

國立台中教育大學特殊教育與輔助科技研究所
碩士論文

指導教授：高明志博士

河內塔遊戲教學對數學學習障礙學童
型式認知之研究探討

研究生：辛淑菁撰

中華民國九十五年六月

河內塔遊戲教學對數學學習障礙學童型式認知之研究探討

摘要

本研究本著「從遊戲中學習，從操作中認知」的理念，冀望藉由河內塔遊戲的解題過程中學習解決問題，提升數學學習障礙學童問題解決類化的能力。本研究旨在探討河內塔遊戲的型式教學介入對於國小數學學習障礙學童之學習成效。研究方法採單一受試研究法中的跨受試多基線設計。研究對象為台中市某國小資源班三名三、四、五年級的數學學習障礙學童。教學材料係自行設計之型式認知操作活動或評量。學習效果以研究對象在河內塔遊戲的型式教學中，依最少步數搬移河內塔遊戲的次數多寡為指標，將所得資料以圖或表的方式呈現，最後再進行視覺分析。此外，並探討河內塔遊戲的型式教學後，對數學學習障礙學童擬定解題計畫能力、問題解決類化能力的影響做分析，以及探討此學習是否為可以理解複雜型式概念，進而增強型式認知。

本研究結果如下：

- 一、河內塔遊戲的型式教學後，數學學習障礙學童依最少步數搬移河內塔遊戲的次數皆得到立即提升且顯著的學習成效。
- 二、河內塔遊戲的型式教學後，數學學習障礙學童對河內塔遊戲內涵的型式概念，有良好的保留成效。
- 三、河內塔遊戲的型式教學後，數學學習障礙學童可以將搬移四個圓盤的解題策略類化到解決搬移五個圓盤複雜度更高的問題上。
- 四、河內塔遊戲的型式教學後，數學學習障礙學童可以擬定出自己的解題計畫。
- 五、河內塔遊戲的型式教學後，數學學習障礙學童可以理解複雜型式概念，進而增強型式認知。

關鍵字：河內塔、型式、數學學習障礙、單一受試法

A study of pattern teaching on Tower of Hanoi for pupils with mathematic learning disabilities

Abstract

This study emphasizes on the concept of “learning from playing, recognizing from operating,” hoping to let pupils learn how to solve problem from solving the Tower of Hanoi and to enhance pupils’ ability to solve analogue problems.

This study investigates the effect of pattern teaching intervention in the Tower of Hanoi puzzle on the pattern learning performance of pupils with mathematic learning disabilities. The design of multiple probe across subjects was adopted in this study. The 3 subjects of this study are math learning disabilities students in the third, fourth and fifth grade of some elementary school of Taichung City respectively. The teaching assisted materials are self-designed play pattern and cognition activities and assessments. The learning performance index is the number of times pupils can transfer the entire tower to one of the other pegs in the minimum number of moves needed to solve the puzzle in the pattern teaching activities. The obtained data were analyzed by using the visual analysis. Moreover, the effect on pupils’ analogizing and problem-solving planning abilities is investigated.

The major results of this study were as follows:

1. The effect of learning was immediate and significant in the intervention phase.
2. The effect of learning was sustained during the retention phase.
3. The effect of evaluation upon analogical problem solving is positive. Pupils can analogize their strategy on solving the Tower of Hanoi puzzle with four disks to the puzzle with five or more disks.

4. Pupils can make their own and efficient plan of problem solving instead of operating by trial and error.
5. The effect of learning pattern finding is positive. Pupils have learned that the pattern relationship is useful to manage complexity in the Tower of Hanoi problem solving.

keywords: Tower of Hanoi, pattern, mathematic learning disabilities, single subject research

目 錄

第一章 緒論

第一節 研究動機	1
第二節 研究目的與待答問題	4
第三節 名詞解釋	6
第四節 研究範圍與限制	8

第二章 文獻探討

第一節 數學學習障礙的學習特徵與相關研究	
一、數學學習障礙學童的學習特徵	9
二、數學學習障礙的相關研究	14
第二節 數學學習障礙的教學法	19
第三節 型式和遊戲	
一、型式的重要性	22
二、型式的意義	23
三、遊戲的意義	24
四、遊戲的益處	26
五、遊戲的分類	26
第四節 問題解決類化能力	
一、問題解決類化能力的意義	27
二、數學學習障礙學童之問題解決類化能力的重要性	30

第三章 研究方法

第一節 研究程序

- 一、解決河內塔遊戲問題之策略的研究過程… … … … 35
- 二、本研究整體之研究程序… … … … 39

第二節 研究設計

- 一、實驗設計… … … … 40
- 二、實驗教學架構及變項… … … … 48
- 三、本研究數學學習障礙學童的教學法… … … … 58

第三節 研究對象

- 一、試探性研究對象… … … … 61
- 二、正式研究對象… … … … 67

第四節 研究工具

- 一、魏氏兒童智力量表第三版… … … … 74
- 二、基礎數學概念評量… … … … 75
- 三、國民小學數學科診斷測驗… … … … 75
- 四、自編的學習成效評量… … … … 76
- 五、擬定解題計畫能力的評量… … … … 78
- 六、問題解決類化能力的評量… … … … 79
- 七、自編的訪談紀錄… … … … 79
- 八、自編的型式認知評量… … … … 79

第五節 教學材料

- 一、教學者… … … … 80
- 二、教學之編製依據… … … … 80
- 三、教學程序… … … … 82
- 四、教學時間之安排… … … … 84

第六節 資料處理… … … … 85

第四章 結果與討論

第一節 型式教學活動的學習成效之分析	88
第二節 型式認知概念建立的過程之分析	
一、基本能力的培養	
(一) 型式的基本能力評量一	100
(二) 型式的基本能力評量二	103
二、處理期之型式認知概念的建立	
(一) 形成性成效評量一	107
(二) 形成性成效評量二	111
(三) 形成性成效評量三	115
(四) 形成性成效評量四	117
(五) 三個形成性成效評量的正確率	118
三、追蹤期之型式認知概念的建立	
(一) 短期保留成效評量	122
(二) 長期保留成效評量	124
第三節 型式教學活動對擬訂解題計畫能力影響之分析	
一、以口述紀錄方式擬訂解題計畫	125
二、以排步驟卡方式擬訂解題計畫	133
第四節 型式教學活動對問題解決類化能力影響之分析	
一、實施方法	141
二、實施結果	141
第五節 理解型式概念，增強型式的認知：訪談記錄之分析	
一、訪談的用意	143
二、訪談的目的	143
三、訪談的題目	143
四、訪談的結果分析	145
第六節 理解型式概念，增強型式的認知：河內塔的型式認知之分析	
一、實施方法	161
二、實施結果	161
第七節 理解型式概念，增強型式的認知：星形的型式認知之分析	
一、實施方法	170
二、實施內容	170
三、研究者的口語提示	171
四、實施結果	173
第八節 討論	177

第五章 結論與建議

第一節、結論	182
第二節、建議	185

參考文獻	188
------	-----

本論文報告之投影片	224
-----------	-----

附 錄

基本能力評量

- 附錄〈一〉型式的基本能力評量（一）：寫出 12 種的型式 …… 193
附錄〈二〉型式的基本能力評量（二）：搬移 2、3 個圓盤操作評量…196

學習成效

- 附錄〈三〉基線期以最少步數完成目標的次數評量表… …… 198

實驗處理期

- 附錄〈四〉形成性成效評量（一）：找起始與終點柱、參照寫入… 199
附錄〈五〉形成性成效評量（二）：分堆紀錄表… …… 200
附錄〈六〉形成性成效評量（二）：分組、寫對應卡、複製… …… 201
附錄〈七〉形成性成效評量（三）：操作動作之檢核表… …… 202

學習成效

- 附錄〈八〉三個形成性成效評量的正確率… …… 203
附錄〈九〉處理期以最少步數完成目標的次數評量表… …… 204

追蹤期

- 附錄〈十〉短期保留成效評量… …… 205
附錄〈十一〉長期保留成效評量… …… 206

學習成效

- 附錄〈十二〉追蹤期以最少步數完成目標的次數評量表… …… 207
附錄〈十三〉三期之以最少步數完成目標的次數評量統計表… …… 208

型式能力一：擬訂解題計畫能力

- 附錄〈十四〉搬移 4 個圓盤採口述紀錄方式… …… 209
附錄〈十五〉搬移 5 個圓盤採排步驟卡方式… …… 210

型式能力二：問題解決類化能力

- 附錄〈十六〉解決搬移 5 個圓盤的問題… …… 212

型式能力三：探討是否理解型式概念，增強型式認知

- 附錄〈十七〉訪談紀錄單… …… 213
附錄〈十八〉型式認知評量單（河內塔）… …… 216
附錄〈十九〉型式認知評量單（星形-1、星形-2）… …… 220

表 次

表 2-1-1	數學學習障礙學童的特徵相關研究	10
表 2-1-3	數學學習障礙之相關研究	14
表 2-5-1	問題解決能力之相關研究	30
表 3-2-1	實驗階段與各階段所用到的評量單、訪談單或檢核表之對照表	42
表 3-2-2	研究者自編的河內塔遊戲教學	45
表 3-2-3	基本能力評量、形成性成效評量的計分標準	54
表 3-3-1	學科能力測驗、魏氏智力測驗、鑑定結果表	62
表 3-3-2	魏氏兒童智力量表中兩兩分測驗相減後的值	62
表 3-3-3	學業成就測驗百分等級測驗資料	63
表 3-3-4	魏氏兒童智力量表之施測結果	64
表 3-3-5	基礎數學概念評量之施測結果	65
表 3-3-6	基礎數學概念評量之施測結果	65
表 3-3-7	國民小學數學科診斷測驗之施測結果	66
表 3-3-8	魏氏兒童智力量表之施測結果 (受試甲)	69
表 3-3-9	基礎數學概念評量之施測結果 (受試乙)	70
表 3-3-10	基礎數學概念評量之施測結果 (受試丙)	71
表 3-3-11	基礎數學概念評量之施測結果	71
表 3-3-12	三位受試者在國民小學數學科診斷測驗之施測結果	72
表 3-3-13	三位受試者在學習困難項目的檢核表	73
表 3-5-1	教學階段、教學活動和授課時數對照表	81
表 3-5-2	實驗教學時間安排表	84
表 3-6-1	階段內變化分析	86
表 3-6-2	階段間變化分析	87
表 4-1-1	基線期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試甲)	88
表 4-1-2	處理期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試甲)	89
表 4-1-3	追蹤期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試甲)	89
表 4-1-4	以最少步數完成目標的次數評量總表 (受試甲)	89
表 4-1-5	以最少步數完成目標的次數之視覺分析摘要表 (受試甲)	90
表 4-1-6	基線期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試乙)	92
表 4-1-7	處理期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試乙)	93
表 4-1-8	追蹤期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試乙)	93
表 4-1-9	以最少步數完成目標的次數評量總表 (受試乙)	93
表 4-1-10	以最少步數完成目標的次數之視覺分析摘要表 (受試乙)	94
表 4-1-11	基線期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試丙)	96
表 4-1-12	處理期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試丙)	97
表 4-1-13	追蹤期末期評量：以最少步數完成目標的次數評量表 (受試丙)	97

表 4-1-14	以最少步數完成目標的次數評量總表 (受試丙)	97
表 4-1-15	以最少步數完成目標的次數之視覺分析摘要表 (受試丙)	98
表 4-2-1	寫出 12 種的型式之評量結果 (受試甲)	101
表 4-2-2	寫出 12 種的型式之評量結果 (受試乙)	101
表 4-2-3	寫出 12 種的型式之評量結果 (受試丙)	101
表 4-2-4	搬移 2 個圓盤, 且依最少步數完成目標的次數之評量結果 (受試甲)	104
表 4-2-5	搬移 3 個圓盤, 且依最少步數完成目標的次數之評量結果 (受試甲)	104
表 4-2-6	搬移 2 個圓盤, 且依最少步數完成目標的次數之評量結果 (受試乙)	105
表 4-2-7	搬移 3 個圓盤, 且依最少步數完成目標的次數之評量結果 (受試乙)	105
表 4-2-8	搬移 2 個圓盤, 且依最少步數完成目標的次數之評量結果 (受試丙)	106
表 4-2-9	搬移 3 個圓盤, 且依最少步數完成目標的次數之評量結果 (受試丙)	106
表 4-2-10	找起始柱與終點柱、參照寫入空白卡之評量結果 (受試甲)	108
表 4-2-11	找起始柱與終點柱、參照寫入空白卡之評量結果 (受試乙)	108
表 4-2-12	找起始柱與終點柱、參照寫入空白卡之評量結果 (受試丙)	109
表 4-2-13	4 個圓盤分成 2 堆之分堆紀錄 (受試甲)	111
表 4-2-14	4 個圓盤分成 3 堆之分堆紀錄 (受試甲)	111
表 4-2-15	4 個圓盤分成 2 堆之分堆紀錄 (受試乙)	112
表 4-2-16	4 個圓盤分成 3 堆之分堆紀錄 (受試乙)	112
表 4-2-17	4 個圓盤分成 2 堆之分堆紀錄 (受試丙)	113
表 4-2-18	4 個圓盤分成 3 堆之分堆紀錄 (受試丙)	113
表 4-2-19	有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡之評量結果 (受試甲)	115
表 4-2-20	有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡之評量結果 (受試乙)	115
表 4-2-21	有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡之評量結果 (受試丙)	116
表 4-2-22	解決搬移 4 個圓盤問題的操作動作之檢核表 (受試甲)	117
表 4-2-23	解決搬移 4 個圓盤問題的操作動作之檢核表 (受試乙)	117
表 4-2-24	解決搬移 4 個圓盤問題的操作動作之檢核表 (受試丙)	117
表 4-2-25	處理期的三個形成性成效評量之正確率 (受試甲)	119
表 4-2-26	處理期的三個形成性成效評量之正確率 (受試乙)	119
表 4-2-27	處理期的三個形成性成效評量之正確率 (受試丙)	119
表 4-2-28	短期保留成效評量之評量結果 (受試甲)	122
表 4-2-29	短期保留成效評量之評量結果 (受試乙)	123
表 4-2-30	短期保留成效評量之評量結果 (受試丙)	123
表 4-2-31	長期保留成效評量之評量結果 (受試甲)	124
表 4-2-32	長期保留成效評量之評量結果 (受試乙)	124
表 4-2-33	長期保留成效評量之評量結果 (受試丙)	124
表 4-3-1	河內塔遊戲操作流程圖之細目條列表	126

表 4-3-2	設計解決搬移 4 個圓盤的解題計畫--口述紀錄 (受試甲)	127
表 4-3-3	設計解決搬移 4 個圓盤的解題計畫--口述紀錄 (受試乙)	129
表 4-3-4	設計解決搬移 4 個圓盤的解題計畫--口述紀錄 (受試丙)	131
表 4-3-5	專業化用詞改成口語化用詞對照表	133
表 4-3-6	設計解決搬移 5 個圓盤的解題計畫--排步驟卡 (受試甲)	135
表 4-3-7	設計解決搬移 5 個圓盤的解題計畫--排步驟卡 (受試乙)	137
表 4-3-8	設計解決搬移 5 個圓盤的解題計畫--排步驟卡 (受試丙)	139
表 4-4-1	問題解決類化能力 (搬移 5 個圓盤)--檢核表 (甲乙丙)	141
表 4-5-1	2 個圓盤之 6 種搬移的型式	145
表 4-5-2	2 個圓盤之 6 種搬移的型式一樣的地方	146
表 4-5-3	3 個圓盤之 6 種搬移的型式	147
表 4-5-4	4 個圓盤之 6 種搬移的型式一樣的地方	148
表 4-5-5	4 個圓盤如何分成正確的 2 堆	149
表 4-5-6	4 個圓盤分成正確的 2 堆之理由	150
表 4-5-7	4 個圓盤分成正確的 2 堆之對應關係	151
表 4-5-8	4 個圓盤如何分成正確的 3 堆	152
表 4-5-9	4 個圓盤分成正確的 3 堆之理由	153
表 4-5-10	4 個圓盤分成正確的 3 堆之對應關係	154
表 4-5-11	兩張卡之間非一個步驟的下一個動作	155
表 4-5-12	插入空白卡後的下一個動作	157
表 4-5-13	插入兩張卡是比照搬移幾個圓盤的型式	158
表 4-5-14	插入六張卡是比照搬移幾個圓盤的型式	159
表 4-5-15	第 2 張卡如何處理	160
表 4-5-16	如何處理	160
表 4-6-1	河內塔型式認知測驗結果-1	161
表 4-6-2	河內塔型式認知測驗結果-2	164
表 4-6-3	河內塔型式認知測驗結果-3	166
表 4-6-4	河內塔型式認知測驗結果-4	168
表 4-8-1	利用表 3-3-13 (三位受試者的學習困難項目) 檢核表的再評估	178

圖 次

圖 3-1-1	解決河內塔遊戲問題之策略的研究流程	36
圖3-1-2	河內塔遊戲操作流程圖	38
圖3-1-3	本研究整體之研究程序	39
圖 3-2-1	實驗階段與程序圖	41
圖3-2-2	實驗設計架構圖	48
圖4-1-1	以最少步數完成目標的次數之曲線圖（受試甲）	90
圖4-1-2	以最少步數完成目標的次數之曲線圖（受試乙）	94
圖4-1-3	以最少步數完成目標的次數之曲線圖（受試丙）	98
圖 4-2-1	型式的形成性成效評量之正確率（受試甲乙丙）	120
圖 4-3-1	14 疊步驟卡	134
圖4-7-1	大小不同的待選的pattern	171
圖4-7-2	星形二的第4個完成圖（受試甲）	174
圖4-7-3	星形二的第4個完成圖（受試乙）	175
圖4-7-4	星形二的第4個完成圖（受試丙）	176

第一章 緒論

第一節 研究動機

本研究之研究動機可分述如下：

一、鼓勵數學學習障礙學童發展問題解決的技巧、類化能力

教育部八十二年的國小數學課程標準中提到：「養成運用數學知識與方法，解決問題的能力」，而八十九年公佈九年一貫數學領域內涵，除了數學知識、生活應用能力外，更強調了解推理、解題的思考過程及數學溝通的能力。為配合九年一貫的精神，目前數學教育的重心已慢慢轉移◎至問題解決能力的培養上。問題解決就是指利用各種方法或策略，使個人從「呈現狀態」到「目的狀態」（鄭昭明，1993）。

鼓勵特殊兒童獲得問題解決的技巧，就是提供一種能讓他們更自力更生、更能成功運作生活的方式。如果讓孩童自己去解決可以自己處理的問題，就能幫助他們獲得問題解決的技巧和自尊心（黃世毅譯，2002）。

關於學習障礙學童的研究方面大多是從事「解題」方面的研究，問題解決能力低落的重要問題卻很少人研究。

本研究起源於研究者真實教學情境中所發現的，研究者在國小資源班任教，自任教以來，資源班的學童大多是學習障礙，研究者在教學情境中發現，數學學習障礙學童對於型式、序列、對應等認知能力較差，無法將所學過的知識或技巧有效的類化到同一類型的事物上，進而解決新的問題，導致學習困難。問題解決類化能力對學習障礙兒童很重要，而且是可以經由遊戲教學來培養，使數學學習障礙學童能提升問題解決類化能力。

二、從遊戲中學習，從操作中認知

在國小數學科教學中，若透過以動手做數學的數學遊戲教學方式，並選擇適當的數學遊戲教學策略能有助於數學學習困難學童，有助於提升數學科學習困難學童的學習興趣與學習表現（李香慧，2006）。

數學遊戲教學採取動手做數學，從做中學的活動化學習理念，融入遊戲活動於數學教學情境之中。在遊戲化的教學情境中，兒童的內在動機自然地被引發，而樂於主動參與活動，活動過程中兒童充滿愉快感，自然而然的樂於主動參與活動而非被動的參加。因此，遊戲數學教學在使兒童經驗快樂的數學學習活動，也使兒童更有信心處理生活經驗中（李香慧，2006）。

身心障礙兒童，由於遺傳、腦傷等因素，造成發展遲緩的現象，在進行認知活動時，常受限於孩子本身的能力，事倍功半。為避免上述的情形，指導者常需藉助一些教具，讓身心障礙者的語言、認知、肢體動作等得到充分的發展。此時，若能採用遊戲式的教具，較能吸引兒童的興趣，提高學習效果。很多學者專家都覺得透過遊戲的學習，可以很自然的獲得一些日常生活中必備之技能（王寵惠、彭素真，1999），學習上比較活潑化，可以提高學習動機和學習效率。

河內塔的遊戲具有益智及教育特色的玩具，充份達到寓教於樂的學習效果，是一種遊戲規則易懂的益智遊戲，並且具有思考性、啟發性、操作性、可親性等特點，可訓練手眼協調、手部精細動作的能力，此外，河內塔的益智遊戲能明確指出遊戲規則、起始狀態和終點目標，數學學習障礙學童心理必須考慮在既有的規定下，如何去達成顯見的終點目標，數學學習障礙學童的心中很容易引起「有目的，但不知如何到達」的心理困境，而形成一個待解的問題，加上河內塔本身屬於操作型的遊戲，很容易成為挑戰問題的動機。

九年一貫綱要的能力指標（2003）指出，學童要能辨識具規則性的數列，能理解等差數列的樣式、規則性及未知量，能理解等差數列的樣式、

規則性及理解未知量求法等，而學習pattern（型式）概念正能契合九年一貫的精神，利用河內塔遊戲，有操作、有探索、有遊戲，會讓學童的學習生動有趣、親切自然，並且不再那麼枯燥抽象（林壽福, 95年）。因此，本研究本著「從遊戲中學習，從操作中認知」的理念，冀望藉由河內塔遊戲的解題過程中學習解決問題，提升學童類化和問題解決的能力。

第二節 研究目的與待答問題

一、研究目的

根據上述研究動機，本研究以就讀國民小學中、高年級數學學習障礙學童為研究對象，並以研究者所設計以河內塔遊戲為內涵之問題解決類化活動進行型式教學，藉以探討河內塔遊戲之型式教學對國小數學學習障礙學童之問題解決類化能力的影響。因此，本研究主要的目的如下：

- (一) 探討河內塔遊戲之型式教學對國小數學學習障礙學童的型式概念之學習成效。
- (二) 探討河內塔遊戲之型式教學對國小數學學習障礙學童的型式概念之保留成效。
- (三) 探討河內塔遊戲之型式教學後，對國小數學學習障礙學童之擬訂解題計畫能力的影響。
- (四) 探討河內塔遊戲之型式教學後，對國小數學學習障礙學童之問題解決類化能力的影響。
- (五) 探討河內塔遊戲之型式教學後，對數學學習障礙學童可否理解型式概念，增強型式認知。

註：1. 「型式概念之學習成效」是指經過處理期之後，測試該數學學習障礙學童以最少步數搬移成功的次數是否有顯著的增加，如果有顯著的增加，表示該處理期的型式教學有學習成效。

2. 「可否理解型式概念，增強型式認知」可從三方面來看：

- (1) 訪談紀錄：三位數學學習障礙學童對於搬移2、3個圓盤的12種搬移型式、以及將四個圓盤有效的分成2或3堆並寫出對應卡、以及思考插入2、6張空白卡時，是比照搬移幾個圓盤的

型式，以測試三位受試者對型式認知之概念。

(2) 河內塔的型式認知測試：要數學學習障礙學童去觀察紙卡上圓盤的位置是由哪根柱子搬移到哪根柱子、去思考可將此問題看作是搬移幾個圓盤的問題之答案、並從問題解決之內容參照之6種pattern去挑選一個最適當的pattern來貼入空白卡中。

(3) 星形的型式認知測試：挑選出正確的pattern圖形，在研究者的口語提示完之後，依照型式邏輯貼出第三個或第四個圖形。

二、待答問題

由上述的研究目的所列出的待答問題如下：

- (一) 河內塔遊戲之型式教學後，對國小數學學習障礙學童的型式概念之學習成效的影響如何？
- (二) 河內塔遊戲之型式教學後，對國小數學學習障礙學童的型式概念之保留成效的影響如何？
- (三) 河內塔遊戲之型式教學後，對國小數學學習障礙學童之擬定解題計畫能力的影響為何？
- (四) 河內塔遊戲之型式教學後，對國小數學學習障礙學童之問題解決類化能力的影響為何？
- (五) 河內塔遊戲之型式教學後，數學學習障礙學童可否理解型式概念，增強型式認知？

第三節 名詞解釋

一、河內塔遊戲

河內塔遊戲起源於古老印度的傳說。1883年，法國的數學家 Edouard Lucas 教授將其命名為河內塔(Tower of Hanoi)。傳說在古老的印度，有一座神廟，有三根長木釘的木板，在其中的一根木釘上，僧侶們能將 64 片的金屬片依規則從指定的木釘上全部移動至另一根木釘上，那麼，世界末日即隨之來到，萬物都將至極樂世界。(引自九章出版社，2004)。

本遊戲為在一塊有三根木柱的木板，在其中的一根木柱上放入數個大小不同的圓盤，依規則從指定的木柱上全部移動至另一根木柱上，其規則有三：

規則一：直徑大的圓盤不可以壓住直徑小的圓盤。

規則二：一次只能移動一個圓盤。

規則三：不能將圓盤移到柱子以外的地方。

最少的移動次數可以證明是 $2^n - 1$ (n=圓盤數)

遊戲的定義紛歧(潘怡吟，2001；饒見維，1996；廖信達，2004；郭靜晃等，2005)。本研究認為之遊戲是一種複雜的行為，是兒童將內心想法表達出來的行為方式之一，遊戲可以讓兒童去探索、學習並形成經驗，用來理解周圍事物，當作應付未來實際生活所做的預習(潘怡吟，2001)。本研究要讓數學學習障礙學童從河內塔的遊戲中探索、學習型的概念。

河內塔遊戲教學是指採用河內塔這種三根柱子的教具及其遊戲三規則，並使用紙卡記錄搬移的步驟，以減低記憶的負擔，讓數學學習障礙學童學會用最少的步數去成功搬移四個以上的圓盤，並從中體會到型的概念。

二、型式

簡單型式(Simple Pattern)通常指重覆出現，有規則性的圖案、花樣、動作、聲音、或事件等（周淑惠，1999）；型式(Pattern)乃表徵事物每次出現的狀況和變化都類似，而且都有其根源可尋（林壽福，2006）。

本研究之型式(Complicated Pattern)是指植基於低層次的型式概念，藉由高層次的邏輯推理和擬訂解題計畫能力所產生出來的重覆出現，有規則性的圖案、動作或事件等型式。

三、數學學習障礙 (MLD) 學童

本研究之數學學習障礙學童是指在「魏氏智力量表第三版」(WISC-III, 1992)中之全量表智商分數在70 以上，且在柯華葳(1999)所編製「基礎數學概念評量」之大部分測驗成績不及格，在「答對／全部題數%」以及「答對／做完題數%」之成績有差距者，即表示其有數學基本概念之困難。

四、問題解決能力

問題解決能力的定義為，個體在遭遇到問題時，能運用本身既有的知識或經驗等，然後加以應用，以解決個體所面臨的問題，而達到目的能力（曾望超，2003；張春興，1991；D' zurilla 和Nezu，1987，引自曾望超，2003）。本研究之問題解決能力是指受試者在單一受試研究方法結束後，讓數學學習障礙學童解決搬移五個圓盤這個問題，驗證該受試者在實驗教學之後，是否可以將搬移四個圓盤解題策略應用到搬移五個圓盤、複雜度更深一層的問題上。如果受試者可以運用所學的解題策略去解決搬移五個圓盤這個問題，就代表實驗教學活動對問題解決能力之增進有影響。

第四節 研究範圍與限制

本研究之研究限制如下：

- 一、本研究僅探討三位就讀台中市某國民小學資源班數學學習障礙學童，接受以河內塔遊戲教學活動之教導後，數學學習障礙學童在學習河內塔遊戲之保留成效，故只能解釋該三位數學學習障礙學童在類化能力、問題解決能力的學習表現。

- 二、本研究受限於研究對象之特殊性、樣本數太少，故採用單一受試法做研究設計，以了解數學學習障礙學童個別化的學習情況。

第二章 文獻探討

第一節 數學學習障礙的學習特徵與相關研究

一、數學學習障礙學童的學習特徵

數學學習障礙指個體智力正常，非因智能不足、視覺、聽覺、動作、情緒等之障礙或因文化不利因素的影響，而於數學符號運用能力的學習上有困難，致使數學能力低下者，即為數學學習障礙。一般而言，身心障礙學童中，遭遇到學習數學困難的情形不少，約有26%的學障學童須接受數學困難的協助，更有50%學習障礙學童的IEP目標中，列有數學的項目（侯禎塘，2004）。可見數學學習障礙的學童數很多，大多數的身心障礙兒童都有需要加強數學的指導。

數學學習障礙學童的特徵為：注意力缺陷、記憶缺陷、理解困難、動作不靈活、固執和形象背景區分不易（陳麗玲，1992）。而林穎義（2001）綜合Brainbridge、郭靜姿、林秀柔、林美和、蕭金土等學者之研究列舉數學學習障礙學童的特徵如下：缺乏理解問題的能力、數學語言表達有困難、計算方面有困難、注意力不足、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足、視覺辨識有困難、記憶能力有缺陷、知覺缺陷、學習態度因素，詳如表2-1-1

表 2-1-1 數學學習障礙學童的特徵相關研究（林穎義，2001）

數學學習障礙學童的特徵	Brainbridge (1981)	郭靜姿 (2000)	林秀柔 (1989)	林美和 (1987)	蕭金土 (1995)
缺乏理解問題的能力	✓	✓			✓
數學語言表達有困難	✓	✓			✓
計算方面有困難	✓	✓			✓
注意力不足	✓		✓	✓	✓
對數學基本概念理解有困難	✓	✓	✓		✓
策略應用的能力不足	✓	✓		✓	✓
視覺辨識有困難		✓			✓
記憶能力有缺陷		✓	✓		✓
知覺缺陷		✓	✓	✓	
學習態度因素		✓			

