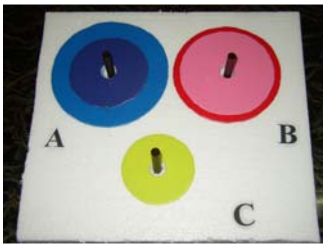


步驟十二：粉紅圓盤至 B

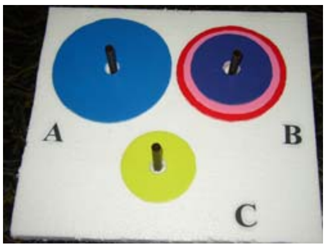


步驟十三：淺綠圓盤至 C

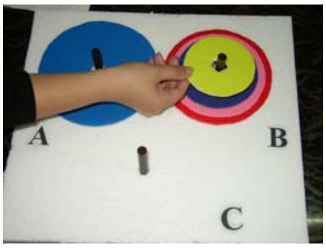


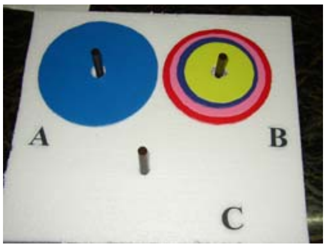


步驟十四：深藍圓盤至 B

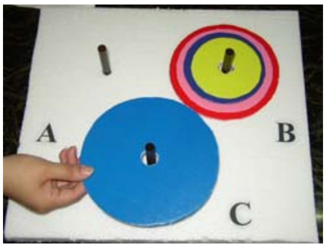


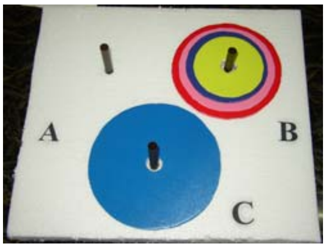
步驟十五：淺綠圓盤至 B



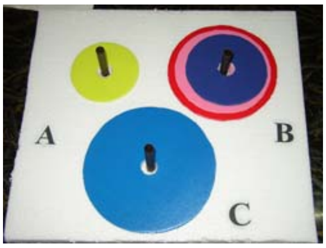


步驟十六：深藍圓盤至 C

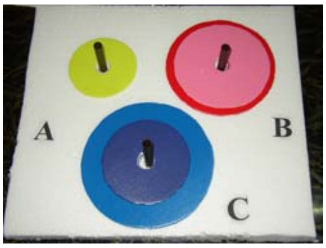




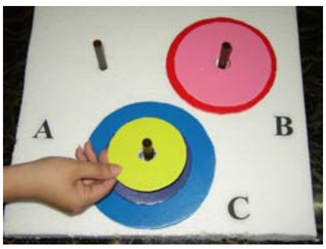
步驟十七：淺綠圓盤至 A

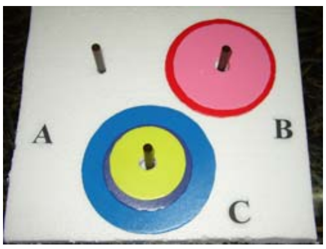


步驟十八：深藍圓盤至 C

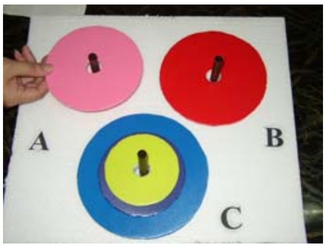


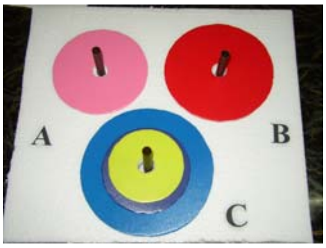
步驟十九：淺綠圓盤至 C



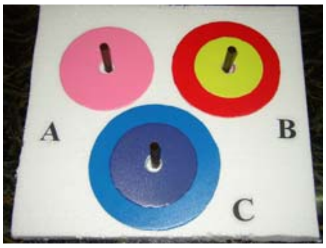


步驟二十：粉紅圓盤至 A

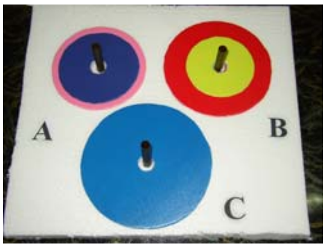




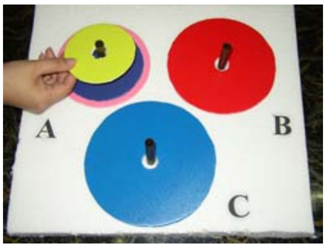
步驟二十一：淺綠圓盤至 B

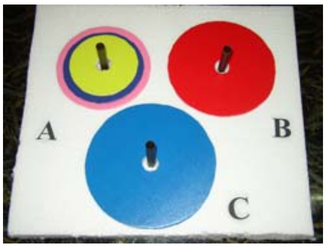


步驟二十二：深藍圓盤至 A