侯禎塘（2004）認為具有數學學習困難的特教需求學童，在學習數學時可能面臨到如下列的難題：將數字看錯及寫顛倒、無法記住數字的基本概念、計算須複雜解題步驟的題目有困難、試題包含很多子題時，會將子題混淆、抄寫有困難、寫字潦草、花太多時間寫數字、建構數學試題上的困難、剛學會的技巧及概念，很容易又忘了、無法運用數學名詞或無法闡釋已理解的數學名詞、使用問題解決策略時，有選擇及監控上的困難。

由以上來看，因為數學學習障礙學童在使用問題解決策略時，有選擇及監控上的困難，所以本研究在教學時提供河內塔解題策略的流程圖（圖 3-1-2）幫助數學學習障礙學童監控自己的解題步驟。

資源班老師認為導致學習障礙學童出現解題錯誤類型的成因，最高前三項分別為「閱讀和數學表徵能力不好」、「注意力不集中易分心」、「理解和推理能力差」（林穎義，2001）。

由以上來看，因為學習障礙學童的數學表徵能力不好，所以本研究將蘊涵於河內塔遊戲內的型式概念，用紙卡的方式去引導學童從中體會型式的奧妙，此外，又因為學習障礙學童的注意力不集中易分心，所以本研究以河內塔遊戲的方式，企圖讓學習障礙學童從遊戲中學習、從操作中認知。

學習障礙的學童發生數學學習困難的原因，則可能有下列項目(洪儷瑜，1995)：符號閱讀困難、空間、序列、順序概念困難、語文閱讀困難、記憶能力有問題、缺乏數學學習策略、訊息處理困難、視知覺或視動作協調有問題、數學焦慮等。

本研究之受試者在符號閱讀、空間概念、序列概念、順序概念、語文閱讀、訊息處理等方面皆有困難；記憶能力較一般學童差很多，遇到數學就焦慮煩躁，明顯缺乏數學學習策略，所以以河內塔遊戲為內涵，提升其符號閱讀、空間概念、序列概念、順序概念、訊息處理等能力，直接教導其解題策略，用河內塔當媒介，從遊戲中去學習分類、型式和對應的數學概念，引起其學習動機，降低其數學的焦慮。

影響數學學習障礙學童解題錯誤的因素有：1. 注意力不集中易分心2. 缺少驗算3. 記憶能力差4. 受到過多挫敗經驗5. 理解和推理能力差6. 學習動機不足7. 策略運用能力不足林穎義（2001）。由於河內塔遊戲，寓教於樂，數學學習障礙學童容易形成學習的動機，操作的過程中，不易分心，容易集中注意力；一開始搬移圓盤的時候會有挫敗的感覺，但由於河內塔遊戲相當有趣，遊戲規則淺顯易懂，數學學習障礙學童在學習河內塔遊戲的解題策略之後，很容易獲得成功，從中建立對自我的自信心。

林穎義（2001）認為當資源班老師面對數學學習障礙學童的解題錯誤類型時，他們大多會選擇以「直接教學法」來進行補救教學，這是最快速、有效提昇數學學習障礙學童的學習效果和數學能力的補救教學法，其次，在教導需要多理解思考的問題中或解題態度信心不足的數學學習障礙學童時，「輔導發現教學法」被數學資源班老師使用的比例逐漸提高。

在河內塔遊戲的型式教學中，本研究採用直接教學給數學學習障礙學童充分的學習時間，一直要達到精熟的技巧才進入下一個學習階段。研究者透過工作分析，分析出教學計畫的步驟，決定出三個連續性的教學階段，然後實施一對一精準的教學，並由研究者設計與實施持續性的形成性成效評量，一直要達到精熟的技巧才能進入下一個學習階段。河內塔遊戲的型式教學符合輔導發現教學法，河內塔遊戲的型式教學將解決問題的作業細步化，甚至安排出解決河內塔搬移問題的作業順序，因為概念或原則的發現有時需要複雜的步驟，所以，將解決問題的作業細步化可以讓數學學習障礙學童免於迷失在龐雜、混亂的資料中。

秦麗花（1995）對於數學學習障礙學童的解題錯誤類型，將之分為四大類：（一）缺少檢驗工作，忽略答案合理性：有沒寫答案、沒寫單位、單位寫錯、不知答案為何、省略步驟、抄寫錯誤等現象，（二）執行計劃失誤，運算不熟練：有基本運算不熟練、不懂借位運算、二種運算混淆、顧此失彼等現象，（三）基本概念不清，盲目運算：有缺少相關概念知識、不懂數學語言、迷失於關鍵字中、加所有的數字、無法辨別數據大小、無法辨別數據間的意義、只停留 $+$ 運算缺少 $\times\div$ 概念等現象，（四）沒有解題能力與作答動機：有不曾閱讀、一知半解、畏懼作答等現象。

由以上可知數學學習障礙學童在數學學習上有執行計劃失誤、和沒有解題能力與作答動機的困難，河內塔遊戲教學屬於課外輔導方式，河內塔

遊戲教學可以當作一種訓練的媒材，讓數學學習障礙學童經由河內塔遊戲教學之後，可以養成「檢驗」的習慣，增加做計劃、和執行計畫的能力，並容易引起數學學習障礙學童探索的作答動機。

蕭金土（1995）曾在他的博士論文中，探討到數學學習障礙學童的學習行為特徵，在認知過程方面有序列問題，數學學習障礙學童沒有一對一對應的概念、會將計算步驟中算式的數字順序寫錯。在數學符號方面，數學學習障礙學童對大小區分及形狀辨識、問題的轉換有困難。

由以上可知數學學習障礙學童沒有一對一對應的概念、且問題的轉換有困難，河內塔遊戲教學提供訓練數學學習障礙學童一對一對應的概念建立的機會，並可以做圓盤大小區分的辨識訓練，協助數學學習障礙學童將所面臨的問題轉換成操作流程

二、數學學習障礙的相關研究

數學能力是解決日常生活問題的重要能力，亦是學習科學的基礎，因此在國民中、小學階段，數學被列為基礎的學習科目。然而，邱上真、詹世宜、王惠川與吳建志（1995，取自江美娟，2001）整理國內或是國外的正式或非正式的研究報告指出，數學科是國民中、小學學童最感學習有困難的學科之一，因此如何幫助數學學習障礙學童有效的學習數學是教育的重大課題。

國內外研究估計，大約有6%的學童有嚴重數學缺陷（陳麗玲，1993；Fleishner & Marzola, 1988，引自邱佳寧，2001），且隨著年級提高有增加的趨勢。由此可知，在學齡階段，有不少的數學學習障礙學童陷於解題的困境之中。研究者針對國內對數學學習障礙學童的研究整理如表 2-1-3：

表 2-1-3 數學學習障礙之相關研究

研究者	研究內容	研究方法	研究對象	研究發現
王瑋樺（2001）	數學學習障礙學童加法文字題解題歷程與補救教學之研究	質的研究。訪談、錄音錄影等。	國小三年級數學學習障礙學童	數學學習障礙學童之語文知識不足，嚴重影響數學學習等。
林淑玲（1998）	國小數學學習障礙學童對比較類加減應用題解題表徵之研究	質和量的研究。測驗、訪談、錄音等。	國小三、四年級數學學習障礙學童	學童在比較類加減應用題的解題表徵類型，使用「書寫符號」的類型佔 94%以上等。
陳家弘（1998）	建構教學對國小數學學習障礙學童解四則運算問題之研究	質的分析。錄影、教學日誌、隨堂紀錄、訪談	國小四年級數學學習障礙學童	數學學習障礙學童的解題策略有：括號的運用、運算式的列法、具體物為教具、偏好加減法等。

周台傑、蔡宗政 (1997)	國小數學學習 障礙學童應用 問題解題之研 究。	量的研究	國小三、四 年級數學學 習障礙學童 和一般生	較高國語文程度 之數學學習障礙 學童的數學解題 能力優力優於較 低國語文程度的 數學學習障礙學 童等。
邱佳寧 (2001)	國小數學學習 障礙學童解題 策略之研究	質和量的研 究。晤談、 同質性考驗	國小四年級 數學學習障 礙學童和普 通學童	數線圖則可以增 進數學學障學童 解題能力、減少錯 誤策略的使用
江美娟 (2001)	後設認知策略 教學對國小數 學學習障礙學 童解題成效之 研究。	單一受試實 驗設計模式 中的跨個人 多基線設計	國小三、 四、五年級 數學學習障 礙學童	數學學習障礙學 童在接受後設認 知策略教學後，能 增進其主動驗 算、檢查答案的行 為。
秦麗花 (1995)	國小數學學習 障礙兒童數學 解題補救教學 實施成效之比 較	實驗研究法	國小數學學 習障礙學童	接受自我教導組 的兒童實驗後，改 變為正向、積極 性、建設性自我語 言等。

茲將上述之研究結果分述如下：

王瑋樺 (2001) 在探討數學學習障礙學童解加法文字題之解題歷程中發現：(一) 數學學習障礙學童之語文知識不足，嚴重影響數學學習，(二) 數學學習障礙學童對語意知識的題目組織能力極需加強，(三) 語文知識的補救教學宜採口語佈題與圖片展示加以協助，(四) 語意知識的補救教學應引導學童組織題目語句深入思考等。

由以上可知數學學習障礙學童語文知識較缺乏，故在河內塔遊戲中，有一個測試數學學習障礙學童的擬定解題計畫能力之評量，就將較艱澀的步驟之專業用詞，改用較口語化的用詞，以降低數學學習障礙學童閱讀的負擔。

林淑玲（1998）的國小數學學習障礙學童對比較類加減應用題解題表徵之研究中發現：（一）學童在比較類加減應用題的解題表徵類型，使用「書寫符號」的類型佔94%以上，（二）在解題表徵提示的提示效果上，必須將數學學障學童的解題經驗從文字題的形式中，帶至親身經驗與角色扮演的表徵方式中，方能更正錯誤的解題表徵形式，（三）數學學障學童在比較類加減應用題中，出現解題表徵困難最多的是在解題表徵中「理解」階段，其中尤其以「關鍵字解題」的表徵困難類型居多等發現。

由以上可知數學學習障礙學童容易有錯誤的解題表徵形式，故在河內塔遊戲中，研究者指導數學學習障礙學童使用紙卡的方式去表徵整套的解題步驟，從這樣具體的表徵中，數學學習障礙學童可以從操作紙卡中漸漸形成型的概念。

陳家弘（1998）在建構教學對國小數學學習障礙學童解四則運算問題之研究發現：（一）數學學習障礙學童的解題策略有：括號的運用、運算式的列法、具體物為教具、偏好加減法、猜測多於嘗試、喜計算題不喜文字題、重視教師表情，（二）數學學習障礙學童進行數學解題的特徵有：認為自己的答是案對的、認為同學抄襲他的、表面判斷不重意義、直式運算、等號意義不明、不願多花時間、重答案輕過程、不願再思考、任意編算式、遺忘規則、遺漏答案、質疑同學能力而非邏輯問題，（三）建構式教學對數學學習障礙學童的影響有：藉由討論來確認本身的想法正確與否、增進同學討論的意願、願意接受別人不同的說法、大家有參與感願意與別人分享、增加學童的尊榮感。

由以上可知數學學習障礙學童的解題策略有以具體物為教具，故本研究採用河內塔遊戲，讓數學學習障礙學童在具體的操作中去學得型的認知概念；此外，數學學習障礙學童多半不願再思考，所以研究者主動提供解題策略讓數學學習障礙學童分三個階段去學習，如果數學學習障礙學童

可以學會整套河內塔遊戲的解題策略，就可以應用類化到去解決更深一層、更難的河內塔的搬移問題了。

周台傑、蔡宗政（1997）的國小數學學習障礙學童應用問題解題之研究也發現：（一）不論三年級或四年級，正常學童的數學解題能力，皆顯著優於數學學習障礙學童，（二）除問題整合分項外，四年級數學學習障礙學童的數學解題能力優於三年級數學學習障礙學童，（三）較高國語文程度之數學學習障礙學童的數學解題能力優於較低國語文程度的數學學習障礙學童。

由以上可知較高國語文程度之數學學習障礙學童的數學解題能力優於較低國語文程度的數學學習障礙學童，故在河內塔遊戲中，有一個測試數學學習障礙學童的擬定解題計畫能力之評量，就將較艱澀的步驟之專業用詞，改用較口語化的用詞，以降低數學學習障礙學童閱讀的負擔，把重點放在是否可以將已學得的型式概念表現在成功的擬定出解題的計畫上。

邱佳寧（2001）在國小數學學習障礙學童解題策略之研究發現：（一）數學學障學童解題正確率明顯低於普通學童，（二）數學學障學童解題錯誤原因較複雜。包含陳述句、關係句、問句理解困難、無法排除多餘訊息、目標監控錯誤；普通學童則以關係句理解困難為主，（三）數線圖則可以增進數學學障學童解題能力、減少錯誤策略的使用。

由以上可知數學學障學童解題正確率明顯低於普通學童，故本研究特地在數學學習障礙學童形成型式的認知概念之後，以口述紀錄的方式和排步驟卡的方式，去測試數學學習障礙學童是否有擬定解題計畫的能力，並測試數學學習障礙學童是否有問題解決類化的能力。

江美娟（2001）在後設認知策略教學對國小數學學習障礙學童解題成效之研究中發現：（一）數學學習障礙學童在接受後設認知策略教學後，能顯著增加其應用問題解題測驗的整體、多餘訊息、二步驟題型的得分，且在撤除教學四週後仍具有保留效果，（二）數學學習障礙學童在接受後設認知策略教學後，其應用問題解題測驗的一步驟题型得分並未能顯著增加，（三）後設認知策略教學能減少數學學習障礙學童在閱讀問題、分析問題上的錯誤，增進其對題意的瞭解，（四）後設認知策略教學能減少數學學習障礙學童使用關鍵字策略及猜測法來解題的情形，增進理解題意及圖示策略的使用，（五）數學學習障礙學童在接受後設認知策略教學後，能增進其主動驗算、檢查答案的行為。

由以上可知後設認知可以監控自己的行為，減少猜測的隨機性行為，增加其主動檢驗答案的行為，而本研究所教導數學學習障礙學童的解題步驟，是提供數學學習障礙學童在解決河內塔搬移問題時，時時監控自己的解題過程，減少猜測的隨機性行為，循序漸進的達到解決河內塔問題的目標，也是希望數學學習障礙學童在習得解題策略之後，能夠藉由監控自己的操作行為，而成功的達到解題目標。

由以上之研究或文獻上看來，可以發現在研究數學學習障礙學童型式的認知教學、訓練數學學習障礙學童高層次的邏輯推理，國內幾乎無人做相關之論文，故引發研究者想要研究數學學習障礙學童在學習型式認知概念的成果為何，訓練數學學習障礙學童高層次的邏輯能力。

第二節 數學學習障礙的教學法

數學學習障礙學童的數學教學法說明如下：

(一) 從具體學習到抽象學習漸進法：

強調數學學習是一種持續性與漸進性的學習，學童在學習數學的過程中，逐漸的建構其數學力量和增加其數學知識，從具體學習到抽象學習，從不完全的知識到完全的知識 (Ginsburg, 1997; Baroody & Ginsburg, 1991)。教導任一類別的數學，都可以在具體、半具體與抽象層面中進行學習 (Miller 和 Mercer, 1997)。

1. 具體層次：讓學童使用真實的材料或操作的教具，藉由身體的碰觸、移動或操作來解決數學問題。
2. 半具體層次：學童使用圖片、圖表、縮寫符號等代表具體物體，進行數學解題。
3. 抽象層次：學童逐漸以數字取代圖片或縮寫符號，最後直接以數字進行數學解題。

(二) 直接教學：

是改善學習障礙學童數學成就的有效教學法 (Carnine, 1997; Elliot & Shepiro, 1990)。直接教學強調充分的學習時間、達到精熟技巧的足夠練習和主要概念的重點教學 (Simmons & Kameenui, 1995)。其教學步驟如下：

1. 教師決定長程與短程的教學目標。
2. 教師經由工作分析計畫教學。
3. 教師實施精準教學。
4. 教師設計與實施持續性的評量。

(三) 認知學習策略教學：

目的在協助數學障礙學童習得數學的學習策略，以及主導和監控自己的數學學習活動。學童應用認知策略，進行自我對話和自我詢問，藉以解答數學問題。(Lerner, 2000, 取自楊坤堂, 2003)

(四) 輔導發現教學法：

輔導發現教學法，它是由美國Robert Underhill 所提倡的，是一種重視思考啟發之教學模式，它有明確的學習步驟，主要以形成概念或發現原則的順序將學習作業做適當安排，並以適當的啟發引導兒童發現數學知識。（劉秋木，1996，取自林穎義，2001）

(五) DISTAR 數學模式：

Englemann & Carnine (1972, 1975, 1976, 取自楊坤堂, 2003) 認為針對數學學習障礙學童的教學而言，DISTAR 數學模式是建立於精熟學習 (Mastery Learning) 的理論上，將複雜的作業程序分成小單元的技巧，並利用操作制約的原理教導學童，由教師示範如何將分類的技巧組合成更複雜的行為。

(六) 知覺動作訓練模式：

凱伯在一九六〇年發表「班級中的學習緩慢者」(The slow in the classroom)，這是他致力於學習緩慢者之補救教學的名著。他強調要為此等兒童施行「知覺—動作訓練」(perceptual-motor training)，需要動作的介入，經由知覺和動作的相互增強，構成穩定的知覺印象（包含視知覺、聽知覺），因為動作學習和知覺學習是息息相關的，知覺動作的發展是概念學習的基礎。抽象的認知能力是根源於具體的肌肉動作，凱伯說：「行為發展始自肌肉活動，而且吾人所謂高層次的行為，也是植基於低層次的動作，因此較高級的活動，係以肌肉的活動為基層結構」（許天威，2002）。

(七) 建構學習：

如果讓學童自己去發現或建構知識，並不容易，所以需要給兒童一些引導。這些引導包括以下幾項：

1. 發現問題與理解問題

對於老師或同學所提出的問題，能否以自己的話來說明，若可以則表示已了解，如不了解時，可與同學討論或由老師解釋。

2. 將解決問題的作業細步化

將解決問題的作業細步化，甚至安排出作業順序。概念或原則的發現有時需要複雜的步驟，兒童可能無法自己發現而迷失在龐雜、混亂的資料中，所以安排作業的步驟是需要的，至於如何找出解決問題的方針或策略？可以用討論的也可以由老師提示。

3. 以問題引導兒童思考

可以採用問問題的方式，引導兒童去發現他們所要的解答，幫他們發現新的觀念。如利用學過的策略來解決其他問題，以便發現其中規則或共同性，即其中的關係或計算的原理。

第三節 型式和遊戲

一、型式的重要性

皮亞傑與尹荷德(Piaget & Inhelder, 1964)在其合著之兒童的早期邏輯發展(或見陸有銓、華意蓉譯, 1989)一書中, 將「分類」與「序列」列為邏輯思維的二個重要內容; 而序列在某種意義上也是「型式」的一種。分類、型式、與序列三者都與辨識事物間的異同關係有關, 而辨識異同是邏輯思考的基礎(Worth, 1990, 引用周淑惠, 1999), 這三項相關邏輯的活動與學童之生活經驗密不可分。

分類可幫助我們經濟地、有效地處理環境中的事物, 可促進邏輯思考, 是數學推理的基礎; 在日常生活中洋溢著型式, 型式活動涉及高度的思考推理能力, 型式與概念的形成功能非常相近, 研究型式可以幫助學童學習辨識事物間的「關係」(周淑惠, 1999); 在幼兒的世界裡常有序列的經驗, 例如晨間律動時, 老師總是讓草莓班的小朋友依高矮順序排隊; 小茵從二歲起就開始把玩媽媽買的子母套盒; 冰淇淋店裡的甜筒按大、中、小尺寸排列供客人選購; 服飾店櫃架上的T恤按尺寸由大而小地陳列; 麥克筆盒裡的筆按顏色的深淺序列擺放。所以序列的能力和日常生活息息相關, 非常重要。

綜合以上所述, 分類與型式(包括延伸、探索、與創造型式)是數學思考的二個基本過程, 序列基本上也是型式的一種, 所以, 分類、型式和序列三者都可視為解決問題的一種型態, 這三種型態的活動均能提供發展邏輯推理能力的機會(Van De Walle, 1990, 引用周淑惠, 1999)。

研究者想讓數學學習障礙學童經由玩河內塔解題過程中之「分組活動」, 讓數學學習障礙學童學到依既定的規則做分類, 而讓數學學習障礙學童有效地操作河內塔, 減少隨機的動作行為, 學到問題解決。河內塔遊

戲包含很多型式，讓孩童經由搬移二個圓盤、三個圓盤的過程（型式），使其了解到這兩個型式之間的關係，而有能力去解決搬移四個以上圓盤的問題。此外，研究者觀察到數學學習障礙學童玩河內塔遊戲充滿興趣，可讓孩童經由教學活動而獲得情意方面的滿足。

二、型式的意義

「型式」(Pattern) 是指重複出現，有規則性的圖案、花樣、動作、聲音、或事件等；「型式辨認」意指辨識呈現於感官的一個重複性刺激 (Burton, 1985)，包含視覺（磁磚、地毯）、聽覺（兩種聲音重複出現）、肢體動作（兩種動作重複做）或自然現象（四季的輪替變化）的各種型式。

周淑惠 (1999) 認為邏輯推理本身的包含的層面很廣，其中的「分類」和「序列」是邏輯思維的兩大重要內涵（皮亞傑），而且「序列」在某種意義上也是「型式」的一種，二種關係密切，所以教導孩童「分類」和「序列」「型式」這三項邏輯內容的活動能提供發展邏輯推理能力的機會 (Van De Walle, 1990)。「分類」同時包含分別 (sorting) 和組合 (grouping) 兩個程序 (Charlesworth & Radeloff, 1985)，「分類」是處理一個類別內與不同類別之間的關係，可以促進邏輯思考，是數學推理的基礎，分類能讓人類經濟的、有效的處理環境中的事物。

有關序列能力，研究也證實學前兒童具有邏輯排序能力，比皮亞傑認定的年齡表現還要早。布萊那 (Brainerd, 1974) 發現三歲幼兒能知覺到三個順序排列的物體；柯斯勞斯基 (Koslowski, 1980, cited from Gross, 1985) 發現幼兒早在五、六歲之前就具有排序四根木棒的能力。

芮雷和蔡貝梭 (Riley & Trabasso, 1974, cited from Gross, 1985) 認為許多幼兒對遞移推理（即理解當「 $B > A, C > B$ 時， C 亦大於 A 」的關係）問題有困難是因為無法保留（記憶）所要推理事件的足夠資訊，遂以實驗來測試此一假設，研究證實了記憶與所獲資訊對幼兒的遞移推論具有實質的影響，若能獲得改善，必能增進幼兒的遞移推論能力（周淑惠，1999）。

三、遊戲的意義

遊戲，這耳熟能詳的字眼，許多時候我們並不困難分辨兒童是否在玩遊戲，但定義分歧（潘怡吟，2001；饒見維，1996；廖信達，2004；郭靜晃等，2005）。遊戲難以操作性定義界定它，但可以相關的觀點加以解釋，廖信達（2004）以遊戲的六項特徵來說明「遊戲」：（一）遊戲由內在動機引起，（二）遊戲重過程而輕結果，（三）遊戲具有歡樂的特徵，（四）遊戲沒有外在強加的規則（遊戲規則隨時可以溝通調整），（五）幼兒自願且主動參與遊戲，（六）遊戲是一種轉借行為，沒有固定的玩法。

由以上可知遊戲具有歡樂的特徵，且可自願且主動的參與，所以本研究才想要使用河內塔這樣的遊戲性質的教具，促使數學學習障礙學童能從遊戲中學習、從操作中認知，在歡樂與主動中建立型的概念。

郭靜晃等（2005），廖信達（2004）綜合心理學者對遊戲的定義：遊戲強調內在動機、自發性、自由選擇、具有正向的情感、能創造刺激、主動參與，同時屬於內在人格特質的向度。所以本研究就是希望數學學習障礙學童在本研究結束後，能在內在人格特質方面有所影響，可以使其注意力更加集中，提升其對數學的興趣。

饒見維（1996）認為數學科遊戲教學在遊戲功能與使用時機來說，強調「數、量、形」，可磨練學童在數和運算方面的能力。Piaget 認為知識是透過活動逐漸建構發展出來的，個體主動建構知識，並非被動接受知識，認知發展影響兒童的遊戲，亦即遊戲只是同化的過程。遊戲是一種複雜的行為，是兒童將內心想法表達出來的行為方式之一，遊戲可以讓兒童去探索、學習並形成經驗，用來理解周圍事物，當作應付未來實際生活所做的預習（潘怡吟，2001）。藉由遊戲，兒童能透過想像去滿足現實生活

中不能滿足的欲望（廖信達，2004）。郭靜晃等（2005）、廖信達，（2004）將兒童遊戲的原因，分成傳統兒童遊戲理論、現代遊戲理論，傳統兒童遊戲理論又分為（一）能量過剩和休養、鬆弛論：將遊戲視為能量的調節，（二）重演和本能演練論：將遊戲視為人類的本能；清楚的解釋遊戲存在的目的。

遊戲行為的定義可以分為七項：（一）遊戲是一種不經言傳（nonliteral）的行為，無固定模式，亦不能由外在行為或定義來區分，（二）遊戲出自內在動機，（三）遊戲重過程，（四）遊戲是自由選擇的，（五）遊戲具有正向的情感，（六）遊戲是主動的參與而且是動態的（七）遊戲著重自我，目的在創造刺激（stimulus creation），而不同於探索行為目的在獲得訊息：兒童在遊戲中重視的是：「我可以用這個物體來做什麼」，而探索行為則強調「這物體是做什麼的」。

由以上可知遊戲是出自內在動機、重過程、具有正向的情感，所以本研究才決定以河內塔這種遊戲的方式去學習數學的概念，並培養數學學習障礙學童主動學習，加強注意力等正向的情感。

廖信達（2004）認為好玩的遊戲具有七項特色：（一）覺得遊戲有趣好玩，（二）符合其能力，（三）能主動參與，（四）活動中的大部分時間都能參與活動，（五）遊戲規則明確可立即判斷，（六）遊戲提供社會互動機會，（七）允許其溝通協調變通遊戲的玩法。

本研究所採用的河內塔遊戲，連幼兒都可以玩得十分忘我，故符合大多數的數學學習障礙學童的能力，並能引起數學學習障礙學童主動參與的動機，且其遊戲規則十分簡單明確，讓數學學習障礙學童很容易在短時間內就愛上河內塔的遊戲，玩得欲罷不能。

四、遊戲的益處

傅秀媚（2004）認為遊戲提供一個不可或缺的環境來支持孩子認知、身體、心理、情緒及社會能力的發展。遊戲增加了學習機會。遊戲是天生的而且容易的，它助長個人的滿足感並建立積極、自我概念和成就感（Devoney, Curalnick, & Rubin, 1974, 取自傅秀媚, 2004）。

對學童而言，遊戲是他們生活中最重要的一件事，藉由遊戲活動，學童除了能夠增進身體的生理發展之外，更可以滿足其心理及社會的需要，所以，遊戲對兒童而言，可以說是一種快樂的學習及教育的方式，更是一種自我探索、自我成長最好的工具（蔡盈修，1993）。遊戲可以用來學習事務並解決問題。

五、遊戲的分類

從認知發展層面來看，Piaget (1962) 將遊戲分為三類：練習遊戲、表徵遊戲和規則遊戲。Smilansky (1968) 參照 Piaget 的分類，將認知遊戲修訂為四類：功能性遊戲、建構遊戲、戲劇性遊戲及規則遊戲。而河內塔遊戲能夠讓孩童反覆抓握和操弄，是屬於功能性遊戲，可以滿足感官的刺激和愉悅，河內塔遊戲也屬於建構遊戲，可以讓孩童「有目的」的完成遊戲。擬定從河內塔這種操作圓盤、邏輯思考的行動遊戲中去學習，以期能增進數學學習障礙學童之推理能力。

第四節 問題解決類化能力

一、問題解決類化能力的意義

問題解決能力的定義為個體在遭遇到問題時，能運用本身既有的知識或經驗等，然後加以應用，以解決個體所面臨的問題，而達到目的能力（曾望超，2003；張春興，1991；D' zurilla 和Nezu，1987，引自曾望超，2003）。

本研究之問題解決類化能力是指受試者在搬移四個圓盤的型式教學後，所獲得的知識或經驗，讓數學學習障礙學童解決搬移五個圓盤這個問題，驗證該受試者是否可以將搬移四個圓盤解題策略應用到搬移五個圓盤、複雜度較大的問題上。如果數學學習障礙學童可以將搬移4個圓盤的解題策略應用到搬移5個圓盤，亦即受試者可以運用所學的解題策略去解決搬移五個圓盤這個問題，可以用最少步數搬移5個圓盤、搬移成功的話，表示該數學學習障礙學童具有問題解決類化能力。

學校教育的重要任務之一就是在知識的傳遞與認知技能的教學，但我們可以發現：不管是知識的傳遞或是認知技能的教學，其主要的功能皆著重在於教導、培養孩子的問題解決能力。希望孩子能從豐富的知識領域中得到解決問題的方式、方法或經驗；從認知技能中獲得解決問題的技巧（曾望超，2003）。

而問題解決能力又是什麼？D' zurilla 和Nezu（1987，引自曾望超，2003）指出日常生活中，問題解決能力應包含下列幾個能力層面：（一）察覺問題存在並辨識問題性質的敏感度，（二）設法解決問題的能力，（三）逐步解決問題的能力，（四）預測後果的能力，（五）察覺行為動機的能力。

在型式教學之後，培養數學學習障礙學童在面對解決四個以上（五個）圓盤搬移的問題時，可察覺問題存在並辨識搬移五個圓盤時可以比照的型式，設法並逐步解決搬移五個圓盤的問題。

張春興（1991）認為問題解決指的是個體在遭遇到問題時，如何運用既有的知識去思考推理，找到適當的方法，達到目的歷程。Guilford（1997，引自李佳蓉）基於創造思考的觀點，認為新情境產生新反應便是問題解決。Pigat則認為個體在遭遇困難時，會先比對問題與自己的基模之關係，而後再予以同化或調適，以達成解決問題之目的（楊美雪，1994，引自李佳蓉）。因此，綜合許多學者的意見認為問題解決是指個體在遭遇到問題時，能運用本身既有的知識或經驗等，然後加以應用，以解決個體所面臨的問題，而達到目的的歷程。

數學學習障礙學童在遭遇到搬移五個圓盤的問題時，能運用本身在基本能力之養成，以及處理期學得的概念或經驗等，加以應用，以解決數學學習障礙學童所面臨的問題，而達到以最少步數、成功搬移五個圓盤的目的，就是一種問題解決類化的表現。

教師在設計培養數學學習障礙學童創造性問題解決能力之教學策略時，需針對問題發現、原因分析、問題對策假設、對策假設驗證和問題解決的概念整理等方面，提供數學學習障礙學童知識的探索和合作解決問題的機會。創造性的教學策略，可從問題導向、主題教學、情境教學和目標導向等方面，來培養數學學習障礙學童問題解決的能力（洪榮昭、曾愛晶，1999，引自張振松，2001）。

研究者利用工作分析，設計一套可以解決河內塔搬移問題的策略，提供給數學學習障礙學童學習，並從中發現型式的奧妙，藉由比照搬移 2 個

圓盤、或 3 個圓盤的搬移型式，數學學習障礙學童可在這套解題策略範圍中，自己選擇不同的搬移型式做比照、並自己決定解題步驟的先後，在習得的策略下，自己擬定計畫，將策略類化到更深一層的搬移問題上，設法解決問題、達成目標。

二、數學學習障礙學童之問題解決類化能力的重要性

以下是研究者針對有關問題解決能力的相關研究，做一歸納整理，綜合陳述如表2-5-1所示：

表 2-5-1 問題解決能力之相關研究

研究者	研究內容	研究方法	研究對象	研究發現
詹秀美(1989)	國小學童創造力與問題解決能力的相關變項研究	量的研究、統計分析	國小四、五、六年級學童	創造力與問題解決能力之間有顯著的關係等。
柳秀蘭(1993)	資優學童、普通學童、山地學童創造力與問題解決能力之比較研究	量的研究、統計分析	國小資優學童、普通學童、山地學童	資優學童在問題解決測驗的五項基本能力及總分均顯著地優於普通學童與山地學童等。
李佳蓉(1996)	電腦益智遊戲對國小高年級學童的推理能力、問題解決能力及電腦態度之影響	實驗研究法、量的分析	國小六年級學童	控制組與實驗組之男女學童在實驗處理、性別及交互作用上，其問題解決能力無顯著差異等。
吳坤銓(1997)	國小學童認知能力、問題解決能力與創造力之相關研究	文獻探討法、問卷調查法	國小四、六年級學童	問題解決能力的總層面一般而言，女生有優於男生的現象等。
葉安琦(2000)	促進國小學童創造性問題解決能力的個案研究	詮釋研究法、問卷、訪談	國小教師、國小學童	個案學童對問題從最初的單一表徵，發展成為對問題多元性、豐富性、結構性的表徵結構，正是個案創造性問題解決能力的具體表現等。
曾繁鈞(2001)	社會科創造性問題解決教學對國小學童創造性、問題解決能力及社會	準實驗研究法之不等組前後測設計、統計分析	國小六年級學童	社會科創造性問題解決教學對國小六年級兒童問題解決能力方面，實驗組和控制組在逆向原因

	科學業成就			猜測並未顯著差異等。
張振松(民90)	自然科創造性問題解決教學對國小學童創造力及問題解決能力之研究	準實驗研究法	國小學童	接受創造性問題解決教學的實驗組學童在解釋推論、猜測原因等均顯著高於接受一般教學的控制組學童等。
趙梅華(2001)	電腦冒險遊戲對國小高年級學童的創造力、問題解決能力與成就動機之影響	準實驗研究法之不等組前後測設計、統計分析	國小五年級學童	國小高年級男女學童，於電腦冒險遊戲教學活動結束後，在「問題解決測驗」總量表與各分量表上的後測得分未達顯著差異等。
呂素雯(2002)	自然科創造性問題解決教學對國小六年級學童問題解決能力、態度及學習成就之影響	文獻探討、準實驗設計研究	國小六年級學童	透過創造性問題解決教學，能夠顯著增進國小六年級學童的問題解決能力等。
劉淑雲(2002)	臺灣中部地區國小學童問題解決能力及其相關因素之研究	問卷調查法	國小四、六年級學童	國小中高年級學童問題解決能力均屬中上以上等。
曾望超(2003)	國小教師創意教學與學童後設認知能力、創造力及問題解決能力之相關研究	問卷調查法	國小六年級導師及學童	國小六年級學童的問題解決能力，會因接受創意教學的程度不同而有顯著差異等。

由以上的問題解決能力的相關研究來看，研究者們在研究問題解決能力時，幾乎都是以普通學童或資優學童當做研究的對象，因為問題解決能力對數學學習障礙學童而言太難，所以研究問題解決能力時都挑選學習上無障礙的學童在研究。就以上的情形，研究者為了增進數學學習障礙學童

的問題解決方面的能力，故設計了一個河內塔遊戲的型式教學策略，數學學習障礙學童在學習之後，可以將此策略類化到解決更複雜的問題上，進而增進數學學習障礙學童的問題解決之類化能力。綜而言之，研究者以河內塔遊戲的型式教學策略設法去提升數學學習障礙學童的問題解決類化能力，因為問題解決能力太難，所以，退而求其次，希望在教學之後可以增進數學學習障礙學童的問題解決類化能力，而不是問題解決能力。

數學學習障礙學童很少有問題解決類化的經驗，所以研究者才特地做數學學習障礙學童在型式認知的研究，期望藉此提升數學學習障礙學童的問題解決類化能力，給數學學習障礙學童一個問題解決類化能力的經驗，對數學學習障礙學童而言，相當難能可貴；如果數學學習障礙學童有了問題解決類化能力的經驗，就可以激發其潛能，將問題解決類化能力用在解決日常生活的問題上。問題解決類化能力對數學學習障礙學童而言相當重要，可以解決日常生活的問題，提升生活的品質與自信心。

有關問題解決能力之研究說明如下：

曾望超（2003）在國小教師創意教學與學童後設認知能力、創造力及問題解決能力之相關研究發現：（一）教師創意教學與學童問題解決能力有密切關係，（二）國小六年級學童的問題解決能力，會因接受創意教學的程度不同而有顯著差異。

由以上研究可知問題解決能力，會因接受創意教學的程度不同而有顯著差異，但由於本研究的學生屬於數學學習障礙學童，甚少有成功的問題解決經驗，所以由研究者主動提供一個問題解決的策略，教導學習障礙學童，提供數學學習障礙學童問題解決的成功經驗，寄望數學學習障礙學童在研究之後，因為有了許多成功的問題解決經驗，在日後養成事先擬定計

劃的習慣、可以更有自信的設法解決所遇到的問題。

吳坤銓（1997）在國小學童認知能力、問題解決能力與創造向之相關研究發現：問題解決能力的總層面與除了「解釋推論」與「預防問題」之外的各分項基本能力而言，女生有優於男生的現象；六年級則全面性的優於四年級。

呂素雯（2002）自然科創造性問題解決教學對國小六年級學童問題解決能力、態度及學習成就之影響發現：（一）在整體問題解決能力，變通性、有效性、界定問題等能力方面，國小六年級女生顯著優於男生，（二）透過創造性問題解決教學，能夠顯著增進國小六年級學童的問題解決能力。

本研究的正式研究的對象包含不同年級、不同性別的數學學習障礙學童，可以在評量結束後，探討不同年級、不同性別是否對研究的結果造成某些影響。

柳秀蘭（1994）的資優學童、普通學童、山地學童創造力與問題解決能力之比較研究發現：（一）普通學童在問題解決測驗的五項基本能力及總分均顯著地優於山地學童，（二）資優學童在問題解決測驗的五項基本能力及總分均顯著地優於普通學童與山地學童，（三）三組學童在五項基本能力及總分上，年級間均有顯著的差異存在，且隨著年級的升高而增高。

由以上的研究知道年級間均有顯著的差異存在，且隨著年級的升高而增高，似乎國小學童彼此間的年級（年齡）的成熟度、身心智力的成熟度，不同年級對研究的結果都有顯著的差異，故本研究挑選不同年級、但同等素質的數學學習障礙學童做研究，可以探討不同年級對河內塔遊戲的型式認知是否有差異。

曾繁鈞(2001)的社會科創造性問題解決教學對國小學童創造性、問題解決能力及社會科學業成就之影響發現：社會科創造性問題解決教學對國小六年級兒童問題解決能力方面，實驗組和控制組在逆向原因猜測並未顯著差異，而在解釋推論、猜測原因、決定解決方法、預防問題有顯著差異。

綜合言之，由以上的研究，可以發現問題解決的相關研究幾乎都偏重在資優兒童或一般兒童的研究，對學習障礙兒童而言，問題解決似乎是一個少有的經驗，故研究者想利用河內塔遊戲，這樣的一個遊戲的媒介，讓數學學習障礙學童可以從中獲得問題解決的經驗，品嚐到其人生少有的問題解決經驗，期望其人生在研究後有所啟發或改變。

第三章 研究方法

本章共分成五節，包括研究程序、研究設計、研究對象、研究工具、教學材料等五部分。

第一節 研究程序

一、解決河內塔遊戲問題之策略的研究過程

本研究在受試者的操作過程中，研究者立於引導的地位，讓受試者練習移動 2 個和 3 個圓盤，經過不斷的嘗試錯誤，漸漸地建立其解題基模（認知結構經驗），等到個體遇到要搬移 4 個以上的圓盤（複雜的工作）時，就可以比對簡單的工作，亦即比對 2 個和 3 個圓盤的解題基模經驗的關係，再予以同化、類化兩種不衝突的情境，以達到解決問題的情境，達成解決問題的目的。

（一）研究流程

本研究的研究流程，大致如圖 3-1-1 所示。在研究的歷程當中，教師經由數學學習障礙學童的實際操作河內塔的遊戲過程當中，不斷的進行河內塔遊戲的工作分析，企圖將複雜的操作歷程，予以簡單化。同時，針對較細部的分析之後，發展出河內塔遊戲的解題策略。也就是在河內塔遊戲的工作分析、發展河內塔遊戲的策略及數學學習障礙學童操作河內塔遊戲三者之間，不斷的進行修正，以期能完成河內塔遊戲的目標工作。

此外，本遊戲實驗使用名片紙，加上撲克牌，製作出簡單、硬度夠的「紙卡」，用它來協助數學學習障礙學童，紀錄思考歷程。

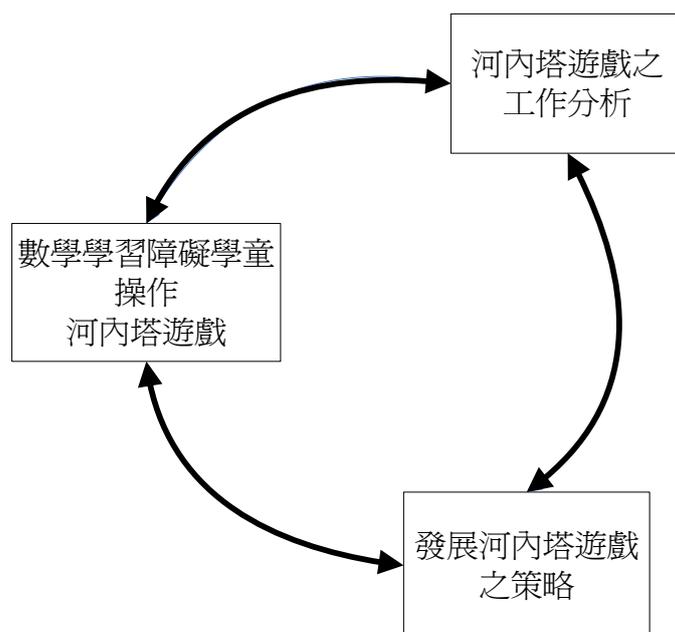


圖 3-1-1 解決河內塔遊戲問題之策略的研究流程

(二) 操作流程

河內塔遊戲屬於一種智力的數學遊戲，同時操作的過程也有「鏡射」的成分，是一個有趣，又富有教育意義的遊戲，藉由「工作分析」找出解決河內塔遊戲「最後的工作特徵」，亦即找出達成任務的先備技巧，先讓數學學習障礙學童自己解決問題，達成通過「2 個或 3 個圓盤的基本模式」的目標，養成搬移 2 個和 3 個圓盤的基本能力。因此為達成此目標，及更進一步完成更高階的目標，本研究的操作流程大致如下：

1. 教師說明河內塔遊戲的規則（遊戲規則及說明步驟如後所述）。
2. 數學學習障礙學童操作 2 個圓盤的遊戲（基本能力）。
3. 數學學習障礙學童操作 3 個圓盤的遊戲（基本能力）。
4. 數學學習障礙學童操作 4 個圓盤以上的遊戲（進階的目標）。

整個型式教學的過程當中，數學學習障礙學童不斷的進行自我分析、從搬移的過程去體會河內塔蘊涵的搬移型式，配合搬移的型式，去思考

搬移步驟的順序應該為何，才可以用最少搬移步數、成功的達成搬移目標；教師並輔以漸進式的引導，使數學學習障礙學童在嘗試錯誤及反覆練習當中，能夠發現問題的解題策略。

- 河內塔遊戲的規則：

依規則從指定的木柱上全部移動至另一根木柱上，其規則有三：

規則一：直徑大的圓盤不可以壓住直徑小的圓盤。

規則二：一次只能移動一個圓盤。

規則三：不能將圓盤移到柱子以外的地方。

註：搬移 n 個圓盤數，其最少的移動次數可以證明是 $2^n - 1$

- 河內塔遊戲說明的步驟：

一、 初期接觸河內塔遊戲時

(一) 指導者口頭說明，並反覆的操作。

(二) 指導者一邊口頭說明，一邊幫助數學學習障礙學童操作。

二、 進入實驗處理期時

(一) 指導者依河內塔遊戲操作流程圖（圖 3-1-2）的步驟，口頭說明，並示範操作。

(二) 指導者一邊口頭說明，一邊幫助數學學習障礙學童操作。

(三) 數學學習障礙學童模仿指導者操作。

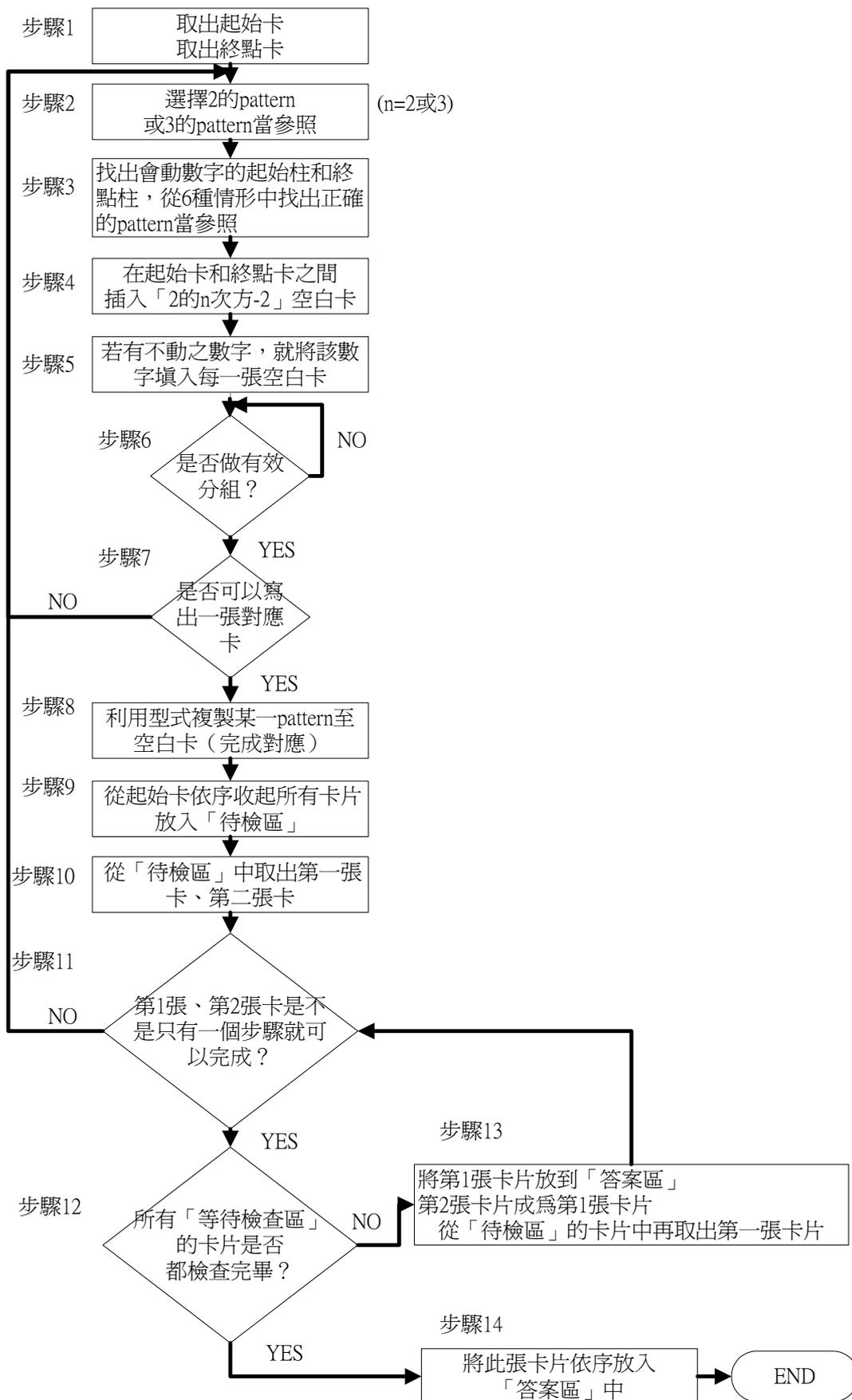


圖 3-1-2 河內塔遊戲操作流程圖

二、本研究整體之研究程序

本研究的主要架構如圖3-1-3，首先確定研究主題，探討河內塔遊戲內涵中型式（包含序列）、對應，藉以研究認知能力、與問題解決類化之能力，接著花大量時間研擬河內塔之解決策略，之後決定研究對象，並加以篩選，擬定教學活動，確定實驗流程與細節後進行教學實驗，並於實驗教學之後進行資料的處理與分析，最後撰寫研究報告，完成結果的分析探討、並做檢討，形成結論。

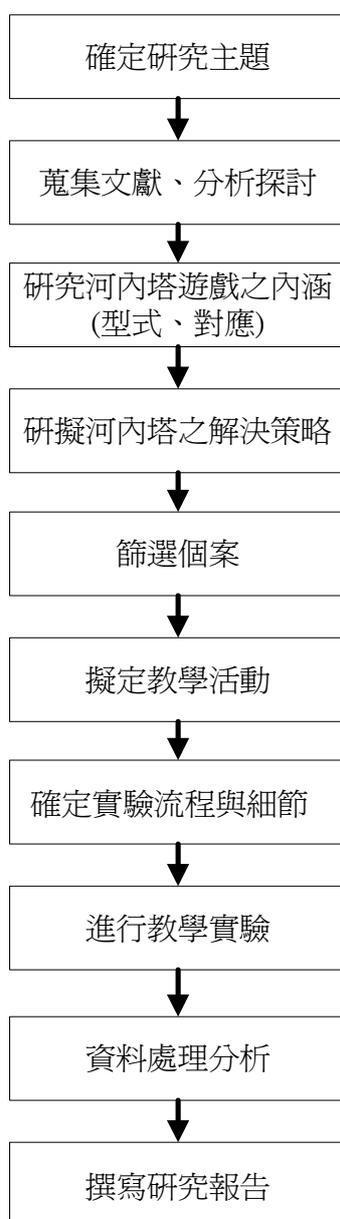


圖3-1-3 本研究整體之研究程序

第二節 研究設計

一、實驗設計

本研究採用單一受試研究方法 (single subject research design) 中的跨受試多基線設計 (multiple baseline across individuals)，原因有五：

- (一) 由於本研究的對象為數學學習障礙學童，研究過程中不易取得合適的大樣本。
- (二) 由於數學學習障礙學童的學習特徵不適合進行大班級教學，故採單一受試研究方法，以了解受試的個別化行為表現及教學方法的成效
- (三) 大樣本的統計數無法適當描述個人個別化行為表現，也容易掩蓋數學學習障礙學童個別差異大的事實 (郭生玉，民75)，而單一受試研究法可將個體表現的變化過程逐一呈現。
- (四) 單一受試法的特色在於複製實驗結果，透過不斷重複之前的教學來確認依變項的改變是由於自變項介入的結果，而不是由於其他變項造成的結果，所以有很好的內在效度 (杜正治，民83)。
- (五) 多試探設計不需要持續不斷的搜集基線期的資料，避免因持續施測帶來的負面影響，如煩躁、挫折感和意願低落等 (杜正治，民83；葉淑欣，民90；取自劉光漢，民94)

本研究在資源班以小樣本方式來實施，目的在探討以河內塔為內涵的型式、對應之教學認知活動對國小數學學習障礙學童操作河內塔遊戲之表現成效。為了了解河內塔遊戲之教學對國小數學學習障礙學童在型式、對應能力，故在實驗處理期階段，受試者除了接受河內塔遊戲問題解決的策

略教學，並以「形成性成效評量」隨堂評量，藉以評估其其學習的效果。

為了解河內塔遊戲之教學對國小數學學習障礙學童之問題解決類化能力之影響，於單一受試研究方法結束後，讓數學學習障礙學童解決搬移五個圓盤這個問題，驗證該數學學習障礙學童在教學之後，是否可以將搬移四個圓盤解題策略類化到搬移五個圓盤、複雜度更深一層的問題上。

為探討以河內塔為內涵的型式、對應之教學後，數學學習障礙學童可否發現包含在河內塔遊戲中的型式、對應是什麼？是否理解型式概念，增強型式認知？研究者予以受試者訪談、測試並加以分析。本研究的實驗階段與程序圖如圖3-2-1 所示。

	(A)	(B)	(C)	型式認知
基本能力 搬移 2、3 個圓盤基本能力之養成	基線期 甲 基線期評量	實驗處理期 型式之教學處理 形成性成效評量 (一)(二)(三)	追蹤期 短期保留成效評量 2 次 長期保留成效評量 1 次	擬定解題計畫能力 問題解決類化能力 (搬移五個圓盤) 探討是否為理解型式概念 (訪談、評量)
	乙 基線期評量	型式之教學處理 形成性成效評量 (一)(二)(三)		
	丙 基線期評量	型式之教學處理 形成性成效評量 (一)(二)(三)		
	基線期評量 3-4 次	形成性成效評量 12-14 次	保留成效評量 3 次	

圖3-2-1 實驗階段與程序圖

本研究的實驗階段與所用到的評量單、訪談單或檢核表（各附錄）如表3-2-1 所示。

表3-2-1 實驗階段與各階段所用到的評量單、訪談單或檢核表之對照表

基本能力	(A)	(B)	(C)		認知型式		
	基線期	實驗處理期	追蹤期				
附錄<一>		階段一 附錄<四>：形成性成效評量（一） 階段二 附錄<五>：形成性成效評量（二） 附錄<六>：形成性成效評量（二） 階段三 附錄<七>：形成性成效評量（三） 三個階段之正確率 ：附錄<八>	附錄<十> ↓	附錄<十一> ↓	附錄<十四> ↓、 附錄<十五>	附錄<十六> ↓	附錄<十七>、 附錄<十八>、 附錄<十九>
附錄<二>	附錄<三>	附錄<九>	附錄<十二>		附錄<十三>		
	基線期、處理期、追蹤期之最少步數之次數，統整在：附錄<十三>						

（一）基本能力

受試者在指導下，培養搬移「河內塔遊戲2、3個圓盤」基本能力。搬移2、3個圓盤時，受試者必須不斷的嘗試錯誤，直到附錄<一>型式的基本能力評量（一）連續三次的得分均在八分以上，而且在附錄<二>型式的基本能力評量（二）中，測試數學學習障礙學童由A柱、B柱或C柱搬移2個圓盤、3個圓盤到指定的其他柱，如果連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成，就可得10分，換句話說，在不同時間連續收集到資料有三次測驗是10分，表示該數學學習障礙學童具備搬移2個圓盤，和搬移3個圓盤之型式的基本能力，則該數學學習障礙學童才有資格當作樣本，而接著進行其搬移4個圓盤資料點的收集。

受試者必需要具備搬移2、3個圓盤的基本能力，才能進入基線期。要具備搬移2、3個圓盤的基本能力，受試者本身需要有一般程度的注意力；學習障礙者若其注意力嚴重缺陷者，對具備搬移2、3個圓盤這種基本能力會有困難，而無法成為本實驗的樣本。

（二）基線期（A）

此階段研究者不實施教學，進行搬移「河內塔遊戲搬移4個圓盤」資料的收集，以掌握受試者操作河內塔遊戲的起點能力狀態。

具備搬移2、3個圓盤（pattern）的基本能力後，開始進行搬移「河內塔遊戲4個圓盤」之資料收集，受試者的表現用附錄<三>（搬移河內塔4個圓盤起點能力之操作結果評量），計算出現○（○表示用最少步數搬移成功）的總個數，將收集到的資料值畫入單一受試的圖表（圖4-1-1小憲、圖4-1-2小彥、圖4-1-3小儒）中。

（三）實驗處理期（B）

當受試者甲的基線資料趨於穩定之後，隨即使用研究者自編之型式、對應之教學進行實驗處理，依「搬移4個圓盤」河內塔遊戲的操作流程（圖3-1-2），將教學分成基本能力的養成，以及三個階段，說明如表3-2-2。

受試者甲進行教學時，受試者乙仍持續進行基線資料之蒐集，當受試者甲的實驗處理期資料趨於穩定之後，隨著使用研究者自編之河內塔遊戲教學活動進行受試者乙的實驗處理，此時受試者丙仍持續進行基線資料之蒐集。介入方式平均每位數學學習障礙學童為一星期三至四次，每次40分鐘，共12至16堂課。於每堂課結束之前十分鐘，給予受試一次「形成性成效評量（一）、（二）、（三）」（見附錄<四至七>），每位數學學習障礙學童平均計有12至16次形成性成效評量。

學習使用紙卡來解決河內塔遊戲的解題策略，因為要具備一些型式的基本概念，整套學完大約需要花十堂課的時間，無法一次學完，所以研究者將整套解題策略分成三個階段，包含學習形性評量（一）、（二）、（三），每個階段評量至少評量三次，取得至少三個資料點，該數學學習障礙學童必須連續得到三個8分，才可以進行下一個階段的學習，否則必須繼續學習及評量，也就是說，如果連續三次的評量都得到8分，表示該數學學習障礙學童對此一階段的熟練度達到通過的水準，就可以進行下一個階段的學習。

將河內塔遊戲整套解題策略分成評量（一）、評量（二）、評量（三）三個階段，如同學習九九乘法表一樣，數學學習障礙學童無法一次就從2的九九乘法背誦到9的九九乘法，必須分階段學習，假設依難度平均分成三個階段，把第一個階段背誦穩固之後才進入第二階段，在第二階段中，有複習第一階段學過的九九乘法，也有學習新的九九乘法，待學過的九九乘法都達到某一個通過的水準之後，才進入第三階段的學習，這樣分階段的學習，才能使數學學習障礙學童有足夠的時間做吸收，才能真正的學會整套的策略。

數學學習障礙學童具備搬移2、3個圓盤的基本能力後，想要解決搬移4個圓盤的問題，必須從要搬移的4個圓盤中進行分堆（分成2、或3堆）的猜測，對分堆的問題，不斷探索哪一種分堆有效，將分堆的各種情形紀錄在附錄〈五〉，最後導致如何分堆成功操作的發現，此舉有助於河內塔遊戲問題的思考和解題能力的開拓。

讓數學學習障礙學童體驗解決問題的過程，老師引導問題解決後的反思，逐步學會分析問題、解決問題的方法。期待數學學習障礙學童能將所學的數學解題策略，應用於生活中，並解決生活中的問題。

表 3-2-2 研究者自編的河內塔遊戲教學

階段名稱	步驟	解題步驟目標	型式認知	教學內容	形成性成效評量單
階段 0： 基本能力	1	取出起始卡 取出終點卡		研究者決定起始柱和終點柱，讓數學學習障礙學童搬移 2 個或 3 個圓盤	型式的基本能力評量： 附錄〈一〉和 附錄〈二〉
	2	選擇 2 的 pattern 或 3 的 pattern 當參照 (n=2 或 3)	✓		
階段一	3	目標 1：找出非固定數字的起始柱和終點柱 目標 2：從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照	✓	1. 找出非固定數字的起始柱和終點柱 2. 從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照	附錄〈四〉
	4	在起始卡和終點卡之間插入「 $2^n - 2$ 」空白卡	✓	要插入正確的空白卡張數（準備「空白卡」）	形成性成效評量（一）
	5	目標 3：找出固定不動之數字 目標 4：將固定不動之數字填入每一張空白卡	✓	找出固定不動之數字，將該數字填入每一張空白卡	
階段二	6	目標 1：是否做有效分堆？		分堆後，操作看看（邊記錄過程）是否可以成功	附錄〈五〉
	7	目標 2：是否可以寫出一張對應卡		寫出「4 個圓盤分成 3 組、和分成 2 組」的對應卡	分堆紀錄表和 和
	8	目標 3：利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）		利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）	附錄〈六〉 形成性成效評量（二）
	9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」		檢核表： 可否完成此動作	