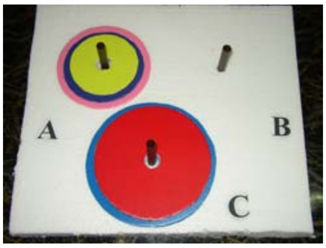


步驟二十三：淺綠圓盤至 A

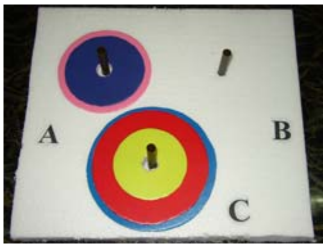




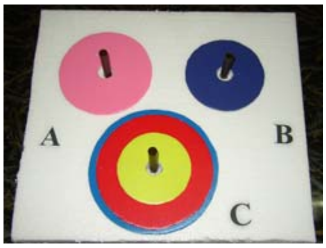
步驟二十四：紅圓盤至 C



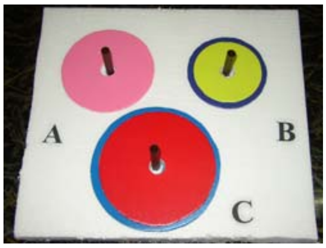
步驟二十五：淺綠圓盤至 C



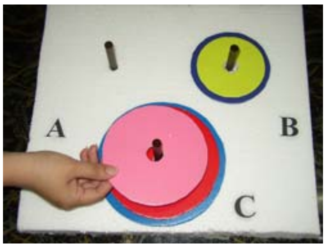
步驟二十六：深藍圓盤至 B

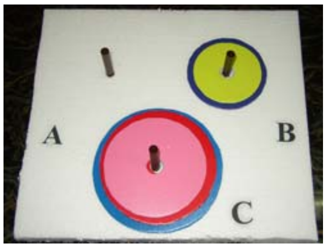


步驟二十七：淺綠圓盤至 B

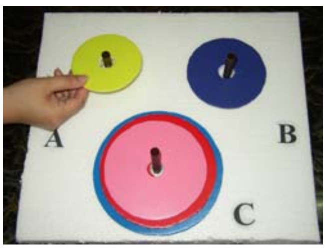


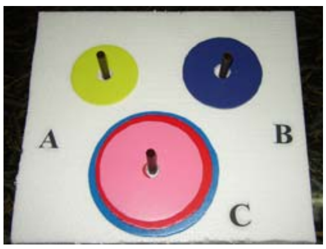
步驟二十八：粉紅圓盤至 C



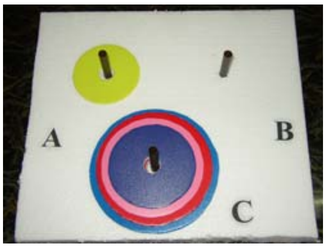


步驟二十九：淺綠圓盤至 A

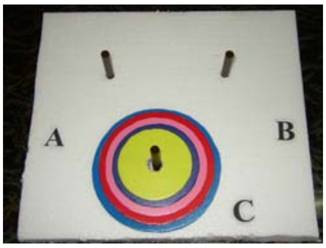




步驟三十：深藍圓盤至 C



步驟三十一：淺綠圓盤至 C



其餘的六個圓盤、七個圓盤、八個圓盤等等就不再詳加述敘。

伍、研究結果

圓盤數量	3	4	5	6	7
最少步驟	7次	１５次	３１次	６３次	１２７次

設：圓盤的數量為 N，最少的步驟為 A（N）

在國小的時候老師有提起過一個正方體的水槽的算法，與我們在國一上學期時所學到的次方的使用，因此我們可以推論到搬動圓盤的最少步驟是否與平方或者是次方的算法有關係，因此，我們找了兩位指導教師，嘗試著幫我在這些最少步驟的次數中，找到這一些的規律，可以發現到與我們國小和國一時學到的次方有關係，根據這些數據中，可以瞭解到都與 2 的 N 次方有關係。