階段三	10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡		檢核表： 可否完成此動作	附錄<七> 形成性成效 評量（三）
	11	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？	✓	檢核表： 可否回答正確	
	12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？		檢核表： 可否完成此動作	
	13	將第1張卡片放到「答案區」、第2張卡片成爲第1張卡片、從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片		檢核表： 可否完成此動作	
	14	將此張卡片依序放入「答案區」中		檢核表： 可否完成此動作	

（四）追蹤期（C）

實驗處理之後之一個星期，和兩個星期，對受試者實施「短期保留成效評量」（見附錄<十>）共兩次，藉以了解教學短期保留之成效。待教學撤除一個月之後，再施予「長期保留成效評量」（見附錄<十一>）一次，以了解教學長期保留之成效。

（五）型式認知

1、擬定解題計畫能力：

此階段，研究者讓數學學習障礙學童運用紙卡成功解決搬移4個圓盤和搬移5個圓盤的問題後，測試數學學習障礙學童是否可以口述出自己剛剛所設計的解決「搬移4個圓盤」問題的解題計畫，研究者將數學學習障礙學童所設計的解決搬移4個圓盤的解題計畫，記錄在附錄〈十四〉，測試數學學習障礙學童是否可以排列出解決「搬移5個圓盤」的解題計畫，記錄在附錄〈十五〉，數學學習障礙學童將其操作的過程用自己的話，有順序的說出來，或是將解題步驟用排列名片卡的方式排列出來，這就是數學學習障礙學童自己思考所設計的解題計畫。將數學學習障礙學童口述的、或排列的解題計畫流程和河內塔遊戲操作流程圖（圖3-1-2）的項目做核對，如果主要的項目和邏輯順序都有口述或排列出來，表示該數學學習障礙學童在解決河內塔的搬移問題時，具有擬定解題計畫的能力。

2、問題解決類化能力

研究者讓數學學習障礙學童嘗試解決搬移5個圓盤這個問題，藉以驗證該數學學習障礙學童在實驗教學之後，是否可以將搬移4個圓盤解題策略應用類化到搬移5個圓盤、複雜度更深一層的問題上，此時，研究者使用附錄〈十六〉的十四條項目來檢核該數學學習障礙學童問題解決類化的能力。

3、探討是否為理解型式概念，增強型式的認知

為探討以河內塔為內涵的型式、對應之教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中的型式、對應中的規則是什麼？如果他可以全部操作完畢，是否代表理解型式概念，有增強型式的認知？研究者依自編的訪談紀錄單（附錄〈十七〉）、型式認知評量單（附錄〈十八〉、附錄〈十九〉），予以受試者訪談並加以分析。

二、實驗教學架構及變項

(一) 實驗設計架構

本研究旨在利用以河內塔為內涵的型式之教學，探討數學學習障礙學童在型式、對應之學習成效、保留成效、以及教學後，擬定解題計畫能力、問題解決類化能力之影響，並探討受試者在實驗教學之後，是否為理解型式概念，增強型式的認知。實驗教學架構如圖3-2-2 所示。

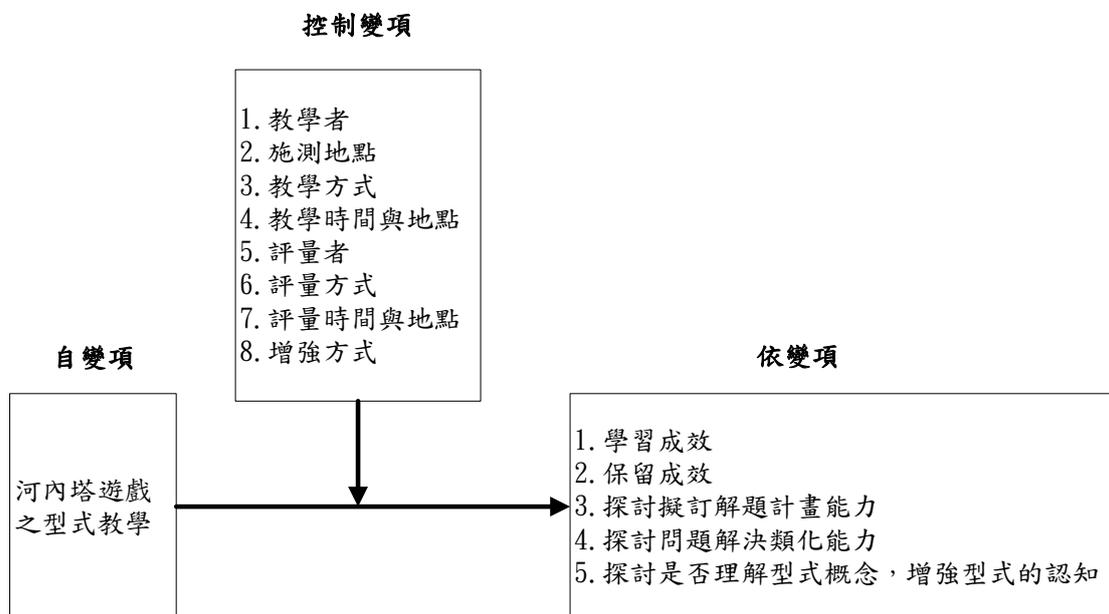


圖3-2-2 實驗設計架構圖

(二) 自變項

本研究的自變項為「以河內塔為內涵的型式、對應之教學」，並以一對一個別化教學方式進行教學。以河內塔為內涵的型式、對應之教學見本章第四節之說明。

(三) 依變項

本研究的依變項包含在型式、對應實驗教學後之學習成效、保留成效，以及探討數學學習障礙學童之擬定解題計畫能力、問題解決類化能力，及探討是否理解型式概念，增強型式的認知，說明如下：

1. 教學之學習成效、保留成效：

本研究的依變項中的「教學之學習成效、保留成效」，可由單一受試法的圖表所呈現出來的基線期、實驗處理期、追蹤期中出現「以最少步數搬移」的次數多寡去看出教學整體之學習成效（附錄〈十三〉）。

(1) 教學之學習成效：

實驗處理期共分成三個階段，有形成性成效評量（一）、形成性成效評量（二）、形成性成效評量（三），見附錄〈四至七〉。每個形成性成效評量的最高分為10分。在形成性成效評量（一）中，必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，亦即第一階段的學習成效達到穩定，才能進入實驗處理期的第二個階段之學習。在實驗處理期第二個階段之形成性成效評量（二）中，必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，亦即第二階段的學習成效達到穩定，才能進入實驗處理期的第三個階段之學習。

將測試的得分均化為百分比，可以看出該數學學習障礙學童在三個階段中形成性成效評量的正確率之變化（附錄〈八〉）。

(2) 教學學習之保留成效：

為完整評估受試者的學習表現，在實驗處理後一週、第二週及一個月之後，分別對受試實施「短期保留成效評量」（附錄〈十〉）及「長期保留成效評量」（附錄〈十一〉），以受試在上述兩項測驗中之得分為認定基準，最高為10分，如果受試者的分數都在八分以上，表示這個教學的學習，有其保留成效。

2. 擬定解題計畫能力之影響：

擬定解題計畫能力係指當數學學習障礙學童運用紙卡成功解決搬移 4 個圓盤和搬移 5 個圓盤的問題後，測試數學學習障礙學童是否可以口述出或排列出自己剛剛所設計的、解決搬移 4 個圓盤和搬移 5 個圓盤，這兩個問題的解題計畫。

數學學習障礙學童將解決搬移 4 個圓盤和搬移 5 個圓盤兩個問題的操作過程用自己的話，有順序的說出來或排列出來，這就是數學學習障礙學童自己思考所設計的解題計畫。將數學學習障礙學童口述的解題計畫流程和河內塔遊戲操作流程圖（圖 3-1-2）的項目做核對，如果主要的項目和邏輯順序都有口述出來，表示該數學學習障礙學童在解決河內塔的搬移問題時，具有擬定解題計畫的能力。

搬移 4 個圓盤的解題計畫是讓數學學習障礙學童採用口述的方式，將整個解題流程說出來、老師紀錄，記錄在附錄〈十四〉。而搬移 5 個圓盤的解題計畫是將 14 個解題步驟貼在名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供數學學習障礙學童取用，數學學習障礙學童去挑選適當的步驟卡排成一串自己的解題過程，亦即將整個解題計畫用步驟卡排列出來，老師將之做成紀錄，記錄在附錄〈十五〉。

河內塔遊戲型式的實驗教學讓數學學習障礙學童有擬定解題計畫的經驗，培養其擬定解題計畫能力，養成做計畫的習慣（使用策略），可以減少數學學習障礙學童隨機化的行為，以期將來做事更有效率。

3. 問題解決類化能力之影響：

問題解決能力之影響意指受試者在單一受試研究方法結束後，讓數學學習障礙學童解決搬移五個圓盤這個問題，驗證該受試者在實驗教學之後，是否可以將搬移四個圓盤解題策略應用到搬移五個圓盤、複雜度更深一層的問題上。此時，研究者使用附錄〈十六〉的十四條項目來檢核該數學學習障礙學童問題解決類化的能力。如果受試者可以運用所學的解題策略去解決搬移五個圓盤這個問題，就代表教學對問題解決能力之增進有影響。

4. 探討是否理解型式概念，增強型式的認知：

為探討以河內塔為內涵的型式、對應之教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中的型式、對應是什麼？如果他可以全部操作完畢，是否代表理解型式概念，而增強型式的認知？研究者將予以受試者訪談、測驗並加以分析（見附錄〈十七〉、附錄〈十八〉、附錄〈十九〉）。

資源班老師大多採用「直接教學法」來對MLD數學學習障礙學童進行補救教學；其次是採用「輔導發現教學法」，但晤談的結果都傾向於採用「實物操作教學法」（林穎義，民90），故本研究在探討數學學習障礙學童的學習是否理解型式概念，而增強型式的認知，也就採取一邊讓數學學習障礙學童操作，一邊思考回答老師的提問的方式進行。

(四) 控制變項

本研究為減少對自變項之干擾，其控制變項如下：

1. 施測地點：施測地點均在同一間教室。

2. 教學者：

實驗處理階段所有教學活動均由研究者擔任，避免因不同教學者實施教學所造成之偏誤。

3. 教學方式：

本研究於實驗處理期所實施之教學課程，對三位受試者，皆以研究者自編之型式、對應之教學作為實驗處理期之主要教學方式，避免因教學方式之不同造成效果之偏誤。

4. 教學時間與地點：

平均每位數學學習障礙學童之教學時間為每週四節，每節四十分鐘，實驗處理期的教學活動分成三個階段，在第一階段的教學中，甲受試者的表現穩定之後，才可進入第二階段的實驗教學，而且此時才實施乙受試者第一階段的實驗教學之介入，待乙受試者的表現穩定之後，才實施乙受試者第二階段的實驗教學之介入；而且時才實施丙受試者第一階段的實驗教學之介入，等三位受試者的各階段的學習表現都趨於穩定之後，才停止實驗教學。總計每位受試者實驗教學平均為十七節課。於九十四年八月中旬開始實施教學實驗，教學地點均在同一間教室。

5. 評量者：

為避免因不同評量技巧或個人特質所造成之偏誤，故在整個實驗過程從基本能力、基線期、處理期至追蹤期、型式認知的所有評量均由研究者一人擔任。

6. 評量方式：評量的項目分為基本能力的評量、基線期評量、形成性成效評量和保留評量、型式認知。

(1) 基本能力的評量方式：

基本能力的評量方式，是指受試者一開始先接受搬移「河內塔遊戲2、3個圓盤」基本能力的培養（附錄〈一〉），建立型的概念。搬移2、3個圓盤時，用附錄〈二〉來記錄，受試者必須不斷的嘗試錯誤，直到連續第一次、第二次、第三次均以最少次數完成目標，才算具備搬移2、3個圓盤（pattern）的基本能力。

(2) 基線期的評量方式：

基線期的評量涵蓋全部教學的型式認知概念，主要目的在評量數學學習障礙學童對河內塔遊戲型式認知概念之教學操作的起點行為。基線期評量是指具備搬移2、3個圓盤（pattern）的基本能力後，開始進行搬移「河內塔遊戲搬移4個圓盤」之資料收集，受試者的表現紀錄在附錄〈三〉，將收集到的資料值畫入單一受試的圖表中。搬移「河內塔遊戲4個圓盤」資料所收集的分數範圍為0-10分，嘗試錯誤的操作次數最多為六次，其計分方式依楊宗仁（民90）所設計，說明如下：

10分：連續第一次、第二次、第三次均以最少次數完成。

9分：連續第一次、第二次均以最少次數完成。

8分：第一次失敗；第二次、第三次均以最少次數完成。

7分：在第三次、第四次連續以最少次數完成。

6分：在第四次、第五次連續以最少次數完成。

5分：在第五次、第六次連續以最少次數完成。

4分：以最少次數通過兩次以上，但並未連續通過。

3分：以最少次數通過一次。

2分：有完成目標二次以上，但不是用最少次數完成。

1分：有完成目標一次，但不是用最少次數完成。

0分：六次完全沒有完成目標。

(3) 形成性成效評量的方式：

形成性成效評量的方式是將解決河內塔遊戲的解題流程（圖3-1-2），依照操作的完整性，分成基本能力和三大階段做實驗教學，其計分方式如表3-2-3所示。

表3-2-3 基本能力評量、形成性成效評量的計分標準

步驟	解題步驟內容	階段名稱	評量的計分標準
1	取出起始卡、取出終點卡	基本能力	附錄<一>： 型式的基本能力評量（一）中，寫搬移3個圓盤的六種 pattern（型式）：每寫出一種就得1分，最高可得6分。寫搬移2個圓盤的六種 pattern：若寫出一種就得1分，寫出二、三種，均可得2分，寫出四、五種均可得3分，寫出全部六種可得4分，所以，寫滿十二種 pattern，最高可得10分。 附錄<二>： 型式的基本能力評量（二）：搬移河內塔2、3個圓盤之操作評量（出現○的個數）
2	選擇2的pattern 或3的 pattern 當參照(n=2 或3)		

3	找出非固定數字的起始柱和終點柱，從6種情形中找出正確的 pattern 當參照	階段一	附錄<四>： 形成性成效評量(一)，本評量共有五題，每題都有 4 個目標（目標 1：找出非固定數字的起始柱和終點柱。目標 2：從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照。目標 3：找出固定不動之數字。目標 4：將固定不動之數字填入每一張空白卡），只做對 1 個目標得 0 分，做對 2 個目標就得 1 分，做對 3 個目標得 1 分，做對 4 個目標得 2 分，每題都有 4 個目標，每題最高得 2 分，本評量共有五題，共計最高可得 10 分。
4	在起始卡和終點卡之間插入「 $2^n - 2$ 」空白卡		
5	若有固定不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡		
6	是否做有效分堆？	階段二	附錄<五>： 形成性成效評量(二)：分堆紀錄表 附錄<六>： 形成性成效評量(二)，本評量有三個學習目標，共有十題，滿分是 10 分： 目標 1（是否做有效分堆？）有兩題，一題 1 分，最高可得 2 分 目標 2（是否可以寫出一張對應卡？）有兩題，一題 1 分，最高可得 2 分 目標 3（是否會利用型式複製某一 pattern 至空白卡，完成對應？）有六題，一題 1 分，最高可得 6 分
7	是否可以寫出一張對應卡		
8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）		
9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」		附錄<七>： 形成性成效評量(三)有十題，做對一題
10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡		

11	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？	階段三	得1分，全部有10題，滿分是10分
12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？		
13	將第1張卡片放到「答案區」、第2張卡片成為第1張卡片、從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片		
14	將此張卡片依序放入「答案區」中		

(4) 保留評量的評量方式：

保留評量分為「短期保留成效評量」和「長期保留成效評量」，其評量方式係指受試者在「短期保留成效評量、長期保留成效評量」之得分，最高各為10分。

「短期保留成效評量」是一種保留評量，其評量方式係指受試者在實驗教學期停止後開始計算一個星期後，和二個星期後，所做的操作評量，有十三題，滿分是10分，計分方式為答對的題數 $\times 10/13 =$ 得分（四捨五入，取到整數）。

「長期保留成效評量」是一種保留評量，其評量方式係指受試者在實驗教學期停止後開始計算一個月後，所做的操作評量，有十三題，滿分是10分，計分方式為答對的題數 $\times 10/13 =$ 得分（四捨五入，取到整數）。

(5) 型式認知之評量方式：

型式認知之評量方式是指讓數學學習障礙學童口述解決搬移4個圓盤（附錄〈十四〉），以及用步驟卡排列5個圓盤的解題計畫（附錄〈十五〉），期待數學學習障礙學童經過這次實驗學之後，自己有了擬定解題計畫的經驗，當未來面對問題需要解決時，可以自己在心中設計一個解題計畫，以減少隨機化的行為。

讓數學學習障礙學童嘗試解決搬移五個圓盤這個問題（附錄〈十六〉），藉以驗證該數學學習障礙學童的問題解決類化能力之影響為何。

此外，研究者針對河內塔內涵中的型式、對應之理念訪談及測試三位受試者（附錄〈十七〉、附錄〈十八〉、附錄〈十九〉），並加以分析如果受試者可以全部操作完畢，是否代表真的理解解題策略中的真意，理解型式概念，而增強型式的認知。

7. 評量時間與地點：

為避免數學學習障礙學童因處於不熟悉的環境產生之焦慮，而導致測驗結果之偏誤，本研究各次的評量的地點與教學地點一致。

8. 增強方式：

在介入階段所有受試所獲得之增強均相同，分為口頭上的讚美、與兌換獎品。

三、本研究數學學習障礙學童的教學法

本研究所採用的數學學習障礙學童的教學法兼具以下的教學法：

(一) 從具體學習到抽象學習漸進法：

河內塔遊戲的型式教學可從具體和半具體兩個層次來看。在具體層次方面：讓數學學習障礙學童使用真實的材料，實際操作河內塔教具，藉由肢體的碰觸、移動操作來解決數學問題；在半具體層次方面：讓數學學習障礙學童使用紙卡上的河內塔圖片代表具體的河內塔教具，在紙卡上紀錄搬移的步驟。

(二) 直接教學：

河內塔遊戲的型式教學給數學學習障礙學童充分的學習時間，一直要達到精熟的技巧才進入下一個學習目標。研究者透過工作分析，分析出教學計畫的步驟，決定出三個連續性的教學目標，然後實施一對一精準的教學，並由研究者設計與實施持續性的評量，包括形成性成效評量、短期和長期的保留性評量。

(三) 認知學習策略教學」：

河內塔遊戲的型式教學兼具認知學習策略教學，例如，數學學習障礙學童應用實驗處理期所學得的認知策略，將河內塔遊戲操作流程圖記入腦子中（圖 3-1-2），進行自我對話和自我詢問，監控自己解題的步驟。河內塔遊戲操作流程圖目的在協助數學學習障礙學童習得數學的學習策略，以及主導和監控自己的數學學習活動，藉以解答數學問題。

(四) 輔導發現教學法：

河內塔遊戲的型式教學兼具輔導發現教學法，河內塔遊戲的型式教學將解決問題的作業細步化，甚至安排出解決河內塔搬移問題的作業順序，因為概念或原則的發現有時需要複雜的步驟，所以，將解決問題的作業細步化可以讓數學學習障礙學童免於迷失在龐雜、混亂的資料中。

（五）DISTAR 數學模式：

河內塔遊戲的型式教學兼具 DISTAR 數學模式觀點。河內塔遊戲的型式教學利用工作分析將複雜的工作化成簡單的工作（圖 3-1-2），將複雜的作業程序分成小單元；並用對應卡，直接從搬移四個圓盤對應到搬移兩個或三個圓盤，符合操作制約的原理教導數學學習障礙學童，讓數學學習障礙學童跨越「不會搬移四個圓盤」困難的步驟，自己解決問題。

（六）知覺動作訓練模式：

河內塔遊戲的型式教學也兼具凱伯的觀點，強調數學學習障礙學童的學習需要動作的介入，讓數學學習障礙學童直接操作河內塔遊戲，一邊操作一邊思考解題之道。抽象的認知能力是根源於具體的肌肉動作，實際的操作動作有助於數學學習障礙學童即時去驗證自己的想法，提升自己的認知。實際的操作動作可以訓練數學學習障礙學童的動作，由於在操作河內塔遊戲時，要將圓盤一個一個自柱子拿出來，又要一個一個放入柱子中，圓盤中間的圓洞與柱子的粗細不相上下，所以一個一個放入柱子中的動作不太容易，故從操作中，可以訓練數學學習障礙學童，使之動作更加靈活。

（七）引導式的建構學習：

河內塔遊戲的型式教學也兼具引導式的建構學習，包括以下幾項：

1. 發現問題與理解問題

接觸到河內塔搬移圓盤問題時，數學學習障礙學童可與同學討論或由老師解釋。

2. 將解決問題的作業細步化

將解決河內塔搬移圓盤的問題之作業細步化，甚至安排出作業順序。河內塔搬移圓盤的概念和原則需要複雜的步驟，數學學習障礙學童容易迷失在龐雜、混亂的資料中，所以由老師提示安排河內塔搬移圓盤作業的步驟，並提示數學學習障礙學童解決河內塔搬移圓盤問題的方針或策略。

3. 以問題引導兒童思考

在追蹤期結束評量之後，研究者有採用訪談、問問題的方式，引導兒童去發現河內塔搬移圓盤的問題的解答，幫他們發現型式的概念，利用學過的策略來解決更深一層、搬移更多個圓盤問題，易使數學學習障礙學童從操作中發現其中搬移的型式、共同性。

第三節 研究對象

為找出符合學習障礙特徵且具數學困難之受試者，本研究所有對象均需「魏氏兒童智力量表第三版」(WISC-III, 1992)中之全量表智商分數在 70 以上，且在柯華葳(民 88)所編製「基礎數學概念評量」之大部份測驗成績低於各年級「答對／全部題數%」低分組的平均通過率(切截分數)，並在「答對／全部題數%」以及「答對／做完題數%」之成績有差距者，即表示其有數學基本概念之困難。以及在洪碧霞等人(民 85)所編製「國民小學數學科診斷測驗」之大部份的分測驗之 T 分數在 30 以下(表示「極差」)者，即表示其有數學基本概念之困難。本研究使用之研究對象分成試探性研究對象與正式研究對象兩部分，分述如下：

本研究使用之研究對象分成試探性研究對象與正式研究對象兩部份，分述如下：

一、試探性研究對象

為確定本研究之實驗教學內容，研究者於實驗處理前即選擇一位就讀國小資源班三年級男童小祺，以及六年級即將畢業的男童小興，小興有顯著的內在差異，具備學習障礙的特徵(表3-3-1)，且擁有學習障礙證明(表3-3-2)，並具數學困難(表3-3-3)，將此兩位數學學習障礙學童當作試探性的研究對象，依實驗教學內容對該數學學習障礙學童進行試探性教學，並藉由數學學習障礙學童課堂上的表現與反應，調整與修正教學設計。

表 3-3-1 學科能力測驗、魏氏智力測驗、鑑定結果表

(試探性研究對象-小興)

學科能力測驗							魏氏智力測驗							鑑定結果
國語	數學	社會	自然	音樂	體育	美勞	FIQ	VIQ	PIQ 作業量表	VCI	POI	FDI	PSI	
PR1	PR1	33 33/33	46 33/33	78 33/33	78 33/33	83 33/33	80	67	98	63	85	76	87	學障

數學科的學科能力測驗之百分等級只有 1，魏氏智力全量表 IQ 為 80 (落後一個標準差)，顯示該數學學習障礙學童的數學能力和智力較一般兒童顯著落後，但該數學學習障礙學童的 FIQ80，大於智能障礙 FIQ70，所以該數學學習障礙學童仍是一位智力正常的小孩，唯有智力正常 (FIQ 在 70 以上)，才符合學習障礙的特徵。

表 3-3-2 魏氏兒童智力量表中兩兩分測驗相減後的值

(試探性研究對象-小興)

語文智商- 作業智商	語文理解- 知覺組織	語文理解- 專心注意	語文理解- 處理速度	知覺組織- 專心注意	知覺組織- 處理速度	專心注意- 處理速度
31	22	13	24	9	2	11

由以上魏氏智力測驗中之兩兩分測驗相減後的值，有三個值的差異在 15 以上，表示該數學學習障礙學童有顯著的內在差異，具備學習障礙的特徵。

表3-3-3 學業成就測驗百分等級測驗資料

(試探性研究對象-小興)

學業成就測驗百分等級											
國語	數學	社會		自然		音樂		體育		美術	
百分等級	百分等級	分數	名次								
2	4	88	31/35	59	34/35	82	34/35	82	24/35	83	35/35

數學科的成就測驗之百分等級只有 4，顯示該數學學習障礙學童的數學能力很差，具有數學方面的障礙

該數學學習障礙學童 90 學年度的數學科的學科能力測驗之百分等級只有 1，顯示該數學學習障礙學童的數學能力較一般兒童顯著落後；魏氏智力全量表 IQ 為 80 (落後一個標準差)，顯示該數學學習障礙學童雖然智力教一般的學童落後，但仍算是一位智力正常的數學學習障礙學童，而且由魏氏智力測驗中之兩兩分測驗相減後的值，有三個值的差異在 15 以上，表示該數學學習障礙學童有顯著的內在差異，具備學習障礙的特徵，該數學學習障礙學童的困難明顯是在數學方面，屬於數學方面的學習障礙兒童。

表 3-3-4 魏氏兒童智力量表之施測結果

(試探性研究對象-小祺和小興)

姓名	性別	年級	測驗結果描述	全量表智商
小祺	男	小學三年級	語文量表：92 作業量表：77	83
小興	男	小學六年級	語文量表：67 作業量表：98	80

小祺	全量表 (FIQ)	語文量表 (VIQ)	作業量表 (PIQ)	語文理解 (VIC)	知覺組織 (POI)	專心注意 (FID)	處理速度 (PSI)
智商/指數	83	92	77	93	79	85	76

小興	全量表 (FIQ)	語文量表 (VIQ)	作業量表 (PIQ)	語文理解 (VIC)	知覺組織 (POI)	專心注意 (FID)	處理速度 (PSI)
智商/指數	80	67	98	63	85	76	87

由表 3-3-4 可知試探性研究對象小祺和小興在「魏氏兒童智力量表第三版」(WISC-III, 1992) 中之全量表智商分數都在 70 以上，符合學習障礙智力在正常的範圍之特徵。

表 3-3-5 基礎數學概念評量之施測結果（試探性研究對象-小祺）

分測驗 (三年級)	答對 題數	全部 題數	做完 題數	答對/全部 (通過率)	答對/全部 (低分組 的切截分 數)	答對/全部 (低於切截 分數，請 打✓)	答對/做完 (通過率)	答對/做完 (低分組的 切截分數)	答對/做完 (低於切截 分數，請 打✓)
比大	4	8	6	0.50	0.53	✓	0.66	0.83	✓
比小	7	8	8	0.87	0.78		0.87	0.88	✓
不進位加法	6	10	9	0.60	0.51		0.66	0.75	✓
進位加法	3	10	5	0.30	0.42	✓	0.60	0.74	✓
不借位減法	6	16	8	0.37	0.27		0.75	0.59	
借位減法 十位數為 1	3	9	4	0.33	0.29		0.75	0.53	✓
借位減法 十位數為 2	4	9	8	0.44	0.88	✓	0.50	0.30	
借位減法 十位數為 6	4	9	6	0.44	0.20		0.66	無資料	無法比對
九九乘法	3	16	5	0.18	0.23	✓	0.60	0.41	

表 3-3-6 基礎數學概念評量之施測結果（試探性研究對象-小興）

分測驗 (六年級)	答對 題數	全部 題數	做完 題數	答對/全部 (通過率)	答對/全部 (低分組 的切截分 數)	答對/全部 (低於切截 分數，請 打✓)	答對/做完 (通過率)	答對/做完 (低分組的 切截分數)	答對/做完 (低於切截 分數，請 打✓)
比大	7	8	8	0.87	無資料	無法比對	1.00	無資料	無法比對
比小	8	8	8	1.00	無資料	無法比對	1.00	無資料	無法比對
不進位加法	9	10	10	0.90	無資料	無法比對	0.90	無資料	無法比對
進位加法	6	10	9	0.60	無資料	無法比對	0.66	無資料	無法比對
不借位減法	10	16	11	0.62	無資料	無法比對	0.90	無資料	無法比對
借位減法 十位數為 1	5	9	6	0.55	無資料	無法比對	0.83	無資料	無法比對
借位減法 十位數為 2	6	9	6	0.66	無資料	無法比對	1.00	無資料	無法比對
借位減法 十位數為 6	5	9	5	0.55	無資料	無法比對	1.00	無資料	無法比對
九九乘法	9	16	10	0.56	0.55		0.90	0.73	

空格運算	1	8	2	0.12	0.68	✓	0.50	0.84	✓
三則運算	4	10	6	0.40	0.42	✓	0.66	0.42	
應用問題	2	8	8	0.25	0.40	✓	0.25	0.40	✓

由表 3-3-5、表 3-3-6 可知試探性研究對象小祺和小興在柯華葳（民 88）所編製「基礎數學概念評量」之大部份測驗成績低於各年級「答對／全部題數%」低分組的平均通過率（切截分數），且在「答對／全部題數%」以及「答對／做完題數%」之成績分數有差距，表示其有數學基本概念之困難。