分析一 A（3）$=7=8-1=2^{3}-1$

A（4）$=15=16-1=2^{4}-1$

A（5）$=31=32-1=2^{5}-1$

A（6）$=63=64-1=2^{6}-1$

A（7）$=127=128-1=2^{7}-1$

所以： A（N）$=2^{N}-1$

根據在分析一的觀察之中，我們可以發現到，其實除了 2 的 N 次方的算法之外，我們可以由前項與後項的關係，發掘到在所有規律的最少步驟中，後項圓盤數量等於前項圓盤數量的兩倍加一，這對我們數學敏感度微弱的學生而言，是個不可獲缺的重大突破，由之前的依賴教師到現在，可以主動發掘與主動歸納，對現今學生的我們在科展之中所獲得的最大收穫就是，對於數學的敏感度與歸納方式。

分析二

A（4）$= 2\times 7 +1 =2\times$A（3）+1

A（5）$= 2\times 15+1=2\times$A（4）+1

A（6）$= 2\times 31+1=2\times$A（5）+1

A（7）$= 2\times 63+1=2\times$A（6）+1

所以： A（N）$=2\times$A（N-1）+1

陸、討論

推廣討論一：

（條件說明）1、將每一個尺寸大小的圓盤都增加爲 2 個。

2、有三根木樁可以使用。

3、對任何木樁上的任意兩個相疊的圓環而言，上面的圓環一定要比下面的圓環小，但相同尺寸的圓盤可以互相重疊。

（成功條件）將所有圓盤，根據以上原則，從原本木樁移至另一根木樁，則所需要最少步驟爲多少？

圓盤數量	３×2=6	4×2=８	5×2=10	6×2=12	7×2=14
最少步驟	１４次	３０次	６２次	１２６次	２５４次

【結論】若圓盤數量爲 N，最少的步驟爲 **A(N)**

藉由不斷嘗試錯誤後，我們發現到可以藉由原本的研究結果，放大兩倍後就是推廣討論一的解答，這時我們產生奇異的聯想，這是否就是我們現今所學到**正比**的關係呢?在與教師討論後，由原本的研究結果乘以兩倍就是推論一的解答，我們可以得到以下的關係示，與我們現在所學到的二元一次方程式所作的一個結合，將下列式子化爲線性方程式來處理。

每一尺寸圓盤增爲２個的最少步驟＝２×每一尺寸圓盤只有一個的最少步驟

假設：每一尺寸圓盤只有一個的最少步驟＝X

每一尺寸圓盤增爲２個的最少步驟＝Y

可得方程式爲：Y＝2·X

甚至可以推知：

每一尺寸圓盤增爲 n 個的最少步驟＝ n × 每一尺寸圓盤只有一個的最少步驟

假設：

每一尺寸圓盤只有一個的最少步驟＝X

每一尺寸圓盤增爲 N 個的最少步驟＝Y

可得方程式爲： A（N）=N·X

推廣討論二:：

（條件說明） 1、每次移動固定數量的圓盤。

2、有三根木樁可以使用(三根木樁可任意相互移動)。

3、在 A 木樁上套著不同尺寸的 N 個圓盤。

4、移動限定由 A→B 或者是 B→C，但不可由 A→C。

5、對任何木樁上的任意兩個相疊的圓環而言，上面的圓環一定要比下面的圓環小。

（成功條件） 將所有圓盤，根據以上原則，從原本 A 木樁移至另一根 B 木樁，則所需要最少步驟為多少？

圓盤數量	1	2	3	4	5
步　　驟	1次	4次	13次	40次	121次

【結論】 若圓盤數量為 N，最少的步驟為 **A(N)**

分析：$A(1)=1$

$A(2)=4=1+3=A(1)+3$

$A(3)=13=4+9=A(2)+3^2$

$A(4)=40=13+27=A(3)+3^3$

$A(5)=121=40+81=A(4)+3^4$

由上述的研究結果與推廣討論一，與老師討論後發現到後項的次數等於前項的次數與 3 的次方數有關係，在進一步的觀察後，可以發現到次方數的數字為項數減一即可得之。

所以可得知：$A(N)=A(N-1)+3^{N-1}$

推廣討論三：

（條件說明） 1、每次移動固定數量的圓盤。

2、有三根木樁可以使用。

3、在 A 木樁上套著不同尺寸的 N 個圓盤。

4、移動限定由 A→B 或者是 B→C，但不可由 A→C。

5、對任何木樁上的任意兩個相疊的圓環而言，上面的圓環一定要比下面的圓環小。

（成功條件） 將所有圓盤，根據以上原則，從原本 A 木樁移至另一根 c 木樁，則所需要最少步驟為多少？

圓盤數量	1	2	3	4	5
步　　驟	2 次	8 次	26 次	80 次	242 次

【結論】

若圓盤數量為 N，最少的步驟為 **A(N)**

可以發現推廣討論三木樁的最少次數是推廣討論二木樁最少次數的２倍

分析：$A(1)=2=2$

$A(2)=8=2+2\times3=A(1)+2\times3$

$A(3)=26=8+2\times3^{2}=A(2)+2\times3^{2}$

$A(4)=80=26+2\times3^{3}=A(3)+2\times3^{3}$

$A(5)=242=80+2\times3^{4}=A(4)+2\times3^{4}$

所以可得知：$A(N)=A(N-1)+2\times 3^{N-1}$

或：

假設：推廣討論三木樁的最少次數＝y

推廣討論二木樁最的少次數＝x

可得方程式為：$Y=2\cdot X$

推廣討論四：

（條件說明） 1、每次移動固定數量的圓盤。

2、有四根木樁可以使用(四根木樁可任意相互移動)。

3、在原本木樁上套著不同尺寸的 N 個圓盤。

4、對任何木樁上的任意兩個相疊的圓環而言，上面的圓環一定要比下面的圓環小。

（成功條件） 將所有圓盤，根據以上原則，從原本木樁移至另一根木樁，則所需要最少步驟爲多少?