表3-3-7 國民小學數學科診斷測驗之施測結果
（試探性研究對象-小祺和小興）

受試	年級	洪碧霞的題本 (使用年級)	一 認數	二 分數	三 圖形 與空 間	四 加減 法	五 乘除 法	六 四則 運算	七 量	八 時間 與計 算	九 統計 與圖 表	十 輔助 計算 器與 解題 策略
小 祺	三	三年級 題本	對3題	對3 題	對7 題	對15 題	對5 題	無題 目	對3 題	對2 題	對11 題	對1 題
			T=24	T=27	T=30	T=34	T=25		T=24	T=20	T=31	T=27
小 興	六	六年級 題本	對8題	對7 題	對10 題	對21 題	對17 題	對8 題	對8 題	對7 題	對7 題	對6 題
			T=30	T=24	T=36	T=37	T=36	T=23	T=26	T=32	T=34	T=23

由表 3-3-7 可知試探性研究對象小祺和小興在洪碧霞等人（民 85）所編製「國民小學數學科診斷測驗」之大部份的分測驗之 T 分數在 30 以下（表示「極差」）者，即表示其有數學基本概念之困難。

二、正式研究對象

(一) 篩選標準：

本研究正式的研究對象為研究者任教之國小內之資源班數學學習障礙學童，其中就讀於三年級、四年級、五年級的數學學習障礙學童各一名，共計三名數學學習障礙學童，為本研究之研究對象。其篩選標準如下：

1. 學習障礙之智力標準

採用魏氏兒童智力量表第三版進行施測，找出一般智力在中等或中等以上（全量表FIQ \geq 70），合乎學習障礙者之智力標準（身心障礙及資賦優異學生鑑定原則鑑定基準，教育部，民87）。

2. 數學困難

為找出數學學習障礙學童數學學習的優勢與劣勢情形，以作為分析數學學習障礙學童學習困難及研究者教學研究之依據，茲採用下列兩種測驗：

(1). 基礎數學概念評量

此一篩選工具不但能找出數學學習障礙學童的弱點，也盡量能減輕數學學習障礙學童因作業的挫折、或沒興趣、沒動機所表現出來的低分數。此測驗由柯華葳（民88）所編製。

受試以二、三、四年級題本接受施測，研究者再依序計算其「答對／全部題數%」以及「答對／做完題數%」之成績，並和二年級、三年級、四年級數學學習障礙學童在各個分測驗上，低分組的平均通過率（切截分數）作一比較。

若數學學習障礙學童大部份測驗成績低於各年級「答對／

全部題數%」低分組的平均通過率（切截分數），且在「答對／全部題數%」以及「答對／做完題數%」之成績分數有差距，表示其有數學基本概念之困難（柯華葳，民88）。

(2). 國民小學數學科診斷測驗

本測驗由洪碧霞、吳裕益、王佳文、徐綺穗及陳伶吟（民85）所編製，國民小學數學科診斷測驗之大部份的分測驗之T分數在30 以下（表示「極差」）者，即表示其有數學基本概念之困難。

(二) 施測結果：

1. 學習障礙之智力標準

表3-3-8 魏氏兒童智力量表之施測結果

(正式性研究對象-小憲、小彥、小儒)

姓名	性別	年級	測驗結果描述	全量表智商
小憲	男	小學五年級	語文量表：104 作業量表：88	96
小彥	男	小學四年級	語文量表：88 作業量表：80	82
小儒	女	小學三年級	語文量表：82 作業量表：86	82

小憲	全量表 (FIQ)	語文量表 (VIQ)	作業量表 (PIQ)	語文理解 (VIC)	知覺組織 (POI)	專心注意 (FID)	處理速度 (PSI)
智商/指數	96	104	88	107	86	97	106
百分等級	39	61	21	68	18	42	66

小彥	全量表 (FIQ)	語文量表 (VIQ)	作業量表 (PIQ)	語文理解 (VIC)	知覺組織 (POI)	專心注意 (FID)	處理速度 (PSI)
智商/指數	82	88	80	85	75	107	103
百分等級	12	21	9	16	5	68	58

小儒	全量表 (FIQ)	語文量表 (VIQ)	作業量表 (PIQ)	語文理解 (VIC)	知覺組織 (POI)	專心注意 (FID)	處理速度 (PSI)
智商/指數	82	82	86	81	86	85	122
百分等級	12	12	18	10	18	16	93

2. 數學困難

(1) 基礎數學概念評量

三位受試者在基礎數學概念評量之施測結果如下：

表3-3-9 基礎數學概念評量之施測結果（正式性研究對象-小憲）

分測驗 (四年級)	答對 題數	全部 題數	做完 題數	答對/全部 (通過率)	答對/全部 (低分組 的切截分 數)	答對/全部 (低於切截 分數，請 打✓)	答對/做完 (通過率)	答對/做完 (低分組的 切截分數)	答對/做完 (低於切截 分數，請 打✓)
比大	6	8	7	0.75	無資料	無法比對	0.84	無資料	無法比對
比小	8	8	8	1	無資料	無法比對	1	無資料	無法比對
不進位加法	8	10	8	0.80	無資料	無法比對	1	無資料	無法比對
進位加法	5	10	6	0.50	無資料	無法比對	0.83	無資料	無法比對
不借位減法	9	16	14	0.56	無資料	無法比對	0.64	無資料	無法比對
借位減法 十位數為1	4	9	7	0.44	0.69	✓	0.57	0.89	✓
借位減法 十位數為2	5	9	8	0.55	0.75	✓	0.62	0.66	✓
借位減法 十位數為6	4	9	8	0.44	0.52	✓	0.50	0.71	✓
九九乘法	8	16	10	0.50	0.36		0.80	0.89	✓
空格運算	2	8	2	0.25	0.73	✓	1	0.82	
三則運算	3	10	5	0.30	無資料	無法比對	0.60	無資料	無法比對
應用問題	3	8	8	0.37	0.51	✓	0.37	0.58	✓

表3-3-10 基礎數學概念評量之施測結果（正式性研究對象-小彥）

分測驗 (三年級)	答對 題數	全部 題數	做完 題數	答對/全部 (通過率)	答對/全部 (低分組 的切截分 數)	答對/全部 (低於切截 分數，請 打✓)	答對/做完 (通過率)	答對/做完 (低分組的 切截分數)	答對/做完 (低於切截 分數，請 打✓)
比大	5	8	6	0.62	0.53		0.83	0.83	
比小	7	8	8	0.87	0.78		0.87	0.88	✓
不進位加法	5	10	7	0.50	0.51	✓	0.71	0.75	✓
進位加法	4	10	6	0.40	0.42	✓	0.66	0.74	✓
不借位減法	5	16	7	0.31	0.27	✓	0.71	0.59	
借位減法 十位數為1	2	9	4	0.22	0.29	✓	0.50	0.53	✓
借位減法 十位數為2	3	9	4	0.33	0.88	✓	0.75	0.30	
借位減法 十位數為6	2	9	5	0.22	0.20		0.40	無資料	無法比對
九九乘法	3	16	8	0.18	0.23	✓	0.37	0.41	✓

表 3-3-11 基礎數學概念評量之施測結果（正式性研究對象-小儒）

分測驗 (二年級)	答對 題數	全部 題數	做完 題數	答對/全部 (通過率)	答對/全部 (低分組 的切截分 數)	答對/全部 (低於切截 分數，請 打✓)	答對/做完 (通過率)	答對/做完 (低分組的 切截分數)	答對/做完 (低於切截 分數，請 打✓)
比大	5	8	8	0.65	048		0.65	093	✓
比小	7	8	8	0.87	064		0.87	0.87	
不進位加法	2	10	6	0.20	0.21	✓	0.33	0.63	✓
進位加法	1	10	3	0.10	0.18	✓	0.33	0.50	✓
不借位減法	3	16	9	0.18	0.23	✓	0.33	0.56	✓
借位減法 十位數為1	3	9	5	0.33	0.43	✓	0.60	0.59	
借位減法 十位數為2	2	9	5	0.22	0.09		0.40	0.23	
借位減法 十位數為6	1	9	3	0.11	0.03		0.33	0.10	

三位受試者的施測分數和三年級、四年級、五年級數學學習障礙學童的平均通過率作一比較。發現三位受試者大部份測驗成績在「答對／全部題數%」方面低於各年級「答對／全部題數%」低分組的平均通過率（切截分數），且在「答對／做完題數%」方面，也低於各年級「答對／做完題數%」低分組的平均通過率（切截分數），表示其有數學基本概念之困難。

基礎數學概念評量分為高分組、一般學童組及低分組等三組，計算數學學習障礙學童在「答對／全部題數%」及「答對／做完題數%」的平均通過率，顯示其為一個可以分辨數學能力之測驗。

(2). 國民小學數學科診斷測驗

表3-3-12 三位受試者在國民小學數學科診斷測驗之施測結果

(正式性研究對象-小憲、小彥、小儒)

受試	年級	洪碧霞的題本 (使用年級)	一 認數	二 分數	三 圖形 與空 間	四 加減 法	五 乘除 法	六 四則 運算	七 量	八 時間 與計 算	九 統計 與圖 表	十 輔助 計算 器與 解題 策略
甲 小 憲	五	四年級 題本	對8題	對5題	對7題	對14題	對16題	對3題	對7題	對4題	對4題	對2題
			T=28	T=31	T=27	T=30	T=30	T=29	T=30	T=36	T=27	T=26
乙 小 彥	四	三年級 題本	對5題	對3題	對6題	對11題	對5題	無題目	對5題	對3題	對13題	對2題
			T=27	T=27	T=26	T=30	T=25		T=28	T=25	T=31	T=31
丙 小 儒	三	二年級 題本	對4題	無題目	對3題	對4題	對6題	無題目	對2題	對4題	對5題	無題目
			T=29		T=28	T=26	T=27		T=28	T=30	T=26	

因為篩選該三位數學學習障礙學童時，剛好是在暑假，受試甲正要從四年級升到五年級，四年級的數學剛好全部學習完畢，而五年級的數學尚

未學習，所以使用四年級的題本來測試受試甲的數學程度十分合適。受試乙和受試丙的學習數學的情形也和受試甲一樣，所以三位受試者雖然已經各為五、四、三年級的數學學習障礙學童，但是以四、三、二年級的題本來施測比較合適。

依據表3-3-12，三位受試者國民小學數學科診斷測驗之大部份的分測驗之T 分數在30 以下（表示「極差」）者，即表示此三位受試者有數學基本概念之困難。

依據林穎義（2001）的研究中數學學習障礙學童的特徵，檢核三位受試者的狀況如表 3-3-13

表 3-3-13 三位受試者在學習困難項目的檢核表

編號	數學學習障礙學童的特徵	受試甲	受試乙	受試丙
1	缺乏理解問題的能力	√	√	√
2	數學語言理解有困難			
3	計算方面有困難			
4	注意力不足		√	√
5	對數學基本概念理解有困難	√	√	√
6	策略應用的能力不足	√	√	√
7	視覺辨識有困難			
8	記憶能力有缺陷		√	√
9	知覺缺陷			
10	學習態度因素			√
11	動作不靈活			√

受試甲的學習特徵有缺乏理解問題的能力、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足等；而受試乙的學習特徵有缺乏理解問題的能力、注意力不足、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足、記憶能力有缺陷等；受試丙的學習特徵則是缺乏理解問題的能力、注意力不足、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足、記憶能力有缺陷、學習態度因素、動作不靈活等，希望在河內塔的遊戲教學之後，可以改善三位受試者以上的情形。

第四節 研究工具

本研究所使用之評量工具計有魏氏兒童智力量表第三版（WISC-III, 1992）、基礎數學概念評量（柯華葳，民 88）、國民小學數學科診斷測驗（洪碧霞，民 85）、自編的學習成效評量（形成性成效評量、短期保留成效評量、長期保留成效評量）、擬定解題計畫能力的評量、問題解決類化能力、以及探討是否理解型式概念，增強型式的認知，分為訪談紀錄、河內塔和星形的型式認知評量，茲分述如下：

一、 魏氏兒童智力量表第三版（WISC-III, 1992）

魏氏兒童智力量表第三版（Wechsler Intelligence Scale for Child, WISC-III）其作者為：Dr. David Wechsler，中文版的主編者為陳榮華、陳心怡博士，測驗的適用對象為 6 歲到 16 歲，其測驗的目的在於測量出 6 歲到 16 歲兒童的個別智力，以供特殊兒童之鑑定參考，另有出版分數處理輔助軟體修訂版。我國第一次修訂的魏氏兒童智力量表是以美國 1974 年所修訂的「魏氏兒童智慧量表（WISC-R）」為藍本，其中語言量表中的記憶廣度、作業量表中的圖形設計、物形配置、符號替代及迷津五個分測驗，因較不受文化背景影響，完全以原材料做為題目，其餘的分測驗則依國情、和社會環境做適當的修改或自編（郭生玉，民 90）。

二、基礎數學概念評量

本測驗由柯華葳於民國88年所編製，主要訴求在能找出數學學習障礙學童的數學學習弱點，亦期能儘量降低數學學習障礙學童因作業的挫折或沒動機、興趣所導致的低分數。本測驗依據國民小學數學科課程標準，編製十二個分測驗，每個分測驗題數由8至16題不等，施測時間因年級不同而不同，但總時間均在9-10分鐘左右。此外，本測驗並建立各年級高分組、一般學童組及低分組等三組「答對／全部題數%」及「答對／做完題數%」的平均通過率，顯示其為一個可以分辨數學能力之測驗。

成績計算時分：

1. 每個分測驗答對數與全部題數的比例。這表示在固定時間內答對的比例，在此，沒做完也表示是一種能力上的不足。
2. 每個分測驗答對數與答完題數的比例。這表示若數學學習障礙學童能做到的題目就做對，他是有能力做，但他所需要時間與一般學童是不一樣的。

三、國民小學數學科診斷測驗

本測驗由洪碧霞、吳裕益、王佳文、徐綺穗及陳伶吟（民85）所編製，國民小學數學科診斷測驗中大部份的分測驗T分數在30以下（表示「極差」）者，即表示其有數學基本概念之困難。

四、自編的學習成效評量

本研究所使用學習成效評量之工具為研究者自編，目的在探討受試在接受「河內塔遊戲教學」之實驗教學後之學習表現。「河內塔遊戲教學」之評量共分為三部份，包括「形成性成效評量、教學短期保留成效評量、教學長期保留成效評量」。在實驗教學各節上課結束之前十分鐘即進行一次形成性成效評量，評量內容是依據河內塔遊戲解題流程之十四個步驟（圖3-1-2），分成三大教學階段所設計（表3-2-2），以作為實驗處理期之觀察值。至於保留評量部分則是在了解河內塔遊戲教學對國小數學學習障礙學童學習「河內塔遊戲教學」之保留成效，以作為追蹤期之觀察值。

（一）形成性成效評量

由於本研究於實驗處理期所使用之「河內塔遊戲教學」為研究者自編，為檢核此自編之活動是否符合「河內塔遊戲教學」內涵，研究者與專家學者共同研擬出河內塔遊戲之操作流程（圖3-1-2），並依照此操作流程圖，將解決河內塔遊戲的步驟分成基本能力的養成，和三個目標（表3-2-2），並依照各步驟實施教學，並於每節下課前十分鐘做隨堂的形成性成效評量，每節的形成性成效評量之評量總分均是10分，依受試者個人的學習狀況而得到0至10分不等之分數，待受試者甲在「目標一」的學習活動之能力穩定之後，才進入「目標二」的實驗教學，此時，才開始進行受試者乙在「目標一」的實驗教學，待受試者甲在「目標二」的學習活動之能力穩定之後，才進入「目標三」的實驗教學，此時，才開始進行受試者乙在「目標二」的實驗教學，同時進行受試者丙在「目標一」的實驗教學，待受試者甲、乙、丙三個實驗教學的目標之能力均穩定之後，就結束實施形成性成效評量。

(二) 保留成效評量

保留評量測驗包括「教學短期保留成效評量、教學長期保留成效評量」(附錄<十>、附錄<十一>)，其內容是與實驗處理期在操作一樣之檢核測驗，均是測試受試者解決搬移四個圓盤的河內塔遊戲之問題，在測驗中的觀察向度則涵蓋下列十三大項：

1. 能說出非固定數字的起始柱和終點柱。
2. 能從12種情形中找出正確的pattern當參照。
3. 能插入正確的空卡張數 ($2^n - 2$ 張空白卡)。
4. 能找出固定不動之數字，將該數字填入每一張空白卡。
5. 依自己的意願做分堆後，能夠操作看看(邊記錄過程)是否可以成功。
6. 能夠寫出「4個圓盤分成3組、和分成2組」的對應卡。
7. 能夠利用型式複製某一pattern至空白卡(完成對應)。
8. 能夠從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」。
9. 能夠從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡。
10. 能夠正確回答第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成。
11. 能夠正確判斷所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢。
12. 能夠將第1張卡片放到「答案區」、第2張卡片成為第1張卡片、從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片。
13. 能夠將最後一張卡片依序放入「答案區」中。

其計分方式為：答對的題數 $\times 10/13 =$ 得分(四捨五入，取到整數)，滿分為10分。

五、擬定解題計畫能力的評量

擬定解題計畫能力係指當數學學習障礙學童運用紙卡成功解決搬移 4 個圓盤和搬移 5 個圓盤的問題後，測試數學學習障礙學童是否可以口述出或排列出自己剛剛所設計的、解決搬移 4 個圓盤和搬移 5 個圓盤，這兩個問題的解題計畫。

數學學習障礙學童將解決搬移 4 個圓盤和搬移 5 個圓盤兩個問題的操作過程用自己的話，有順序的說出來或排列出來，這就是數學學習障礙學童自己思考所設計的解題計畫。將數學學習障礙學童口述的解題計畫流程和河內塔遊戲操作流程圖（圖 3-1-2）的項目做核對，如果主要的項目和邏輯順序都有口述出來，表示該數學學習障礙學童在解決河內塔的搬移問題時，具有擬定解題計畫的能力。

搬移 4 個圓盤的解題計畫是讓數學學習障礙學童採用口述的方式，將整個解題流程說出來、老師紀錄，記錄在附錄〈十四〉。而搬移 5 個圓盤的解題計畫是將 14 個解題步驟貼在名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供數學學習障礙學童取用，數學學習障礙學童去挑選適當的步驟卡排成一串自己的解題過程，亦即將整個解題計畫用步驟卡排列出來，老師將之做成紀錄，記錄在附錄〈十五〉。

河內塔遊戲型式的實驗教學讓數學學習障礙學童有擬定解題計畫的經驗，培養其擬定解題計畫能力，養成做計畫的習慣（使用策略），可以減少數學學習障礙學童隨機化的行為，以期將來做事更有效率。

六、問題解決類化能力的評量

在追蹤期過後，讓數學學習障礙學童解決搬移五個圓盤這個問題，驗證該受試者在實驗教學之後，是否可以將搬移四個圓盤解題策略應用到搬移五個圓盤、複雜度更深一層的問題上。此時，研究者使用附錄〈十六〉的十四條項目來檢核該數學學習障礙學童問題解決類化的能力。

七、自編的訪談紀錄

為探討以河內塔為內涵的型式、對應之教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中的型式、對應中的規則是什麼？如果他可以全部操作完畢，是否代表理解型式概念，而增強型式的認知？研究者依自編的訪談紀錄單，予以受試者訪談並加以分析（附錄〈十七〉）。

八、自編的型式認知評量

為探討以河內塔為內涵的型式、對應之教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中的型式關係是什麼？是否理解型式概念，而增強型式的認知。研究者依自編的型式認知評量，予以受試者評量並加以分析（附錄〈十八〉、附錄〈十九〉）

第五節 教學材料

一、教學者

本教學實驗研究由研究者本身進行教學，研究者相關背景如下：
民國83年畢業於國立台南師範學院特殊教育學系，資賦優異與各類身心障礙不分類均修，現為國立台中教育大學特殊教育與輔助科技研究所碩士班研究生，在校期間已修畢院所規定之專業學分，包括「特殊教育專題研究」、「特殊教育教學策略研究」、「創造力理論與評量實務研究」、「殘障福利專題研究」等科目。畢業至今任教於資源班滿十一年，其中兩年兼任輔導老師，承辦大部份的輔導室業務，其中一年兼任輔導組長，在資源班任教十一年期間，均有教導學習障礙學童之數學領域的經驗。目前仍任教於國小資源班並擔任導師之工作。

二、教學之編製依據

本研究所使用之教材為研究者自編，主要的依據是與專家學者共同實際操作河內塔遊戲，不斷思考研討，從中發現該遊戲的「型式、對應」的內涵，最後研討出河內塔遊戲解題的步驟流程，並參照國立新竹師範學院幼兒教育學系周淑惠（民88）幼兒數學新論教材教法一書中與「型式、對應」有關之推理的認知教學活動，以及國立台北師範學院特殊教育學系楊宗仁（民90）的自閉症青少年之「執行功能」系列研究中，有關河內塔之實驗應用。

此外，研究者並在九十四年二、三月期間探試性的、實際教導並觀察數學學習障礙學童玩河內塔的情形，從中獲知河內塔遊戲的一些特點。以上這些因素均加以考慮，而自編出以河內塔為內涵的型式、對應之教學。此教學共計十四個要項，分成基本能力和三大階段，於課堂中進行實驗教學，教學活動內容如（表3-5-1）。

表3-5-1 教學階段、教學活動和授課時數對照表

教學活動之 階段名稱	教學活動內容	授課時數
階段0： 基本 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 研究者決定起始柱和終點柱，讓數學學習障礙學童搬移 2 個或 3 個圓盤 2. 經由實際操作，寫出 12 種的型式 (pattern) 	平均每人 一週四節
階段一	<ol style="list-style-type: none"> 1. 找出非固定數字的起始柱和終點柱 2. 從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照 3. 要插入正確的空白卡張數 (準備「空白卡」) 4. 找出固定不動之數字，將該數字填入每一張空白卡 	平均每人 一週四節
階段二	<ol style="list-style-type: none"> 1. 依自己的意願做分堆後，能夠操作看看 (邊記錄過程) 是否可以成功，找到有效的分堆。 2. 能夠寫出「4個圓盤分成3堆、和分成2堆」的對應卡。 3. 能夠利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)。 	平均每人 一週四節
階段三	<ol style="list-style-type: none"> 1. 可從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」 2. 可從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡 3. 可正確回答：第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？ 4. 可正確回答所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？ 5. 可將第1張卡片放到「答案區」、第2張卡片使之成為第1張卡片、並從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片 6. 能將最後一張卡片依序放入「答案區」中 	平均每人 一週四節

三、教學程序

身心障礙兒童通常不會主動地專心玩教具，也不能充分享受遊戲的樂趣。其原因包含：1. 不了解遊戲規則2. 即使了解如何玩，但手的靈敏度不夠或手眼不協調，以致操作教具有困難等3. 不想玩。與其說不懂得教具的樂趣，不如說是挫折不安、失敗的感覺，讓他不願主動接觸身邊之事物。所以指導者要讓數學學習障礙學童有主動想玩教具的動機，指導時的步驟如下：

- (一) 操作示範：指導者慢慢一步步地操作教具給數學學習障礙學童看。
- (二) 完全協助：指導者從頭到尾協助數學學習障礙學童去操作教具。
- (三) 困難協助：當數學學習障礙學童操作時遇到困難，才協助。
- (四) 反覆練習：讓數學學習障礙學童從頭到尾操作，對不會的部份，反覆做練習。
- (五) 指出錯誤：讓數學學習障礙學童從頭到尾操作，指出其錯誤的地方，但固定不動手協助，讓他自己動手做到對為止。
- (六) 外在讚美：讓數學學習障礙學童從頭到尾操作，遇到困難時，給予鼓勵讚美。
- (七) 內在動機：數學學習障礙學童自己願意主動操作，不怕困難，充滿興趣。

在教學階段中，分別對受試進行型式之教學，每節教學時間為40分鐘，教學程序大致遵循「教學→練習→複習→形成性成效評量」等步驟進行，教學活動內容設計如附錄<二>至附錄<五>。

受試者採用「直接教學」，給數學學習障礙學童充分的學習時間，一直要達到精熟的技巧才進入下一個學習目標。教師先經由工作分析計畫教學的步驟，決定四大連續性的教學目標，然後實施一對一精準的教學，並

由教師設計與實施持續性的評量，包括形成性的評量、短期和長期的保留性評量；採用「認知學習策略教學」，數學學習障礙學童應用實驗處理期所學得的認知策略，將河內塔遊戲操作流程圖記入腦子中（圖 3-1-2），進行自我對話和自我詢問，監控自己解題的步驟。河內塔遊戲操作流程圖目的在協助數學學習障礙學童習得數學的學習策略，以及主導和監控自己的數學學習活動，藉以解答數學問題。並採用 DISTAR 數學模式觀點；，利用工作分析將複雜的工作化成簡單的工作，利用 buffer（對應卡），直接從搬移 4 個圓盤對應到搬移 2 個或 3 個圓盤，用操作制約的原理教導數學學習障礙學童，讓數學學習障礙學童跨越「不會搬移四個圓盤」困難的步驟，自己解決問題。依照凱伯的觀點，強調數學學習障礙學童的學習需要動作的介入，讓數學學習障礙學童直接操作河內塔遊戲，一邊操作一邊思考解題之道。抽象的認知能力是根源於具體的肌肉動作，實際的操作動作有助於數學學習障礙學童即時去驗證自己的想法，提升自己的認知。

每節剛上課的前幾分鐘，先讓受試者自由操作「搬移 2 個圓盤、和 3 個圓盤」的河內塔之遊戲，藉以引起受試者學習之興趣與動機；在教學過程中，研究者一邊講解、一邊示範，每教完一小步驟，即給予受試者充分的練習機會，並隨時監控其學習表現、給予回饋。由於解決河內塔遊戲問題的十四個步驟之間具有連續性的特性，受試者要先具備「目標一」的能力後，才能學會「目標二」的能力，所以每節教學內容除包含認識與練習新的河內塔認知活動之外，事實上也包含部分複習舊的河內塔認知活動之教學。在每節教學下課前十分鐘，即給予受試者一次形成性成效評量，以評估受試者學習之表現。

四、教學時間之安排

本實驗教學以一週上課三節為原則，每位受試者平均共上12節課。因為此研究的實驗教學之難度較高，需要一對一個別化的教導受試者，受試者到資源班上課時間都不是一對一的情境，故需要額外安排一對一的上課時間。每位受試者每週上課約三節，三位受試者同時進入實驗處理期時，共需在資源班上課時間外再加約12節課，研究者和受試者都無法安排出時間，故安排於暑假中八月份即開始實驗教學。本實驗教學時間如下表3-5-2所示：

表3-5-2 實驗教學時間安排表

一、暑假期間：係指94年8月份期間

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
上午 09:30-10:10	實驗教學	實驗教學	實驗教學	實驗教學	實驗教學
上午 10:20-11:10	實驗教學	實驗教學	實驗教學	實驗教學	實驗教學

二、數學學習障礙學童上學期間：係指94年9月份起至95年5月期間

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
中午午休 12:40-13:20		實驗教學		實驗教學	實驗教學

第六節 資料處理

本實驗一開始先評量受試者在盲目地搬移河內塔遊戲的過程中，紀錄該受試可以用最少步數搬移成功的次數，作為該受試在未接受型式認知活動前，解決河內塔遊戲時的起點能力，將收集到的三至四次表現穩定的資料點，繪入基線期。

接著，以自製評量測驗「河內塔遊戲之型式的教學」訓練受試者對型式認知的學習，將此河內塔遊戲之型式的教學分成三個階段做教學及評量，每次教學完，即實施隨堂測驗，如果連續得分在八分以上，表示該階段的學習已經穩定，就開始接受下一個階段型式認知的學習，直到所有型式的教學都學習穩定之後，該受試有了型式認知之後，使其嘗試解決搬移四個圓盤的問題，此時，做實驗處理期資料點的收集，一直收集到該受試連續得分在八分以上才停止該實驗處理期資料點的收集。

此外，一個星期後，讓受試者解決搬移四個圓盤的問題，實施三到四大次（每一大次都嘗試各六小次的搬移），收集三到四次追蹤期的資料點。

本研究一共進行十一次至十五次的評量，包括基線期三至四次、實驗處理期五至七次與追蹤期三至四次。研究者匯集結果整理成曲線圖、視覺分析摘要表，和依最少步數完成目標的次數評量表，分別說明如下：

1. 曲線圖：為受試者以最少步數成功搬移、完成目標的次數之曲線圖。

曲線圖縱軸為最少步數的次數；橫軸為測驗次第，以次為單位。由曲線圖能輕易瞭解受試者在形式認知方面的成長趨勢，與介入效果。

2. 視覺分析摘要表：說明曲線圖各階段內與相鄰階段間的數據變化趨勢，

整理成摘要表進行視覺分析，分析項目分為階段內變化分析（表3-6-1）與階段間變化分析（表3-6-2），列表說明如下：

表3-6-1 階段內變化分析

階段內變化分析	
階段長度 (condition length)	是一個特定實驗階段發生作用的時間量，各階段內資料點個數。
趨勢預估 (trend direction)	利用中分法，畫出階段內趨向線，並依此估計趨向走勢。以中分法找出趨向線的步驟說明如下，先將階段內資料平分為二，取兩邊的四分點（兩邊資料點的中日期與中比率，相交點為四分點），四分點相連結成趨向線。趨勢包括加速（+）、減速（-）或是零速（=）。
趨向穩定 (trend stability)	利用中分法，畫出階段內趨向線，趨向線15%範圍內視為穩定範圍，若85% 資料點落於穩定範圍，則說明該趨向具穩定性。落在穩定範圍內的資料點數 ÷ 總資料點數 = 穩定百分比
資料路徑 (data paths within trend)	細分階段內的資料路徑，可能包含多個路徑走向。每一階段內之路徑分為進步（+）、退步（-）或是零加速（=）。
表現水準 (mean)	計算階段內資料點之平均值。
水準穩定性 (level stability)	畫出階段內平均水準線，平均水準線15%範圍內視為穩定範圍，若85% 資料點落於穩定範圍，則說明具穩定的水準。平均水準線說明如下，先計算階段內資料平均數，再以平均數平行X 軸畫出平均水準線。其計算方式為：平均值× 穩定標準 = 可接受穩定範圍
水準範圍	階段內資料最小值至最大值的範圍。

(level range)	
水準變化 (level range)	階段內第一與最後資料點之縱軸值相減，其變化為進步(+)、或退步(-)。

表3-6-2 階段間變化分析

階段間變化分析	
趨勢變化效果 (change in trend direction and effect)	比較兩階段趨向走勢的變化與效果。以正向、無變化與負向，三種走向描述階段間的趨向效果。正向說明進步效果，反之負向則為退步效果。
趨勢穩定性的變化 (change in trend stability)	計算出各階段的穩定度，並標示為「穩定」或是「不穩定」後，再描述相鄰階段間趨向穩定性的變化情形。
水準間變化 (level change)	相鄰兩階段間，後一階段第一點資料減前一階段最後一點資料，其變化為進步(+)、或退步(-)。
重疊百分比 (the percentage of overlap)	為相鄰兩階段的資料重疊比率。計算方式為，落在A範圍之B 資料點數除以資料B 內之總點數，若重疊比率低，說明後一階段的介入效果顯著。
平均變化分數 (change in mean)	B 階段之平均值減去A階段之平均值。

3. 依最少步數完成目標的次數評量表：在基線期、實驗處理期、追蹤期的末期，依「最少步數完成目標的次數評量表」〈附錄三、九、十二〉去評量該受試在基線期、實驗處理期、追蹤期中「最少步數完成目標」的次數多寡和變化，以了解該受試在概念認知的學習成效。

第四章 結果與討論

第一節 型式教學活動的學習成效之分析

本節藉由曲線圖、視覺分析摘要表，以及在基線期、實驗處理期、追蹤期的末期，施測的「依最少步數完成目標的次數評量表」，探討「河內塔遊戲之型式的教學」對三位數學學習障礙學童在型式認知之學習成效。

1. 受試者甲：

在基線期、處理期和追蹤期的末期，測量受試甲，計算其以最少步數完成目標的次數（表4-1-1、表4-1-2、表4-1-3），並將這三期所測量出來的「以最少步數完成目標的次數」統整在表4-1-4，最後繪製成曲線圖（圖4-1-1）的方式呈現，以方便觀察受試甲在這三期表現的起伏狀態，最後進行視覺分析（表4-1-5）。

註：以下表格內的○、△、×（）內數字所代表的意義如下

○：依「最少步數」完成-----成功

△：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗

×：未完成-----失敗

（）內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」，單位為步

表4-1-1 基線期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試甲）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次
搬移第1次	× (9)	△ (22)	△ (19)
搬移第2次	× (27)	△ (16)	△ (18)
搬移第3次	× (31)	○ (15)	△ (21)
搬移第4次	× (26)	× (27)	△ (20)
搬移第5次	△ (17)	△ (20)	△ (19)
搬移第6次	△ (21)	△ (20)	△ (19)
計分 (單位：分)	2	3	2
出現○的總個數 (單位：個)	0	1	0

表4-1-2 處理期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試甲）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次
搬移第1次	○ (15)	△ (18)	○ (15)	○ (15)	△ (17)
搬移第2次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第3次	○ (15)	△ (19)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第4次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第5次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第6次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
計分 (單位：分)	10	6	10	10	8
出現○的總 個數 (單位：個)	6	4	6	6	5

表4-1-3 追蹤期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試甲）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次
搬移第1次	△ (21)	○ (15)	○ (15)
搬移第2次	△ (19)	○ (15)	○ (15)
搬移第3次	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第4次	△ (19)	○ (15)	△ (16)
搬移第5次	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第6次	○ (15)	○ (15)	○ (15)
計分 (單位：分)	5	10	10
出現○的總個數 (單位：個)	3	6	5

表4-1-4 依最少步數完成目標的次數評量總表（受試甲）

測驗次第 評量的時間點	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
基線期末期做評量	2分	3分	2分		
	0個	1個	0個		
處理期末期做評量	10分	6分	10分	10分	8分
	6個	4個	6個	6個	5個
追蹤期末期做評量	5分	10分	10分		
	3個	6個	5個		

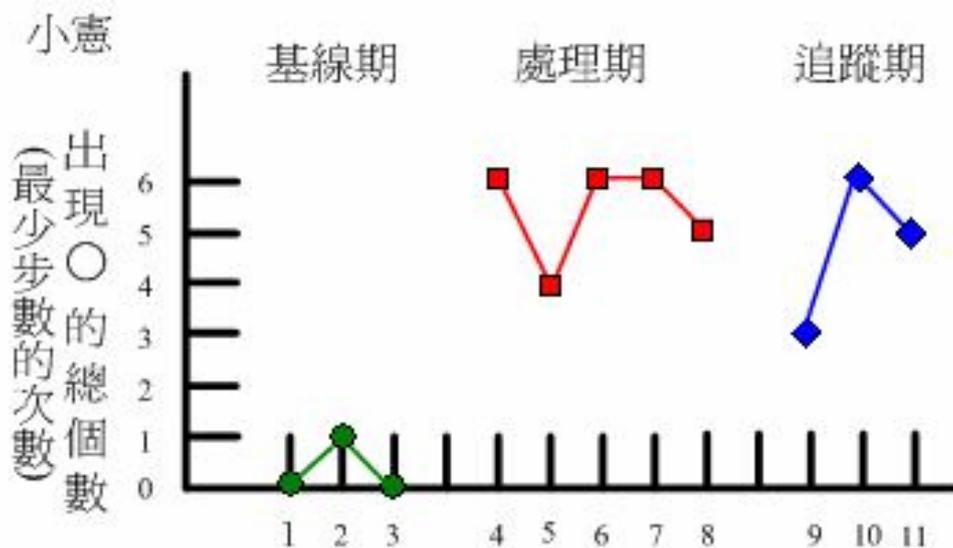


圖4-1-1 依最少步數完成目標的次數之曲線圖 (受試甲)

表4-1-5 依最少步數完成目標的次數之視覺分析摘要表 (受試甲)

		甲		
階段順序		基線期 (A)	處理期 (B)	追蹤期 (C)
階段內變化	階段長度	3	5	3
	趨勢預估	— (三)	/ (+)	/ (+)
	趨向穩定	66.7% 多變	40% 多變	66.7% 多變
	表現水準	0.33	5.4	4.66
	水準穩定性	0% 多變	20% 多變	33% 多變
	水準範圍	0-1	4-6	3-6
	水準變化	0-0 0	6-5 -1	3-5 -2
階段間變化	趨勢變化效果	B/A 正向		C/B 負向
	趨勢穩定性的變化	不穩定至不穩定		不穩定至不穩定
	水準間變化	6		2
	重疊百分比	0		0
	平均變化分數	5.07		0.74

由曲線圖(圖4-1-1)及視覺分析摘要表(4-1-5)中可發現，受試甲在基線期的趨向穩定度為66.7%，水準穩定度為0%，表示依最少步數完成目標的次數

呈現不穩定的狀態。觀察基線期三點探測值，第一點和第三點的基線探測值均為0，第二點為1，第一點和第三點的得分是2分，第一點的得分是3分，連續三點的得分在3分以下，表示該數學學習障礙學童對型式認知概念很缺乏，就可以停止收集基線期的資料點。基線期間，受試甲依最少步數完成目標的次數之水準介於0到1之間，表現水準為0.33。

探討受試甲在處理期的表現，以評估教學成效。處理期的趨向穩定度為40%，水準穩定度20%，依最少步數完成目標的次數呈現不穩定且正向成長狀態。資料路徑觀察，於第一次介入時，路徑馬上向上成長，依最少步數完成目標的次數為6，教學效果立即見效；於第二次介入時，受試甲略有分心，所以呈現向下趨勢至次數為4，此時給予策略的複習及提示，並加以鼓勵，於第三、四次介入教學後，路徑逐漸向上成長至依最少步數完成目標的次數為6，受試甲逐漸熟悉及掌握河內塔型式的概念，也能全程專心完成測驗，於第五次介入教學後，次數小落至5次。觀察處理期五點探測值，其得分各為10分、6分、10分、10分、8分，在第三、四、五連續三次的得分在八分以上，故結束處理期。處理期間，受試甲依最少步數完成目標的次數介於4-6次，表現水準為5.4次，水準變化顯示負向成長1次。此處理期間，說明「河內塔遊戲之型式的教學」具教學輔助功效，但效果不穩定。

受試甲由基線期進入處理期，依最少步數完成目標的次數上升至6次，趨向變化一直處於不穩定成長。介入後，受試甲依最少步數完成目標的次數有馬上提昇，計算階段間的重疊百分比為0%，也說明了教學介入可以提供立即效果。

受試甲進入追蹤期的表現，一開始，依最少步數完成目標的次數為3次，第二點的次數馬上上升，第三點的次數小落至5次，趨向穩定性和水準穩定性皆處於多變狀態。

2. 受試者乙：

在基線期、處理期和追蹤期的末期，測量受試乙，計算其以最少步數完成目標的次數（表4-1-6、表4-1-7、表4-1-8），並將這三期所測量出來的「以最少步數完成目標的次數」統整在表4-1-7，最後繪製成曲線圖（圖4-1-2）的方式呈現，以方便觀察受試乙在這三期表現的起伏狀態，最後進行視覺分析（表4-1-10）。

註：以下表格內的○、△、×（）內數字所代表的意義如下

○：依「最少步數」完成-----成功

△：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗

×：未完成-----失敗

（）內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」，單位為步

表4-1-6 基線期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試乙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次
搬移第1次	× (45)	× (42)	△ (30)
搬移第2次	× (14)	× (16)	× (22)
搬移第3次	△ (29)	× (21)	× (18)
搬移第4次	× (34)	× (37)	△ (28)
搬移第5次	× (30)	△ (29)	△ (39)
搬移第6次	× (38)	△ (22)	× (44)
計分 (單位：分)	1	2	2
出現○的總個數 (單位：個)	0	0	0

表4-1-7 處理期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試乙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次
搬移第1次	○ (15)	△ (20)	○ (15)	△ (16)	○ (15)
搬移第2次	△ (17)	△ (18)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第3次	△ (16)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	△ (16)
搬移第4次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	△ (21)	○ (15)
搬移第5次	○ (15)	△ (18)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第6次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
計分 (單位：分)	6	7	10	8	9
出現○的總個數 (單位：個)	4	3	6	4	5

表4-1-8 追蹤期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試乙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次
搬移第1次	△ (21)	○ (15)	△ (18)
搬移第2次	△ (21)	○ (15)	○ (15)
搬移第3次	○ (15)	△ (20)	○ (15)
搬移第4次	△ (17)	○ (15)	○ (15)
搬移第5次	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第6次	○ (15)	○ (15)	○ (15)
計分 (單位：分)	5	9	8
出現○的總個數 (單位：個)	3	5	5

表4-1-9 依最少步數完成目標的次數評量總表（受試乙）

測驗次第 評量的時間點	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
基線期末期做評量	1分	2分	2分		
	0個	0個	0個		
處理期末期做評量	6分	7分	10分	8分	9分
	4個	3個	6個	4個	5個
追蹤期末期做評量	5分	9分	8分		
	3個	5個	5個		

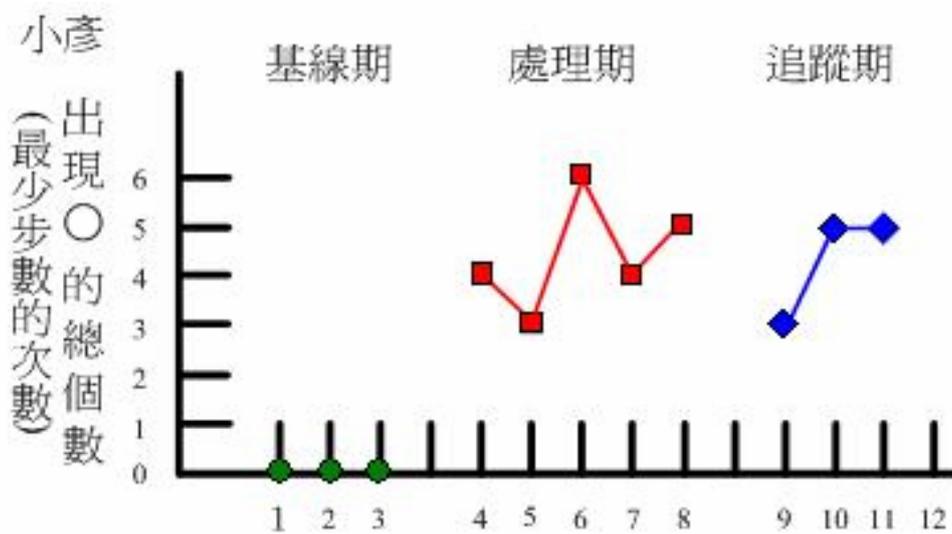


圖4-1-2 依最少步數完成目標的次數之曲線圖 (受試乙)

表4-1-10 依最少步數完成目標的次數之視覺分析摘要表 (受試乙)

		乙		
階段順序		基線期 (A)	處理期 (B)	追蹤期 (C)
階段內變化	階段長度	3	5	3
	趨勢預估	— (二)	/ (+)	/ (+)
	趨向穩定	100% 穩定	40% 多變	66.7% 多變
	表現水準	0	4.4	4.33
	水準穩定性	100% 穩定	60% 多變	0% 多變
	水準範圍	0-0	3-6	3-5
	水準變化	0-0 0	4-5 -1	3-5 -2
階段間變化	趨勢變化效果	B/A 正向		C/B 負向
	趨勢穩定性的變化	不穩定至不穩定		不穩定至不穩定
	水準間變化	4		2
	重疊百分比	0		0
	平均變化分數	4.4		0.07

由曲線圖(圖4-1-2)及視覺分析摘要表(4-1-10)中可發現，受試乙在基線期的趨向穩定度為100%，水準穩定度為100%，表示依最少步數完成目標的次

數都呈現穩定的狀態。觀察基線期三點探測值，第一點、第二點和第三點的基線探測值均為0，第一點、第二點和第三點的得分都是2分，連續三點的得分在3分以下，表示該數學學習障礙學童對型式認知概念很缺乏，就可以停止收集基線期的資料點。基線期間，受試乙依最少步數完成目標的次數之水準為0次，表現水準也為0次。

探討受試乙在處理期的表現，以評估教學成效。處理期的趨向穩定度為40%，水準穩定度60%，依最少步數完成目標的次數呈現不穩定且正向成長狀態。資料路徑觀察，於第一次介入時，路徑馬上向上成長，依最少步數完成目標的次數為4，教學效果立即見效；於第二次介入時，受試乙略有分心，所以呈現向下趨勢至依最少步數完成目標的次數為3次，此時給予策略的複習及提示，並加以鼓勵，於第三次介入教學後，路徑逐漸向上成長至次數為6，於第四次介入教學後，依最少步數完成目標的次數又落至4次，於第五次介入教學後，依最少步數完成目標的次數又上升至5次。觀察處理期五點探測值，其得分各為6分、7分、10分、8分、9分，在第三、四、五連續三次的得分在八分以上，故結束處理期。處理期間，受試乙依最少步數完成目標的次數介於3-6次，表現水準為4.4次，水準變化顯示負向成長1次。此處理期間，說明「河內塔遊戲之型式的教學」具教學輔助功效，但效果不穩定。

受試乙由基線期進入處理期，依最少步數完成目標的次數上升至4次，趨向變化一直處於不穩定成長。介入後，受試乙依最少步數完成目標的次數有馬上提昇，計算階段間的重疊百分比為0%，也說明了教學介入可以提供立即效果。

受試乙進入追蹤期的表現，一開始，依最少步數完成目標的次數為3次，第二點的次數馬上上升至5次，維持至追蹤期結束，依最少步數完成目標的次數之水準為4.33次，趨向穩定性和水準穩定性皆處於多變狀態。

3. 受試者丙：

在基線期、處理期和追蹤期的末期，測量受試丙，計算其以最少步數完成目標的次數（表4-1-11、表4-1-12、表4-1-13），並將這三期所測量出來的「以最少步數完成目標的次數」統整在表4-1-14，最後繪製成曲線圖（圖4-1-3）的方式呈現，以方便觀察受試丙在這三期表現的起伏狀態，最後進行視覺分析（表4-1-15）。

註：以下表格內的○、△、×（）內數字所代表的意義如下

○：依「最少步數」完成-----成功

△：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗

×：未完成-----失敗

（）內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」，單位為步

表4-1-11 基線期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試丙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移第1次	× (45)	× (40)	△ (21)	△ (35)
搬移第2次	△ (26)	× (37)	× (36)	△ (18)
搬移第3次	△ (30)	△ (17)	× (34)	△ (17)
搬移第4次	△ (25)	△ (18)	△ (17)	△ (19)
搬移第5次	× (39)	△ (20)	△ (17)	△ (19)
搬移第6次	× (41)	× (47)	△ (24)	△ (19)
計分 (單位：分)	2	2	2	2
出現○的總個數 (單位：個)	0	0	0	0

表4-1-12 處理期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試丙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次	測驗 第七次
搬移第1次	△ (38)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	△ (21)	○ (15)	△ (21)
搬移第2次	△ (23)	○ (15)	○ (15)	△ (21)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第3次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第4次	○ (15)	△ (18)	○ (15)	○ (15)	△ (17)	○ (15)	○ (15)
搬移第5次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第6次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)	△ (19)	○ (15)
計分 (單位：分)	7	10	10	7	8	10	9
出現○的總 個數 (單位：個)	4	5	6	5	4	5	5

表4-1-13 追蹤期末期評量：依最少步數完成目標的次數評量表（受試丙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移第1次	△ (21)	△ (20)	○ (15)	○ (15)
搬移第2次	× (9)	○ (15)	△ (21)	△ (21)
搬移第3次	× (7)	△ (22)	○ (15)	△ (34)
搬移第4次	△ (26)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
搬移第5次	○ (15)	○ (15)	△ (19)	○ (15)
搬移第6次	○ (15)	○ (15)	○ (15)	○ (15)
計分 (單位：分)	5	6	7	6
出現○的總個數 (單位：個)	2	4	4	4

表4-1-14 依最少步數完成目標的次數評量總表（受試丙）

測驗次第 評量的時間點	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次
基線期末期做評量	2分	2分	2分	2分			
	0個	0個	0個	0個			
處理期末期做評量	7分	10分	10分	7分	8分	10分	9分
	4個	5個	6個	5個	4個	5個	5個
追蹤期末期做評量	5分	6分	7分	6分			
	2個	4個	4個	4個			

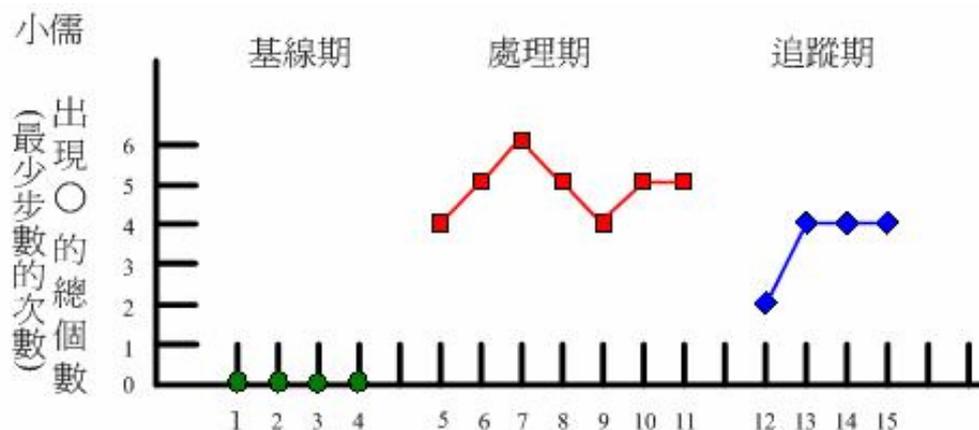


圖4-1-3 依最少步數完成目標的次數之曲線圖 (受試丙)

表4-1-15 依最少步數完成目標的次數之視覺分析摘要表 (受試丙)

階段順序		丙		
		基線期 (A)	處理期 (B)	追蹤期 (C)
階段 內 變 化	階段長度	4	7	4
	趨勢預估	— (二)	— (二)	/ (+)
	趨向穩定	100% 穩定	71% 多變	50% 多變
	表現水準	0	4.85	3.5
	水準穩定性	100% 穩定	57% 多變	0% 多變
	水準範圍	0-0	4-6	2-4
	水準變化	0-0	4-5	2-4
階段 間 變 化	趨勢變化效果	B/A 正向		C/B 負向
	趨勢穩定性的變化	穩定至不穩定		不穩定至不穩定
	水準間變化	4		3
	重疊百分比	0		0
	平均變化分數	4.85		1.35

由曲線圖(圖4-1-3)及視覺分析摘要表(4-1-15)中可發現,受試丙在基線期的趨向穩定度為100%,水準穩定度為100%,表示依最少步數完成目標的次數都呈現穩定的狀態。觀察基線期四點探測值,第一點、第二點、第三點和第四點的基線探測值均為0,第一點、第二點、第三點和第四點的得分都是2

分，連續三點的得分在3分以下，表示該數學學習障礙學童對型式認知概念很缺乏，就可以停止收集基線期的資料點。基線期間，受試丙依最少步數完成目標的次數之水準為0次，表現水準也為0次。

探討受試丙在處理期的表現，以評估教學成效。處理期的趨向穩定度為71%，水準穩定度57%，依最少步數完成目標的次數呈現不穩定且正向成長狀態。資料路徑觀察，於第一次介入時，路徑馬上向上成長，依最少步數完成目標的次數為4，教學效果立即見效；於第二次、第三次介入時，教學效果持續成長，於第四次、第五次介入時，受試丙略有分心，所以呈現向下趨勢至次數為4，此時給予策略的複習及提示，並加以鼓勵，於第六次、第七次介入教學後，路徑逐漸向上成長至依最少步數完成目標的次數為5。觀察處理期五點探測值，其得分各為7分、10分、10分、7分、8分、10分、9分，在第五、六、七連續三次的得分在八分以上，故結束處理期。處理期間，受試丙依最少步數完成目標的次數介於4-6次，表現水準為4.85次，水準變化顯示負向成長1次。此處理期間，說明「河內塔遊戲之型式的教學」具教學輔助功效，但效果不穩定。

受試丙由基線期進入處理期，依最少步數完成目標的次數上升至4次，趨向變化一直處於不穩定成長。介入後，受試丙依最少步數完成目標的次數有馬上提昇，計算階段間的重疊百分比為0%，也說明了教學介入可以提供立即效果。

受試丙進入追蹤期的表現，一開始，依最少步數完成目標的次數為2次，第二點的次數馬上上升至4次，維持至追蹤期結束，依最少步數完成目標的次數之水準為3.5次，趨向穩定性和水準穩定性皆處於多變狀態。

第二節 型式認知概念建立的過程之分析

針對數學學習障礙學童在型式認知概念的建立過程中，在基本能力的培養、處理期、追蹤期都有設計教學活動及評量，慢慢建立起數學學習障礙學童的型式認知概念，分基本能力的培養、在處理期之型式認知概念的建立、在追蹤期之型式認知概念的建立三大部分如下。

一、基本能力的培養

讓數學學習障礙學童先認識搬移河內塔2、3個圓盤時一共有12種型式（pattern），並讓數學學習障礙學童實際操作解決搬移河內塔2、3個圓盤的問題，測量數學學習障礙學童可以用最少步數完成目標的次數（用○表示該數學學習障礙學童是用最少步數完成目標，○個數越多，則表示該數學學習障礙學童是用最少步數完成目標的次數越多）。

依型式的基本能力評量一和型式的基本能力評量二的評量結果作為學習成效的指標，其說明如下。

（一）型式的基本能力評量一：寫出12種的型式（pattern）

1. 計分標準：

寫搬移3個圓盤的六種pattern（型式）：每寫出一種就得1分，最高可得6分。寫搬移2個圓盤的六種pattern：若寫出一種就得1分，寫出二、三種，均可得2分，寫出四、五種均可得3分，寫出全部六種可得4分，所以，寫滿十二種pattern，最高可得10分。

型式的基本能力評量（一）必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，才算是具備搬移2、3個圓盤（pattern）的基本能力。受試者必須需要具備搬移2、3個圓盤的基本能力，才能進入基線期。

註1：搬移2個圓盤和搬移3個圓盤的型式之基本能力，可以透過不斷的嘗試而養成。

註2：搬移2個圓盤只需要三個步數即可達到目標，搬移3個圓盤則需要七個步數才可達到目標，所以計分上，成功搬移3個圓盤的給分較高。

2. 操作結果評量：

註：表格中「對6/6」是指「對6種/6種」

表4-2-1 寫出12種的型式之評量結果（受試甲）

測驗次第 搬移的圓盤數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移2個圓盤	對6/6 4分	對5/6 3分	對6/6 4分	對6/6 4分
搬移3個圓盤	對6/6 6分	對5/6 5分	對6/6 6分	對6/6 6分
計分	10分	8分	10分	10分

表4-2-2 寫出12種的型式之評量結果（受試乙）

測驗次第 搬移的圓盤數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移2個圓盤	對5/6 3分	對5/6 3分	對5/6 3分	對6/6 4分
搬移3個圓盤	對6/6 6分	對6/6 6分	對5/6 5分	對6/6 6分
計分	9分	9分	8分	10分

表4-2-3 寫出12種的型式之評量結果（受試丙）

測驗次第 搬移的圓盤數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次
搬移2個圓盤	對6/6 4分	對6/6 4分	對5/6 3分
搬移3個圓盤	對5/6 5分	對6/6 6分	對6/6 6分
計分	9分	10分	9分

3. 操作結果分析：

三位數學學習障礙學童對於搬移2個圓盤和3個圓盤都一樣充滿解題動機，幾乎都可以將十二種搬移的pattern（型式）全部寫出來，過程中如果不小心寫錯，都堅持要重新再操作一次，不願意讓老師打叉，如果自己發現怪怪的，而自行馬上修正錯誤，則不予扣分。

小憲錯誤的地方在於同一根柱子中有「1、2」兩個不同大小的圓盤，小憲先把數字大的圓盤搬移出來，要是實際操作，應該就不會犯此錯誤，本測驗可以自己靠邏輯寫出答案，不一定要經過操作過程。

小彥的錯誤在於搬移一個圓盤，就要寫一次紀錄，小彥少紀錄其中一個步驟，所以會發生搬完的時候，其總步驟竟然比最少步驟還要少的奇怪現象。有時候小彥也會搬錯位置，多一次來回操作，就無法以最少步驟完成，造成扣分。

小儒的錯誤在於搬移3個圓盤時的步驟比較多，比較多時，小儒搬到一半就開始混淆了，忘記下一個步驟怎樣搬才對，搬來搬去，紀錄就擦來擦去。搬移2個圓盤時，一開始，第一個圓盤要搬到「非終點柱」，小儒將第一個圓盤搬到「終點柱」，就會造成無法以最少的步驟完成的錯誤情形。

(二) 型式的基本能力評量二：搬移河內塔2、3個圓盤之操作評量

1. 計分標準：

- 10分：連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成。
- 9分：連續第一次、第二次均以最少步數完成。
- 8分：第一次失敗；第二次、第三次均以最少步數完成。
- 7分：在第三次、第四次連續以最少步數完成。
- 6分：在第四次、第五次連續以最少步數完成。
- 5分：在第五次、第六次連續以最少步數完成。
- 4分：以最少步數通過兩次以上，但並未連續通過。
- 3分：以最少步數通過一次。
- 2分：有完成目標二次以上，但不是用最少步數完成。
- 1分：有完成目標一次，但不是用最少步數完成。
- 0分：六次完全沒有完成目標。

測試數學學習障礙學童由A柱、B柱或C柱搬移2個圓盤、3個圓盤到指定的其他柱，如果連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成，就可得10分；如果連續三次收集到資料都是10分，表示該數學學習障礙學童具備搬移2個圓盤，和搬移3個圓盤之型式的基本能力，則該數學學習障礙學童才有資格當作樣本，而接著進行其搬移4個圓盤資料點的收集

2. 操作結果評量：

註：以下表格內的○、△、×（）內數字所代表的意義如下

- ：依「最少步數」完成-----成功
- △：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗
- ×：未完成-----失敗
- （）內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」，單位為步

小 憲

表4-2-4 搬移2個圓盤，且依最少步數完成目標的次數之評量結果（受試甲）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移第1次	△（5）	○（3）	○（3）	○（3）
搬移第2次	△（5）	○（3）	○（3）	○（3）
搬移第3次	○（3）	○（3）	○（3）	○（3）
搬移第4次	△（5）	○（3）	○（3）	○（3）
搬移第5次	○（3）	○（3）	○（3）	○（3）
搬移第6次	○（3）	○（3）	○（3）	○（3）
計分 （單位：分）	5	10	10	10
出現○的總個數 （單位：個）	3	6	6	6

表4-2-5 搬移3個圓盤，且依最少步數完成目標的次數之評量結果（受試甲）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第1次	△（12）	○（7）	△（8）	○（7）	○（7）	○（7）
搬移第2次	△（10）	△（13）	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）
搬移第3次	×	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）
搬移第4次	△（8）	△（8）	△（15）	○（7）	○（7）	○（7）
搬移第5次	△（11）	△（14）	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）
搬移第6次	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）	○（7）
計分 （單位：分）	3	4	5	10	10	10
出現○的總個數 （單位：個）	1	3	4	6	6	6

小 彥

表4-2-6 搬移2個圓盤，且依最少步數完成目標的次數之評量結果（受試乙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移第1次	△ (5)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第2次	△ (5)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第3次	○ (3)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第4次	△ (5)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第5次	○ (3)	△ (5)	○ (3)	○ (3)
搬移第6次	○ (3)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
計分 (單位：分)	5	10	10	10
出現○的總個數 (單位：個)	3	5	6	6