我們分兩階段探討：

第一階段：

圓盤數量	3	4	5	6
步　　驟	5次	9次	13次	17次

若圓盤數量爲 N，(N=3,4,5, 6)時；最少的步驟爲 **A(N)**＝4（**n-2**）＋1

第二階段：

圓盤數量	7	8	9	10	11	12	13	14
步　　驟	25 次	33 次	41 次	49 次	65 次	81 次	97 次	114 次

【結論】

分析：

A（N）＝所需次數

N＝圓盤數量，

god　n ＝（將原先的 N 拆成 n+ a，n＝先移至另外三根的其中一根步驟次數）

ood　a　＝（將原先的 N 拆成 n+ a，a＝移完後 n 後剩餘下來的圓盤數，針對三根木樁移動的次數）----此即基本研究結果中的最少步驟。

★圓盤數量爲7時，圓盤由小至大，編號爲1至7

A（7）＝2xgod 3+ ood 4＝2x5+ 15＝25

A（7）＝2xgod 4+ ood 3＝2x9+ 7＝25

A（7）＝2xgod 5+ ood 2＝2x13+ 3＝29

A（7）＝2xgod 6+ ood 1＝2x17+ 1＝35

★圓盤數量爲8時，圓盤由小至大，編號爲1至8

A（8）＝2xgod 3+ ood 5＝2x5+ 31＝41

A（8）＝2xgod 4+ ood 4＝2x9+ 15＝33

A（8）＝2xgod 5+ ood 3＝2x13+ 7＝33

A（8）＝2xgod 6+ ood 2＝2x17+ 3＝37

A（8）＝2xgod 7+ ood 1＝2x25+ 1＝51

★圓盤數量爲 9 時，圓盤由小至大，編號爲 1 至 9

A（9）＝2xgod 3+ ood 6＝2x5+ 63＝73

A（9）＝2xgod 4+ ood 5＝2x9+ 31＝49

A（9）＝2xgod 5+ ood 4＝2x13+ 15＝41

A（9）＝2xgod 6+ ood 3＝2x17+ 7＝41

A（9）＝2xgod 7+ ood 2＝2x25+ 3＝53

A（9）＝2xgod 8+ ood 1＝2x33+ 1＝67

★圓盤數量爲 10 時，圓盤由小至大，編號爲 1 至 10

A（10）＝2xgod 3+ ood 7＝2x5+ 127＝137

A（10）＝2xgod 4+ ood 6＝2x9+ 63＝81

A（10）＝2xgod 5+ ood 5＝2x13+ 31＝57

A（10）＝2xgod 6+ ood 4＝2x17+ 15＝49

A（10）＝2xgod 7+ ood 3＝2x25+ 7＝57

A（10）＝2xgod 8+ ood 2＝2x33+ 3＝69

A（10）＝2xgod 9+ ood 1＝2x41+ 15＝83

★圓盤數量爲 11 時，圓盤由小至大，編號爲 1 至 11

A（11）＝2xgod 3+ ood 8＝2x5+ 255＝265

A（11）＝2xgod 4+ ood 7＝2x9+ 127＝145

A（11）＝2xgod 5+ ood 6＝2x13+ 63＝89

A（11）＝2xgod 6+ ood 5＝2x17+ 31＝67

A（11）＝2xgod 7+ ood 4＝2x25+ 15＝65

A（11）＝2xgod 8+ ood 3＝2x33+ 7＝73

A（11）＝2xgod 9+ ood 2＝2x41+ 3＝85

A（11）＝2xgod 10+ ood 1＝2x49+ 1＝99

★圓盤數量爲 12 時，圓盤由小至大，編號爲 1 至 12

A（12）＝2xgod 3+ ood 9＝2x5+ 511＝521

A（12）＝2xgod 4+ ood 8＝2x9+ 255＝273

A（12）＝2xgod 5+ ood 7＝2x13+ 127＝153

A（12）＝2xgod 6+ ood 6＝2x17+ 63＝97

A（12）＝2xgod 7+ ood 5＝2x25+ 31＝81

A（12）＝2xgod 8+ ood 4＝2x33+ 15＝81

A（12）＝2xgod 9+ ood 3＝2x41+ 7＝89

A（12）＝2xgod 10+ ood 2＝2x49+ 3＝101

A（12）＝2xgod 11+ ood 1＝2x65+ 1＝131

★圓盤數量爲 13 時，圓盤由小至大，編號爲 1 至 13

A（13）＝2xgod 3+ ood 10＝2x5+ 1023＝1033

A（13）＝2xgod 4+ ood 9＝2x9+ 511＝529

A（13）＝2xgod 5+ ood 8＝2x13+ 255＝281

A（13）＝2xgod 6+ ood 7＝2x17+ 127＝161

A（13）＝2xgod 7+ ood 6＝2x25+ 63＝113

A（13）＝2xgod 8+ ood 5＝2x33+ 31＝97

A（13）＝2xgod 9+ ood 4＝2x41+ 15＝97

A（13）＝2xgod 10+ ood 3＝2x49+ 7＝105

A（13）＝2xgod 11+ ood 2＝2x65+ 3＝133

A（13）＝2xgod 12+ ood 1＝2x5+ 1＝163

當作測驗到現在時，我們可以大膽的猜想

A（N）＝4x（N-2）+ 1；當 N< 6，且是整數

A（N）＝2xgod （N- 4）+ 2^4 - 1；當 N> 6，且 N 是整數

★圓盤數量爲 14 時，圓盤由小至大，編號爲 1 至 14

根據以上的推論，所以可以得知

A（14）＝2xmod10+ 15＝2x49+ 15＝114＝我們實際利用圓盤操作的結果

推論到這裡，若圓盤繼續增加下去爲 15 個、16 個、17 個等等，最少的步驟我們猜想可能與上述的關係式有相關連的部份，由於科展時間緊迫的關係，我們無法以指導教師所教我們的**數學歸納法**證明我們所推論的公式是正確的。

柒、結論

經過了一段時間的熱烈討論，我們針對「河內塔問題」推出了一些解，也利用很多、很多的方式尋找答案，得知這個謎題的解並非只有一個！

我們進一步去討論其它人沒有作過的變形問題，例如：四根不同的變形。也嘗試找出解，但希望卻不如我們所願。原本想找出四根木樁的解，但這個問題的解並非我們想像中的容易。我們已盡力去思考這一個問題，在尋找規律時，所花的時間以及所遭遇到的挫折，並不是三言兩語可以道盡，所以進度完全卡在這，我們已經從四根木樁的規律性中找到可以符合的公式，但是由於時間的不足，我們沒有辦法證明這個公式是否為正確的，這是我們覺得遺憾的事情。我相信以後的人一定能證明出這個問題，我們也相信以後的人能想出更多的不同條件下的河內塔，經過這一次科展的歷練後，我們發現到數學好玩的一面，但是也讓我們有嘗到挫折的一面，其實如果沒有這些挫折，我們也無法瞭解自己的對於邏輯以及敏感度的低落，但是我們也可以藉此科展，增加我們對於數學的興趣，若是明年有機會，相信我也一定會再次參加科展競賽，希望藉由我們的結果、可以讓數學不斷的創新、讓數學能更加的有趣。

捌、參考資料

許介彥，2005 年 1 月，**數學悠哉遊**，三民出版社。

評　　語

030402 河內塔問題

考慮河內塔問題的推廣在容許大小相同的圓環有多個，及只能移動到特定柱子的情況下作探討，偏重觀察實驗結果而疏忽了對內涵更深一層的探討，證明並不難，缺少證明實在可惜。