表4-2-7 搬移3個圓盤，且依最少步數完成目標的次數之評量結果（受試乙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次
搬移第1次	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)
搬移第2次	△ (10)	× (6)	○ (7)	○ (7)	○ (7)
搬移第3次	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)
搬移第4次	×	△ (8)	○ (7)	○ (7)	○ (7)
搬移第5次	△ (14)	○ (7)	△ (11)	△ (10)	○ (7)
搬移第6次	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)
計分 (單位：分)	4	5	10	10	10
出現○的總個數 (單位：個)	3	4	5	5	6

小 儒

表4-2-8 搬移2個圓盤，且依最少步數完成目標的次數之評量結果（受試丙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
搬移第1次	△ (5)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第2次	△ (5)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第3次	○ (3)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第4次	△ (5)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
搬移第5次	○ (3)	△ (5)	○ (3)	○ (3)
搬移第6次	○ (3)	○ (3)	○ (3)	○ (3)
計分 (單位：分)	5	10	10	10
出現○的總個數 (單位：個)	3	5	6	6

表4-2-9 搬移3個圓盤，且依最少步數完成目標的次數之評量結果（受試丙）

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第1次	×	×	△ (8)	△ (13)	○ (7)	○ (7)
搬移第2次	△ (10)	×	○ (7)	△ (11)	○ (7)	○ (7)
搬移第3次	×	△ (15)	○ (7)	○ (7)	×	○ (7)
搬移第4次	△ (9)	△ (15)	△ (15)	○ (7)	○ (7)	○ (7)
搬移第5次	△ (13)	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (7)	△ (8)
搬移第6次	○ (7)	○ (7)	○ (7)	○ (3)	○ (7)	○ (7)
計分 (單位：分)	3	5	5	10	10	10
出現○的總個數 (單位：個)	1	2	4	4	5	5

3. 操作結果分析：

這三位數學學習障礙學童都能在不斷地自我嘗試之後，通過連續三次以最少步數達成目標，並在不同時間收集到三次資料都達到10分的標準，所以這三位數學學習障礙學童都有資格當作樣本，接著進行其搬移4個圓盤資料點的基線期收集。

二、處理期之型式認知概念的建立

在實驗處理期中，讓數學學習障礙學童從不斷的分堆、嘗試錯誤的操作中去建立型式認知的概念，老師教導數學學習障礙學童一套解決河內塔搬移遊戲的策略，從中建立型式認知的概念。

將「河內塔遊戲之型式的教學」的解題步驟分為三大階段，在實驗處理期中做教學，並在每節教學完之後做形成性成效評量，包括形成性成效評量（一）、形成性成效評量（二）、形成性成效評量（三），評量內容放在附錄〈四〉、附錄〈六〉、附錄〈七〉，其中分堆紀錄表（附錄〈五〉）是讓數學學習障礙學童從不斷的分堆、嘗試錯誤的操作中去建立型式認知的概念。三個形成性成效評量的評量結果作為學習成效，將這三個形成性評量的正確率整合在附錄〈八〉之中、說明如下。

（一）形成性成效評量一：找起始柱與終點柱、參照寫入

1. 計分標準：

本評量共有五題，每題都有4個目標（目標1：找出非固定數字的起始柱和終點柱。目標2：從12種情形中找出正確的pattern當參照。目標3：找出固定不動之數字。目標4：將固定不動之數字填入每一張空白卡），只做對1個目標得0分，做對2個目標就得1分，做對3個目標得1分，做對4個目標得2分，每題都有4個目標，每題最高得2分，本評量共有五題，共計最高可得10分。

實驗處理期共分成三個階段，有形成性成效評量（一）、（二）、（三），在形成性成效評量（一）中，必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，第一階段的學習成效達到穩定，才能進入實驗處理期的第二個階段之學習。

2. 操作結果評量：

註：表格中「對4/4」是指「對4個/4個」

表4-2-10 找起始柱與終點柱、參照寫入空白卡之評量結果（受試甲）

測驗次第 該評量之題數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
第一題	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第二題	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第三題	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第四題	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第五題	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對3/4 (1分)
計分	9分	10分	10分	9分

表4-2-11 找起始柱與終點柱、參照寫入空白卡之評量結果（受試乙）

測驗次第 該評量之 題數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次
第一題	對1/4 (0分)	對0/4 (0分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第二題	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第三題	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)
第四題	對4/4 (2分)	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第五題	對4/4 (2分)	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)
計分	7分	5分	9分	8分	10分

表4-2-12 找起始柱與終點柱、參照寫入空白卡之評量結果（受試丙）

測驗次第 該評量之 題數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次
第一題	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)
第二題	對1/4 (0分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第三題	對2/4 (1分)	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
第四題	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)	對3/4 (1分)	對4/4 (2分)	對3/4 (1分)
第五題	對1/4 (0分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)	對4/4 (2分)
計分	3分	8分	8分	9分	8分

3. 操作結果分析：

小憲錯誤的地方在於「目標1：找出非固定數字的起始柱和終點柱」找錯柱子了，也就是說觀察非固定數字是由哪一根柱子搬移到哪一根柱子，觀察錯誤、找錯柱子了，依第五題說明如下，看起始柱中「非固定的數字」有「1、2、3」，編號「1、2、3」的三個圓盤都是插在A柱，而終點柱中編號「1、2、3」的三個圓盤都是插在B柱，可見是由A柱搬移到B柱，起始柱是A柱，終點柱是B柱，亦即正確答案就是由A搬到B。另一個錯誤是「目標2：從12種情形中找出正確的pattern當參照」小憲找錯了，依第五題說明如下，看起始柱中「非固定的數字」有「1、2、3」，編號「1、2、3」的三個圓盤都是插在A柱，而終點柱中編號「1、2、3」的三個圓盤都是插在B柱，可見是由A柱搬移到B柱；雖然題目上有編號「1、2、3、4」的四個圓盤，但是其中，數字4是固定不動的，真正移動、有搬移的數字只有「1、2、3」的三個圓盤，所以可以視作「搬移3個圓盤」的解題步驟，只要從待選的12種pattern（型式）中去挑選出「搬

移3個圓盤，而且是由A柱搬移到B柱」的pattern（型式），就是正確的答案了。

小彥大多錯在「目標1：找出非固定數字的起始柱和終點柱」，其次錯在「目標3：找出固定不動之數字」，少數一、兩題錯在「目標3：找出固定不動之數字」，分析這些錯誤，可以知道小彥在觀察「起始柱和終點柱」中，「非固定之數字和固定不動之數字」就常看錯了，以致有5分、7分、8分的分數，分數不佳。

小儒第一天大多是錯在「目標1：找出非固定數字的起始柱和終點柱」，和「目標4：將固定不動之數字填入每一張空白卡」，從第二天之後，都是錯在「目標1：找出非固定數字的起始柱和終點柱」，其中「目標3：找出固定不動之數字」只粗心錯了一次。第一天時，因為不熟悉照著找到的pattern（型式），就「一對一」一張一張的對應抄寫過去，常常抄錯，五題錯了四題，待熟悉抄寫過程應該專注在一張一張的對應好，之後的評量，就都沒出現同樣的錯誤了。小儒常犯的錯誤在「目標1：找出非固定數字的起始柱和終點柱」，可見小儒在觀察「起始柱和終點柱」中的數字，對「非固定的數字」的移動常看走眼。

三位受試者在形成性成效評量（一）中，均有出現連續三次的得分在八分以上，表示實驗處理期的第一階段的學習成效達到穩定，三位受試者都有資格進入實驗處理期的第二個階段之學習。

(二) 形成性成效評量二：分堆紀錄表

1. 分堆的目的：

數學學習障礙學童具備搬移2、3個圓盤的基本能力後，想要解決搬移4個圓盤的問題，必須從要搬移的4個圓盤中進行分堆（分成2、或3堆）的猜測，對分堆的問題，不斷探索哪一種分堆有效，最後導致如何分堆成功操作的發現，此舉有助於河內塔遊戲問題的思考和解題能力的開拓。

2. 操作評量紀錄：

小 憲

表4-2-13 4個圓盤分成2堆之分堆紀錄（受試甲）

4個圓盤分成2堆（4個圓盤視作2個圓盤，來做搬移的動作）

分堆方式	第一次		第二次		第三次		第四次		第五次	
4個圓盤 分成2組 之情形	1 2	3 4	1	2 3 4	2 3	1 4	1	2 3 4	1 2 3	4
分堆成功與否	不成功		不成功		放不進柱子 不成功		不成功		成功	

表4-2-14 4個圓盤分成3堆之分堆紀錄（受試甲）

4個圓盤分成3堆（4個圓盤視作3個圓盤，來做搬移的動作）

分堆方式	第一次			第二次			第三次			第四次			第五次		
4個圓盤 分成3組 之情形	1	2 3	4	1	2	3 4	1	2 3	4	1	2	3 4	1 2	3	4
分堆成功與否	不成功			不成功			不成功			不成功			成功		

小 彥

表4-2-15 4個圓盤分成2堆之分堆紀錄（受試乙）

4個圓盤分成2堆（4個圓盤視作2個圓盤，來做搬移的動作）

分堆方式	第一次		第二次		第三次	第四次		第五次	第六次
4個圓盤 分成2組 之情形	1 2	3 4	1 4	2 3	同 第一次	1 3	2 4	同 第一次	同 第四次
分堆成功與否	不成功		放不進柱子 不成功		不成功	放不進柱子 不成功		不成功	不成功

第七次		第八次		第九次		第十次	第十一次	
1	2	1	2	1	2	同 第一次	1	4
	3	3			3		2	
	4	4			4		3	
不成功		放不進柱子 不成功		不成功		不成功	成功	

表4-2-16 4個圓盤分成3堆之分堆紀錄（受試乙）

4個圓盤分成3堆（4個圓盤視作3個圓盤，來做搬移的動作）

分堆方式	第一次			第二次			第三次			第四次		
4個圓盤 分成3組 之情形	1	2	3 4	1	2 3	4	1 3	2	4	1	2	3 4
分堆成功與否	不成功			不成功			放不進柱子 不成功			成功		

小 儒

表4-2-17 4個圓盤分成2堆之分堆紀錄（受試丙）

4個圓盤分成2堆（4個圓盤視作2個圓盤，來做搬移的動作）

分堆方式	第一次		第二次		第三次		第四次	第五次	第六次	
4個圓盤 分成2組 之情形	1	3	1	2	1	2	同 第二次	同 第三次	1	3
	2	4	3			3			2	
			4			4			4	
分堆成功與否	不成功		放不進柱子 不成功		不成功		不成功	不成功	放不進柱子 不成功	

第七次		第八次	
1	2	1	4
4	3	2	
		3	
放不進柱子 不成功		成功	

表4-2-18 4個圓盤分成3堆之分堆紀錄（受試丙）

4個圓盤分成3堆（4個圓盤視作3個圓盤，來做搬移的動作）

分堆方式	第一次			第二次			第三次			第四次		
4個圓盤 分成3組 之情形	1	2	4	1	2	4	1	3	4	1	2	3
	3				3		2					4
分堆成功與否	放不進柱子 不成功			不成功			不成功			成功		

（三）操作結果分析：

一開始讓數學學習障礙學童自由測試如何將4個圓盤分成2堆，也就是說把4個圓盤分成2堆之後，就可以當作2個圓盤來搬移。

數學學習障礙學童經過各種分堆法後，會發現有些分堆法放不進柱子中，導致分堆不成功，例如：將2、3號圓盤分為一堆，將1、4號圓盤分為另一堆。

數學學習障礙學童經過各種分堆法後，也會發現有些分堆法雖然一開始可以放進柱子中，但經過不斷操作，細部分解到一次只能搬移一個圓盤時，會發現有大的圓盤壓到小的圓盤的違規情形，搬移導致分堆不成功，例如：將1、2號圓盤分為一堆，將3、4號圓盤分為另一堆。

同樣的分堆不成功的情形，也發生在將4個圓盤分成3堆的時候。

三位受試者在不斷的操作中，做測試，驗證所想的分堆成不成功，最後三位受試者都是測試到分堆成功之後才停止搬移，可見河內塔遊戲是一個有趣的教學媒材。

(三) 形成性成效評量二：有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡

1. 計分標準：

本評量有三個學習目標，共有十題，滿分是10分：

目標1（是否做有效分組？）：有兩題，一題1分，最高可得2分

目標2（是否可以寫出一張對應卡？）：有兩題，一題1分，最高可得2分

目標3（是否會利用型式複製某一pattern至空白卡，完成對應？）：有六題，一題1分，最高可得6分

實驗處理期共分成三個階段，有形成性成效評量（一）、（二）、（三），在形成性成效評量（二）中，必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，第二階段的學習成效達到穩定，才能進入實驗處理期的第三個階段之學習。

2. 操作結果評量：

註：表格中「對2/2」是指「對2題/2題」

表4-2-19 有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡之評量結果（受試甲）

測驗次第 該評量之題數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
目標1	對2/2-2分	對0/2-0分	對1/2-1分	對2/2-2分
目標2	對2/2-2分	對2/2-2分	對2/2-2分	對2/2-2分
目標3	對6/6-6分	對6/6-6分	對5/6-5分	對6/6-6分
計分	10分	8分	8分	10分

表4-2-20 有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡之評量結果（受試乙）

測驗次第 該評量之題數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次
目標1	對0/2-0分	對2/2-2分	對2/2-2分	對2/2-2分
目標2	對2/2-2分	對0/2-0分	對2/2-2分	對2/2-2分
目標3	對5/6-5分	對6/6-6分	對5/6-5分	對6/6-6分
計分	7分	8分	9分	10分

表4-2-21 有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡之評量結果（受試丙）

測驗次第 該評量之題數	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次
目標1	對2/2-2分	對2/2-2分	對2/2-2分
目標2	對2/2-2分	對2/2-2分	對2/2-2分
目標3	對5/6-5分	對4/6-4分	對5/6-5分
計分	9分	8分	9分

3. 操作結果分析：

三位受試者在形成性成效評量（二）中，均有出現連續三次的得分在八分以上，表示實驗處理期的第二階段的學習成效達到穩定，三位受試者都有資格進入實驗處理期的第三個階段之學習。

(四) 形成性成效評量三：操作動作之檢核表

1. 計分標準：

附錄<七>有十題，滿分是10分：做對一題得1分，全部有10題，滿分是10分

2. 操作結果評量：

表4-2-22 解決搬移4個圓盤問題的操作動作之檢核表（受試甲）

	第一次	第二次	第三次
檢核10題	對10題/10題	對10題/10題	對10題/10題
計分	10分	10分	10分

表4-2-23 解決搬移4個圓盤問題的操作動作之檢核表（受試乙）

	第一次	第二次	第三次
檢核10題	對9題/10題	對9題/10題	對10題/10題
計分	9分	9分	10分

表4-2-24 解決搬移4個圓盤問題的操作動作之檢核表（受試丙）

	第一次	第二次	第三次
檢核10題	對10題/10題	對10題/10題	對10題/10題
計分	10分	10分	10分

3. 操作結果分析：

三位受試者在形成性成效評量（三）中，均有出現連續三次的得分在八分以上，表示實驗處理期的第三階段的學習成效達到穩定，三位受試者對三個階段的實驗教學都有穩定的學習成效。

(五) 三個形成性成效評量的正確率

1. 循序漸進的形成性成效評量

實驗處理期共分成三個階段，有形成性成效評量（一）、形成性成效評量（二）、形成性成效評量（三），在形成性成效評量（一）中，必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，亦即第一階段的學習成效達到穩定，才能進入實驗處理期的第二個階段之學習。在實驗處理期第二個階段之形成性成效評量（二）中，必須一直測試到連續三次的得分均在八分以上，亦即第二階段的學習成效達到穩定，才能進入實驗處理期的第三個階段之學習。

2. 三個形成性成效評量之正確率統整

表4-2-25 處理期的三個形成性成效評量之正確率（受試甲）

實驗處理期的資料點：小憲

測驗次第 型式的 學習性評量 之正確率	第一次	第二次	第三次	第四次
評量（一）	9分（90%）	10分（100%）	10分（100%）	9分（90%）
評量（二）	10分（100%）	8分（80%）	8分（80%）	10分（100%）
評量（三）	10分（100%）	10分（100%）	10分（100%）	

表4-2-26 處理期的三個形成性成效評量之正確率（受試乙）

實驗處理期的資料點：小彥（乙）

測驗次第 型式的 學習性評量 之正確率	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
評量（一）	7分（70%）	5分（50%）	9分（90%）	8分（80%）	10分（100%）
評量（二）	7分（70%）	8分（80%）	9分（90%）	10分（100%）	
評量（三）	9分（90%）	9分（90%）	10分（100%）		

表4-2-27 處理期的三個形成性成效評量之正確率（受試丙）

實驗處理期的資料點：小儒（丙）

測驗次第 型式的 學習性評量 之正確率	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
評量（一）	3分（30%）	8分（80%）	8分（80%）	9分（90%）	8分（80%）
評量（二）	9分（90%）	8分（80%）	9分（90%）		
評量（三）	10分（100%）	10分（100%）	10分（100%）		

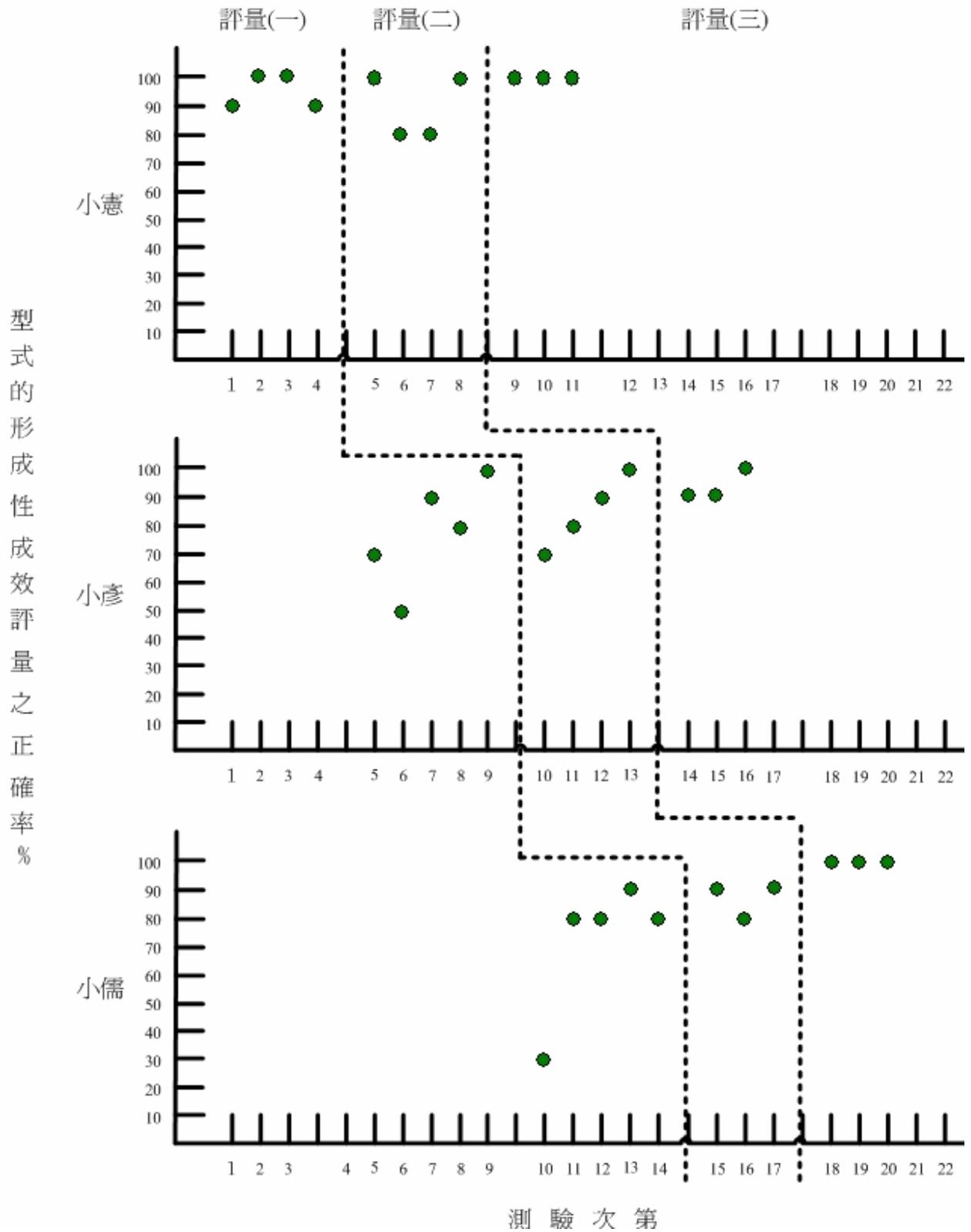


圖4-2-1 型式的形成性成效評量之正確率（受試甲乙丙）

3. 操作結果分析

三位受試在實驗處理期的三個階段（三個形成性成效評量）中，都一直測試到連續三次的得分在八分以上，亦即該階段的學習成效達到穩定之後，才進入實驗處理期的下一個階段之學習。

如圖4-2-1，受試甲進行第一個階段的實驗教學活動時，受試乙仍持續進行基線資料之蒐集，當受試甲第一個階段的實驗處理期資料趨於穩定之後（9、10、10、9分），受試甲才可進入第二階段的實驗處理，而此時才進行受試乙第一個階段的實驗處理，此時受試丙仍持續進行基線資料之蒐集；當受試乙第一個階段的實驗處理期資料趨於穩定之後（9、8、10分），且受試甲第二階段的實驗處理資料趨於穩定（10、8、8、10分），受試甲進入第三階段之實驗處理，受試乙才可進入第二階段的實驗處理，而此時才開始進行受試丙第一個階段的實驗處理，以此類推，直到三位受試者的三個階段之實驗處理都趨於穩定之後，才停止實驗處理。

三、追蹤期之型式認知概念的建立

在處理期結束後一星期、二星期，讓數學學習障礙學童利用紙卡、實際操作解決搬移河內塔4個圓盤的問題，藉以測量數學學習障礙學童對「河內塔遊戲之型式的教學」的短期保留成效為何；在處理期結束後一個月，讓數學學習障礙學童利用紙卡、實際操作解決搬移河內塔4個圓盤的問題，藉以測量數學學習障礙學童對「河內塔遊戲之型式的教學」的長期保留成效為何。

依短期保留成效評量（附錄〈十〉）和長期保留成效評量（附錄〈十一〉）的評量結果作為保留成效，其說明如下。

（一）短期保留成效評量

1. 計分標準：

「短期保留成效評量」是一種保留評量，其評量方式係指受試者在實驗教學期停止後開始計算一個星期後，和二個星期後，所做的操作評量，有十題，滿分是10分，做對一題得1分，全部有10題，滿分是10分最高各為10分

2. 操作結果評量：

表4-2-28 短期保留成效評量之評量結果（受試甲）

小彥

實驗教學期停止後開始計算	一個星期後	二個星期後
檢核10題	對10題/10題	對10題/10題
計分	10分	10分

表4-2-29 短期保留成效評量之評量結果（受試乙）

小憲

實驗教學期停止後開始計算	一個星期後	二個星期後
檢核10題	對10題/10題	對10題/10題
計分	10分	10分

表4-2-30 短期保留成效評量之評量結果（受試丙）

小儒

實驗教學期停止後開始計算	一個星期後	二個星期後
檢核10題	對10題/10題	對10題/10題
計分	10分	10分

（三）操作結果分析：

三位數學學習障礙學童在一個星期後、兩個星期後用紙卡操作，去解決河內塔遊戲搬移4個圓盤的問題，評量的結果都得到滿分，可見「河內塔遊戲之型式教學」的策略學習，具有短期保留的學習成效。

(二) 長期保留成效評量

1. 計分標準：

「長期保留成效評量」是一種保留評量，其評量方式係指受試者在實驗教學期停止後開始計算一個月後，所做的操作評量，有十題，滿分是10分，做對一題得1分，全部有10題，滿分是10分最高各為10分

2. 操作結果評量：

表4-2-31 長期保留成效評量之評量結果（受試甲）

實驗教學期停止後開始計算	一個月後
檢核10題	對10題/10題
計分	10分

表4-2-32 長期保留成效評量之評量結果（受試乙）

實驗教學期停止後開始計算	一個月後
檢核10題	對10題/10題
計分	10分

表4-2-33 長期保留成效評量之評量結果（受試丙）

實驗教學期停止後開始計算	一個月後
檢核10題	對10題/10題
計分	10分

3. 操作結果分析：

三位數學學習障礙學童在一個月後，用紙卡操作，去解決河內塔遊戲搬移4個圓盤的問題，評量的結果都得到滿分，可見「河內塔遊戲之型式教學」的策略學習，具有長期保留的學習成效。

第三節 型式教學活動對擬訂解題計畫能力影響之分析

擬訂解題計畫能力係指當數學學習障礙學童運用紙卡成功解決搬移4個圓盤和搬移5個圓盤的問題後，測試數學學習障礙學童是否可以口述出自己剛剛所擬訂的解決「搬移4個圓盤」問題的解題計畫，以及測試數學學習障礙學童是否可以經由排列步驟卡的方式，排出解決「搬移5個圓盤」的解題計畫。

研究者將數學學習障礙學童口述擬訂的解決搬移4個圓盤的解題計畫，記錄在附錄〈十四〉；此外，將數學學習障礙學童經由排列步驟卡的方式，所排出的解決「搬移5個圓盤」的解題計畫，記錄在附錄〈十五〉，並加以分析。

讓數學學習障礙學童自己反思搬移4個圓盤和搬移5個圓盤的解題計畫中，有哪些具有相同的型式概念，此種反思可以幫助數學學習障礙學童類化到搬移更多的圓盤、難度更深一層的問題解決上。

一、以口述紀錄方式擬訂解題計畫（搬移4個圓盤）

（一）實施方法

數學學習障礙學童將其操作的過程用自己的話，有順序的說出來，或是將解題步驟用排列名片卡的方式排列出來，這就是數學學習障礙學童自己思考所擬訂的解題計畫。將數學學習障礙學童口述的、或排列的解題計畫流程和河內塔遊戲操作流程圖（圖3-1-2）的細目條列（表4-3-1）做核對，如果主要的項目和邏輯順序都有口述或排列出來，表示該數學學習障礙學童在解決河內塔的搬移問題時，具有擬訂解題計畫的能力。

搬移4個圓盤的解題計畫是讓數學學習障礙學童採用口述的方式，將整個解題流程說出來、老師紀錄。將三位受試口述的解決4個圓盤的流程紀錄如下（表4-3-1、表4-3-2、表4-3-3），並加以分析。

表 4-3-1 河內塔遊戲操作流程圖之細目條列表

14 個步驟流程--檢核項目	
步驟 1	取出起始卡、取出終點卡
步驟 2	選擇 2 的 pattern、或 3 的 pattern 當參照
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 6	是否做有效分組？
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡
步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成為第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中

(二) 實施結果

三位受試者在擬定解題計畫的表現情形如表 4-3-2、表 4-3-3、表 4-3-4 所示

表 4-3-2 擬訂解決搬移 4 個圓盤的解題計畫--口述紀錄 (受試甲)

	數學學習障礙學童的計畫	檢核編號												
1	做決定由哪一根柱子搬移到哪一根柱子。例如：由 A 柱搬移到 C 柱。	3												
2	寫出初始卡和最終卡的圓盤代號。說明： 	1												
3	寫出對應卡。說明： <table border="1" data-bbox="284 896 478 1075"> <tr> <td></td> <td>→</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>→</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>→</td> <td>4</td> </tr> </table>		→	1	1		2	2	→	3	3	→	4	6、7
	→	1												
1		2												
2	→	3												
3	→	4												
4	在 12 種型式 (pattern) 中，找出一樣的。說明：找出一樣是從 A 柱搬移到 C 柱，因為剛剛把 4 個圓盤分成三組，所以要找搬移 3 個圓盤的型式。	2、3												
5	插入 6 張空白卡。說明： 移動的圓盤數是 3 個時，就要補 6 張空白卡 (亦即要插入「2 的 n 次方 - 2」空白卡。2 的 3 次方 - 2 = 6)	4												
6	對應所選出來的型式，和「對應卡」，將空白卡填滿數字	5、8												
7	將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9												
8	從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10												
9	檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？(如果不是)	11												
10	插入 2 張空白卡。說明： 觀察後知道移動的圓盤數是 2 個時，就要補 2 張空白卡 (亦即要插入「2 的 n 次方 - 2」空白卡。2 的 2 次方 - 2 = 2)	4												
11	觀察上下兩張卡中「非固定數字」的位置，將中間的空白卡填好數字	5、8												
12	將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9												
13	從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10												

14	檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？（如果是）	11
15	將第一張卡放入答案區中，第二張卡往上移到第一張卡的位置（變成第一張卡），再從「待檢區」中拿出一張卡，當作第二張卡	13
16	檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？（如果不是）	11
17	插入 2 張空白卡。說明： 觀察後知道移動的圓盤數是 2 個時，就要補 2 張空白卡（亦即要插入「2 的 n 次方-2」空白卡。2 的 2 次方-2=2）	4
18	觀察上下兩張卡中「非固定數字」的位置，將中間的空白卡填好數字	5、8
19	將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9
20	從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10
21	-----（一直重複）省略	
22	一直寫到「待檢區」中的卡片全部都拿光了	12、14

小憲一共說了22個步驟（不計算中間因重複而省略的步驟），對於河內塔遊戲的操作流程圖之14個步驟都有包含在內，可見小憲對解決搬移4個圓盤的解題計畫的擬訂，都有掌握到解題策略的重點，小憲所擬訂的解題計畫堪稱完備。

表 4-3-3 擬訂解決搬移 4 個圓盤的解題計畫--口述紀錄 (受試乙)

*粗體字是小彥說的話

數學學習障礙學童的計畫		檢核編號												
1	先看是由哪一根(柱子)搬移到哪一根(柱子)。 例如：由 A 柱搬移到 C 柱。	3												
2	在 12 種型式 (pattern) 中，找出由 A 柱搬移到 C 柱的。 說明：找出一樣是從 A 柱搬移到 C 柱，因為剛剛把 4 個圓盤分成三組，所以要找搬移 3 個圓盤的型式。	2、3												
3	寫出第一張、最後一張。 寫出初始卡和最終卡的圓盤代號。說明： 	1												
	寫出對應卡。說明： <table border="1" data-bbox="287 884 478 1064"> <tr> <td></td> <td>→</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>→</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>→</td> <td>4</td> </tr> </table>		→	1	1		2	2	→	3	3	→	4	6、7
	→	1												
1		2												
2	→	3												
3	→	4												
	插入 6 張空白卡。說明： 移動的圓盤數是 3 個時，就要補 6 張空白卡 (亦即要插入「2 的 n 次方 - 2」空白卡。2 的 3 次方 - 2 = 6)	4												
4	寫 6 張空白卡。 對應所選出來的型式，和「對應卡」，將空白卡填滿數字	5、8												
5	全部收起來。 將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9												
6	拿出第 1、2 張。 從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10												
7	看有沒有一個步驟。 檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？(如果不是)	11												
8	如果沒有一個步驟就完成，第 1 張卡就往上移到第四格子，從「等待檢查區」拿出兩張卡。 插入 2 張空白卡。 說明：觀察後知道移動的圓盤數是 2 個時，就要補 2 張空白卡 (亦即要插入「2 的 n 次方 - 2」空白卡。2 的 2 次方 - 2 = 2)	4												
9	寫一寫空白卡。 觀察上下兩張卡中「非固定數字」的位置，將中間的空白卡填好數字	5、8												

10	收進待檢區。 將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9
11	拿出1、2張。 從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10
12	有沒有一個步驟。 檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？（如果是）	11
13	如果可以一個步驟就完成，放入「答案區」，拿出1、2張。 將第一張卡放入答案區中，第二張卡往上移到第一張卡的位置（變成第一張卡），再從「待檢區」中拿出一張卡，當作第二張卡	13
	檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？（如果不是）	11
	插入2張空白卡。說明： 觀察後知道移動的圓盤數是2個時，就要補2張空白卡（亦即要插入「2的n次方-2」空白卡。2的2次方-2=2）	4
	觀察上下兩張卡中「非固定數字」的位置，將中間的空白卡填好數字	5、8
	將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9
	從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10
14	-----（一直重複）省略	
15	到沒了。 一直寫到「待檢區」中的卡片全部都拿光了	12、14

小彥一共說了15個步驟（不計算中間因重複而省略的步驟），對於河內塔遊戲的操作流程圖之14個步驟都有包含在內，可見小彥對解決搬移4個圓盤的解題計畫的擬訂，都有掌握到解題策略的重點，小彥所擬訂的解題計畫堪稱完備。

表 4-3-4 擬訂解決搬移 4 個圓盤的解題計畫--口述紀錄 (受試丙)

*粗體字是小儒說的話

數學學習障礙學童的計畫		檢核編號								
1	找從 A (柱) 到 C (柱)。 說明：在 12 種型式 (pattern) 中，找出由 A 柱搬移到 C 柱的 pattern，待會可以做對應 (複製)。	2、3								
2	先考慮要放在哪裡。 說明：考慮要從哪一根柱子 (起始柱) 搬到哪一根柱子 (終點柱)，通常會決定由 A 柱搬移到 C 柱。	3								
3.	寫對應卡。 說明： <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>→</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>→ 3</td></tr> <tr><td>3</td><td>→ 4</td></tr> </table>	→	1	1	2	2	→ 3	3	→ 4	6、7
→	1									
1	2									
2	→ 3									
3	→ 4									
4	先寫一二。 (寫出第一張、最後一張)。說明：寫出初始卡和最終卡的圓盤代號如下。 <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1 2 3 4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 0 10px;">和</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1 2 3 4</td> </tr> </table>	1 2 3 4				和			1 2 3 4	1
1 2 3 4				和			1 2 3 4			
5	插入空白卡。 (插入 6 張空白卡。)說明： 移動的圓盤數是 3 個時，就要補 6 張空白卡 (亦即要插入「2 的 n 次方 -2」空白卡。2 的 3 次方 -2=6)	4								
6	寫一寫。 (寫 6 張空白卡)。對應所選出來的型式，和「對應卡」，將空白卡填滿數字	5、8								
7	放入等待檢查區。 將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9								
8	拿 1、2 張出來。 從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10								
7	就開始看看，如果有三個步驟就--- (看有沒有一個步驟) 檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？(如果不是)	11								
8	如果沒有 (一個步驟就完成)，就把第 1 張放上面。 第 1 張卡就往上移到第四格子，從「等待檢查區」拿出兩張卡。再插入 2 張空白卡。	4								

	說明：觀察後知道移動的圓盤數是2個時，就要補2張空白卡（亦即要插入「2的n次方-2」空白卡。2的2次方-2=2）	
9	開始寫空白卡。 先將上下兩張卡中「固定不動的數字」填好，再觀察上下兩張卡中「非固定數字」的位置，將中間的空白卡填好數字	5、8
10	依序收起。 將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9
11	拿1、2張。 從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10
	檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？（如果是）	11
12	如果（可以）一個步驟（就完成），上面那張排過去答案區（放入答案區），從等待檢查區拿過來1張。 將第一張卡放入答案區中，第二張卡往上移到第一張卡的位置（變成第一張卡），再從「待檢區」中拿出一張卡，當作第二張卡	13
	檢查兩張卡是否一個步數就可以完成？（如果不是）	11
	插入2張空白卡。說明： 觀察後知道移動的圓盤數是2個時，就要補2張空白卡（亦即要插入「2的n次方-2」空白卡。2的2次方-2=2）	4
	觀察上下兩張卡中「非固定數字」的位置，將中間的空白卡填好數字	5、8
	將所有的卡片，依序收入「等待檢查區-待檢區」。	9
	從「待檢區」拿出前兩張卡，放入「操作工作板」的主要操作區中	10
13	-----（一直重複）省略	
14	到拿光光。 一直寫到「待檢區」中的卡片全部都拿光了	12、14

小儒一共說了14個步驟（不計算中間因重複而省略的步驟），對於河內塔遊戲的操作流程圖之14個步驟都有包含在內，可見小儒對解決搬移4個圓盤的解題計畫的擬訂，都有掌握到解題策略的重點，小儒所擬訂的解題計畫堪稱完備。

三位受試者的解題計畫都有包含流程圖之14個步驟，都有掌握到解題策略的重點，都有具備擬訂解題計畫的能力。

二、以排步驟卡方式擬訂解題計畫（搬移 5 個圓盤）

（一）步驟卡的製作過程：

搬移 5 個圓盤的解題計畫是將 14 個解題步驟貼在名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供數學學習障礙學童取用，數學學習障礙學童去挑選適當的步驟卡排成一串自己的解題過程，亦即將整個解題計畫用步驟卡排列出來，老師將之做成紀錄。讓數學學習障礙學童有擬訂解題計畫的經驗，培養其擬訂解題計畫能力，養成做計畫的習慣（使用策略），可以減少數學學習障礙學童隨機化的行為，以期將來做事更有效率。

由於河內塔遊戲操作流程圖（圖 3-1-2）上 14 個解題步驟的用詞較專業化，所以研究者將 14 個解題步驟的專業化用詞改成口語化用詞，貼在步驟卡上讓數學學習障礙學童挑選，減少數學學習障礙學童在挑選步驟卡時語文理解的負擔，14 個解題步驟的專業化用詞改成口語化用詞的對照請看表 4-3-5

表 4-3-5 專業化用詞改成口語化用詞對照表

共14項	專業化用詞	口語化用詞
步驟1	取出起始卡、取出終點卡	寫出 第一張卡 ，和 最後一張卡
步驟2	選擇2的pattern、或3的pattern當參照	去選： 要比照搬2個，還是搬3個圓盤
步驟3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從6種情形中找出正確的pattern當參照	從6個pattern中，去找到同樣「從 n柱 搬到 n柱 」的那一個拿到桌上來
步驟4	在起始卡和終點卡之間插入「2的n次方-2」空白卡	插入空白卡
步驟5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡	先把「 不動 」的數字，在空白卡上寫一寫
步驟6	是否做有效分組？	是否分成正確的 2堆（3推）
步驟7	是否可以寫出一張對應卡	寫出「 對應卡 」
步驟8	利用型式複製某一pattern至空白卡（完成對應）	看對應卡，複製數字到空白卡上
步驟9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」	依序收起 所有卡片放入「待檢區」

步驟10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡	從「待檢區」中取出 第一張卡、第二張卡
步驟11	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？	所有「等待檢查區」的卡片是否都 檢查光光 ？
步驟13	將第1張卡片放到「答案區」，第2張卡片成為第1張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片	將 第1張 卡片放到「答案區」， 第2張 卡片成為第1張卡片， 再去拿出一張 卡片
步驟14	將此張卡片依序放入「答案區」中	最後一張 卡片，也放入「答案區」中

將口語化用詞貼入名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供數學學習障礙學童取用，14 疊步驟卡如圖 4-3-1

寫出 第一張卡 ，和 最後一張卡	看對應卡，複製數字到空白卡上
去選： 要比照搬2個，還是搬3個圓盤	依序收起 所有卡片放入「待檢區」
從6個pattern中，去找到同樣「從 n柱 搬到 n柱 」的那一個拿到桌上來	從「待檢區」中取出 第一張卡、第二張卡
插入空白卡	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
先把「 不動 」的數字，在空白卡上寫一寫	所有「等待檢查區」的卡片是否都 檢查光光 ？
	將 第1張 卡片放到「答案區」，

是否分成正確的2堆(3推)	第2張卡片成為第1張卡片， 再去拿出一張卡片
寫出「對應卡」	最後一張卡片，也放入「答案區」中

圖 4-3-1 14 疊步驟卡

(二) 三位數學學習障礙學童擬定解題計畫的情形

三位數學學習障礙學童擬定解題計畫的情形如表 4-3-6、表 4-3-6、表 4-3-6 所示

表 4-3-6 擬訂解決搬移 5 個圓盤的解題計畫--排步驟卡 (受試甲)

擬訂解題計畫的內容 (搬移 5 個圓盤) 排步驟卡	
步驟 2	選擇 2 的 pattern、或 3 的 pattern 當參照
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照
步驟 6	是否做有效分組？
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡
步驟 1	取出起始卡、取出終點卡
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡
步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？

步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成為第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡
步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成為第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

• • •	

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡
步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成為第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中

受試甲一開始處在摸索的階段，後來漸漸穩定，從表 4-3-6 中可以明顯看出該數學學習障礙學童有循環的步驟出現，漸漸有一個型的模式產生出來。

表 4-3-7 擬訂解決搬移 5 個圓盤的解題計畫--排步驟卡 (受試乙)

擬訂解題計畫的內容 (搬移 5 個圓盤) 排步驟卡	
步驟 1	取出起始卡、取出終點卡
步驟 6	是否做有效分組?
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡
步驟 2	選擇 2 的 pattern、或 3 的 pattern 當參照
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成?
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字, 就將該數字填入每一張空白卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢?
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成?
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡
步驟 5	若有不動之數字, 就將該數字填入每一張空白卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢?
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成?
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」, 第 2 張卡片成爲第 1 張卡片, 再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成?

步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成爲第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

• • •	
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中

受試乙一開始也處在摸索的階段，後來不久即趨於穩定，從表 4-3-7 中可以明顯看出該數學學習障礙學童有循環的步驟出現，漸漸有一個和受試甲大同小異的型式模式產生出來。

表 4-3-8 擬訂解決搬移 5 個圓盤的解題計畫—排步驟卡 (受試丙)

設計解題計畫的內容 (搬移 5 個圓盤) 排步驟卡	
步驟 1	取出起始卡、取出終點卡
步驟 2	選擇 2 的 pattern、或 3 的 pattern 當參照
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成爲第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成爲第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡

步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成爲第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片
	• • •
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中

受試丙一開始比較順，所排出來的步驟比受試甲和受試乙順利，出現 1、2、3 等穩定的數字，不久就開始循環，從表 4-3-8 中可以明顯看出該數學學習障礙學童有循環的步驟出現，而且該數學學習障礙學童很快就做出一個循環，循環次數很多，明顯有一個和受試甲、受試乙大同小異的型式模式產生出來。

綜合言之，三位受試者，一開始的選排步驟卡時，會處於混亂的階段，漸漸都能抓到解決河內塔問題的一個型式，此型式會呈現循環的現象，不斷的重複，最後整個擬定解題的計畫就全部排列出來，三位受試者的計畫都可以抓到河內塔的型式，最後都可以將五個圓盤以最少的步數從起始柱搬移到目標柱，可見三位受試者所擬定的計畫都成功達成目標。

河內塔遊戲操作的解決問題的解題策略 14 個步驟(流程圖圖 3-1-3)，其中有些操作的步驟是沒有先後相關性順序，例如步驟「2、3」、「6、7」、「1」、「4、5、8、9、10」等是可以並存，任何一組動作先做都可以，而且有的數學學習障礙學童有做出正確的搬移動作，卻未去選取該步驟卡排入解提計劃中，有的數學學習障礙學童比較小心，會一直重複檢查的動作(步驟 12)，所以才會呈現沒有從步驟 1 排到步驟 14 的現象。

第四節 型式教學活動對問題解決類化能力影響之分析

一、實施方法

在追蹤期過後，讓數學學習障礙學童解決搬移五個圓盤這個問題，驗證該受試者在教學之後，是否可以將搬移四個圓盤解題策略應用到搬移五個圓盤、難度更深一層的問題上。此時，研究者使用附錄〈十六〉的十四條項目來檢核該數學學習障礙學童問題解決類化的能力。

如果數學學習障礙學童可以將搬移4個圓盤的解題策略應用到搬移5個圓盤，亦即可以用最少步數搬移5個圓盤、搬移成功的話，表示該數學學習障礙學童具有問題解決類化能力。

二、實施結果

在實驗處理之後，測試數學學習障礙學童是否可以將搬移4個圓盤的解題策略應用到搬移5個圓盤的問題上。換句話說，如果數學學習障礙學童可以用最少步數搬移5個圓盤、搬移成功的話，表示該數學學習障礙學童具有問題解決類化能力，測試三位受試者用最少步數搬移5個圓盤的過程，用河內塔遊戲的14個步驟流程做檢核，檢核結果如下表（表4-4-1）。

表 4-4-1 問題解決類化能力（搬移5個圓盤）--檢核表（甲乙丙）

編號	河內塔遊戲的14個步驟流程 --檢核項目	做到請打勾		
		甲	乙	丙
步驟1	取出起始卡、取出終點卡	✓	✓	✓
步驟2	選擇2的pattern、或3的pattern當參照	✓	✓	✓
步驟3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從6種情形中找出正確的pattern當參照	✓	✓	✓
步驟4	在起始卡和終點卡之間插入「2的n次方-2」空白卡	✓	✓	✓

步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡	√	√	√
步驟 6	是否做有效分組？	√	√	√
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡	√	√	√
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）	√	√	√
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」	√	√	√
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡	√	√	√
步驟 11	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟就可以完成？	√	√	√
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？	√	√	√
步驟 13	將第1張卡片放到「答案區」，第2張卡片成為第1張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片	√	√	√
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中	√	√	√

操作結果分析：

三位數學學習障礙學童在一個月後，用紙卡操作，去解決河內塔遊戲搬移 5 個圓盤的問題，在操作的過程中，每個步驟都有做到，可見經過河內塔遊戲之型式教學的策略學習後，數學學習障礙學童已經可以從解決搬移 4 個圓盤的問題類化到更難一層、解決搬移 5 個圓盤的問題上。

第五節 理解型式概念，增強型式的認知：訪談記錄之分析

一、訪談的用意：

為探討以河內塔為內涵的型式教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中的型式、對應中的規則是什麼？如果他可以全部操作完畢，是否代表理解型式概念，而增強型式的認知？研究者依自編的訪談紀錄單，予以受試者訪談並加以分析（附錄〈十七〉）。

二、訪談的目的：

探討以河內塔為內涵的型式教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中包含有關「型式、對應、類化」的內涵是什麼？理解型式概念，而增強型式的認知。

三、訪談的題目：一共有四大題，十五個小題，題目如下

訪談紀錄單—探討是否理解型式概念，而增強型式的認知

一、小朋友，你覺得搬移 2 個圓盤【型式】

- (一) 有哪 6 種搬移的型式？
- (二) 這 6 種搬移的型式，你覺得哪些地方「一樣」？

二、小朋友，你覺得搬移 3 個圓盤【型式】

- (一) 有哪 6 種搬移的型式？
- (二) 這 6 種搬移的型式，你覺得哪些地方「一樣」？

三、搬移 4 個圓盤時，一開始，你無法用最少的 15 個步驟就完成搬移，你只好把 4 個圓盤當作 2 個圓盤或 3 個圓盤來搬？

- (一) 請問「把 4 個圓盤當作 2 個圓盤」，你要如何分堆才有效？【型式】
- (二) 為什麼一定要這樣分才有效（才能成功比照 2 個圓盤的型式來搬移）？【型式】
- (三) 請寫出「把 4 個圓盤當作 2 個圓盤」的對應關係【對應】
- (四) 請問「把 4 個圓盤當作 3 個圓盤」，你要如何分堆才有效？【型式】
- (五) 為什麼一定要這樣分才有效（才能成功比照 3 個圓盤的型式來搬移）？【型式】
- (六) 請寫出「把 4 個圓盤當作 3 個圓盤」的對應關係【對應】

四、搬移 5 個圓盤時【問題解決類化能力】

- (一) 假如第 1 張、第 2 張卡不是只有一個步驟就可以完成，就要做什麼動作？【工作記憶】
- (二) 插入空白卡片後，然後要做什麼動作？【工作記憶】
- (三) 插入 2 張空白卡時，要比照「搬移幾個圓盤的型式」？
【型式、對應】
- (四) 插入 6 張空白卡時，要比照「搬移幾個圓盤的型式」？
【型式、對應】
- (五) 將第 1 張卡片放到「答案區」，請問第 2 張卡片成為什麼？接下來要做什麼動作？【工作記憶】

四、訪談的結果分析：

訪談紀錄單--探討是否理解型式概念，而增強型式的認知

一、小朋友，你覺得搬移 2 個圓盤【型式】

(一) 有哪 6 種搬移的型式？

表 4-5-1 2 個圓盤之 6 種搬移的型式

受試者	回答的答案
小憲	A (柱) 搬到 C (柱)、C (柱) 搬到 A (柱) B (柱) 搬到 C (柱)、C (柱) 搬到 B (柱) A (柱) 搬到 B (柱)、B (柱) 搬到 A (柱)
小彥	由 A (柱) 搬到 B (柱)、由 A (柱) 搬到 C (柱)、 由 B (柱) 搬到 A (柱)、由 B (柱) 搬到 C (柱)、 由 C (柱) 搬到 A (柱)、由 C (柱) 搬到 B (柱)。
小儒	A (柱) 到 C (柱)、C (柱) 到 A (柱)、 B (柱) 到 A (柱)、C (柱) 到 B (柱)、 B (柱) 到 C (柱)、A (柱) 到 B (柱)。

操作結果分析：

這三位數學學習障礙學童在基線期之前，有先養成其搬移 2、3 個圓盤的型式的基本能力，針對這一題，這三位數學學習障礙學童均可正確答出六種搬移的型式，可見其搬移 2、3 個圓盤的型式的基本能力在追蹤期後仍有保留其學習成效。

(二) 這 6 種搬移的型式，你覺得哪些地方「一樣」？

表 4-5-2 2 個圓盤之 6 種搬移的型式一樣的地方

受試者	回答的答案
小憲	<p>第一個（圓盤）都搬到沒有要去（註：不是終點柱。一共三根柱子，扣掉起始柱和終點柱，就只剩一根柱子可以搬過去）的那裡（那根柱子）</p> <p>註： 小憲自己發現「搬移 2 個圓盤時，如何可以搬移出最少步驟」的要訣。</p>
小彥	<p>有一樣。</p> <p>（老師：哪裡一樣？）</p> <p>搬得速度一樣！</p> <p>（老師：你移移看，由 A（柱）搬到 B（柱）、由 A（柱）搬到 C（柱），哪裡一樣？）</p> <p>搬得位置一樣！</p> <p>（該數學學習障礙學童一邊正確的移動 2 個圓盤，一邊想不出用詞）說： 有一樣</p> <p>（老師：搬得方式一樣對不對？）</p> <p>對！搬得方式一樣。</p>
小儒	<p>都會放在 C（柱）。</p> <p>B 和 C 很像（B 柱和 C 柱上都有圓盤）。</p> <p>都會搬回來。</p> <p>都一樣！（一直說都一樣）</p> <p>都會一直 A 搬到 B、B 搬到 C。</p>

操作結果分析：

這三位數學學習障礙學童都有發現這六種搬移，就是這三根柱子做排列組合，輪流當起始柱和終點柱。小憲觀察的比較深入，知道如果要以「最

少步數去完成搬移」，則移動的第一步必須要搬移到「非起始柱，也非終點柱」的那根柱子上。三人均具有型式的基本概念。

二、小朋友，你覺得搬移 3 個圓盤【型式】

(一) 有哪 6 種搬移的型式？

表 4-5-3 3 個圓盤之 6 種搬移的型式

受試者	回答的答案
小憲	A (柱) 搬到 C (柱)、C (柱) 搬到 A (柱) B (柱) 搬到 C (柱)、C (柱) 搬到 B (柱) A (柱) 搬到 B (柱)、B (柱) 搬到 A (柱)
小彥	由 A (柱) 搬到 B (柱)、由 A (柱) 搬到 C (柱)、 由 B (柱) 搬到 A (柱)、由 B (柱) 搬到 C (柱)、 由 C (柱) 搬到 A (柱)、由 C (柱) 搬到 B (柱)。
小儒	A (柱) 到 C (柱)、A (柱) 到 B (柱)、 B (柱) 到 A (柱)、B (柱) 到 C (柱)、 C (柱) 到 A (柱)、C (柱) 到 B (柱)。

操作結果分析：

這三位數學學習障礙學童的回答和第一大題搬移 2 個圓盤的回答差不多，這三位數學學習障礙學童均可正確答出六種搬移的型式，可見其搬移 2、3 個圓盤的型式的基本能力在追蹤期後仍有保留其學習成效。

(二) 這 6 種搬移的型式，你覺得哪些地方「一樣」？

表 4-5-4 4 個圓盤之 6 種搬移的型式一樣的地方

受試者	回答的答案
小憲	第一個（圓盤）都搬到要搬的（註：「要搬的」就是指「終點柱」）那裡 （那根柱子） 註： 小憲自己發現「搬移 3 個圓盤時，如何可以搬移出最少步驟」的要訣
小彥	老師，你剛剛那一題（第一大題的第 2 小題）說那兩個字（該數學學習 障礙學童手指著”方式”）怎麼講？ （老師：方式） 對！方式一樣。
小儒	都有放。 都一樣！ （老師：哪裡一樣？） 都這樣子搬來搬去。

操作結果分析：

這三位數學學習障礙學童都有發現這六種搬移，就是這三根柱子做排列組合，輪流當起始柱和終點柱。小憲觀察的比較深入，知道如果要以「最少步數去完成搬移」，則移動的第一步必須要搬移到「終點柱」的那根柱子上。小彥和小儒的口語表達能力較弱，有感覺出這六種搬移有類似的操作方式，但只能用簡短的話來表達，基本上，三人均具有型式的基本概念。

三、搬移 4 個圓盤時，一開始，你無法用最少的 15 個步驟就完成搬移，你只好把 4 個圓盤當作 2 個圓盤或 3 個圓盤來搬？

(一) 請問「把 4 個圓盤當作 2 個圓盤」，你要如何分堆才有效？【型式】

表 4-5-5 4 個圓盤如何分成正確的 2 堆

受試者	回答的答案
小憲	該數學學習障礙學童用動作把 4 個圓盤擺成「1、2、3」「4」兩堆（會操作表示，不會講） 註：「1」表示最小的圓盤，依數字越大，圓盤的直徑越大。
小彥	該數學學習障礙學童把 4 個圓盤擺成兩堆，一開始有分堆錯誤，分成「1、2」「3、4」兩堆。（老師提示，老師有教過你搬移過 3 號和 4 號的圓盤做搬移嗎？）該數學學習障礙學童想了一下，笑著做出「1、2、3」「4」兩堆。
小儒	該數學學習障礙學童把 4 個圓盤擺成兩堆，分到第八次才分堆正確，分堆的情形如下表。

小儒分到第八次才分堆正確

分堆方式	第一次		第二次		第三次		第四次		第五次	第六次	第七次		第八次	
	1	3	1	2	同	同	1	2			1	3	1	4
4 個圓盤分成 2 組之情形	2	4	4	3	第二次	第二次	3	4	同第一次	同第三次	2	4	2	3
分堆成功與否	不成功		放不進柱子 不成功		放不進柱子 不成功		不成功		不成功	不成功	放不進柱子 不成功		成功	

操作結果分析：

在實驗處理期中，曾讓三位數學學習障礙學童自己去嘗試錯誤，將四個圓盤分成兩堆〈附錄五：分堆紀錄表〉，每一次作好分堆之後，都當場放入柱子中搬移試試看，看看是否可以完成目標、搬移成功，數學學

習障礙學童會從中體會出正確分組的型式。由上述三位數學學習障礙學童的操作作答，可知小憲和小彥在實驗處理期中所做過的分堆試驗，到追蹤期過後，仍具有型式認知概念的保留成效；只有小儒還必須當場實際操作一番才可獲知答案。

(二) 為什麼一定要這樣分才有效 (才能成功比照 2 個圓盤的型式來搬移) ? 【型式】

表 4-5-6 4 個圓盤分成正確的 2 堆之理由

受試者	回答的答案
小憲	因為會疊不上去(放不進去柱子裡)，不能大疊小(若放進同一個柱子時，會產生大的圓盤去壓在小的圓盤上面，違反遊戲規則)
小彥	不然，一個(圓盤)一個(圓盤)搬不進去(柱子裡)。
小儒	不知道。 分堆分錯的話，會放不進去，大的(圓盤)會壓到小的(圓盤)。

操作結果分析：

1. 這三位數學學習障礙學童剛好都只回答「分堆不成功的其中一種原因」。

若將「1、3」號圓盤分為一堆，「2、4」號圓盤分為另一堆，這樣要將這 4 個圓盤放進柱子內，不管是「1、3」號，還是「2、4」號先放，在放入第二堆時，就會發現有「大的圓盤壓到小的圓盤」這樣違反遊戲規則的情形，就「搬不進去了」。

分堆不成功的另一種原因，就是如果分堆分成「1、2」號圓盤分為一堆，「3、4」號圓盤分為另一堆，這樣一開始是可以順利放入起始柱子中，但搬移到中途的時候，數學學習障礙學童會發現無法繼續再做搬移，因為下一步的搬移會發生「大的圓盤壓到小的圓盤」這樣違反遊戲規則的情形，就無法繼續搬移、無法完成目標了。

2. 「1、2、3」分在同一堆，這種堆疊情形，在進入「實驗期」之前，該數學學習障礙學童已先具備移動此「3個圓盤」的能力，已經會了；就是利用已經會的經驗（移動3個圓盤）來解決移動「4個圓盤」這個問題（也屬於類化能力的一種）。
3. 分堆的要訣是：「最大的圓盤」必需自己形成一堆，保證「一個步驟」就可以搬移過去。若有 n 個圓盤（由小到大，從 1、2 到 n 做編號），要分成兩堆的話，就是 n 號原盤自己形成第二堆，其餘 1 到 $n-1$ 號成第一堆；要分成三堆的話，就是 n 號原盤自己形成第三堆， $n-1$ 號原盤自己形成第二堆，其餘 1 到 $n-2$ 號成第一堆。

（三）請寫出「把 4 個圓盤當作 2 個圓盤」的對應關係【對應】

表 4-5-7 4 個圓盤分成正確的 2 堆之對應關係

		1
1	→	2
		3
2	→	4

三位數學學習障礙學童都可以慢慢寫出上面的對應卡，可見三位數學學習障礙學童對應的基本觀念都有建立。

(四) 請問「把 4 個圓盤當作 3 個圓盤」，你要如何分堆才有效？

【型式】

表 4-5-8 4 個圓盤如何分成正確的 3 堆

受試者	回答的答案
小憲	該數學學習障礙學童把 4 個圓盤擺成「1、2」「3」「4」三堆(會操作表示，不太會講) 註：「1」表示最小的圓盤，依數字越大，圓盤的直徑越大。
小彥	該數學學習障礙學童把 4 個圓盤擺成「1、2」「3」「4」三堆(會操作表示，不太會講) 註：「1」表示最小的圓盤，依數字越大，圓盤的直徑越大。
小儒	慢慢也可以把 4 個圓盤擺成「1、2」「3」「4」三堆

操作結果分析：

在實驗處理期中，曾讓三位數學學習障礙學童自己去嘗試錯誤，將四個圓盤分成兩三堆〈附錄五：分堆紀錄表〉，每一次作好分堆之後，都當場放入柱子中搬移試試看，看看是否可以完成目標、搬移成功，數學學習障礙學童會從中體會出正確分組的型式。由上述三位數學學習障礙學童的操作作答，可知三位數學學習障礙學童在實驗處理期中所做過的分堆試驗，到追蹤期過後，仍具有型式認知概念的保留成效。

(五) 為什麼一定要這樣分才有效 (才能成功比照 3 個圓盤的型式來搬移)? 【型式】

表 4-5-9 4 個圓盤如何分成正確的 3 堆

受試者	回答的答案
小憲	一開始說「不知」 想一想之後說「才不會大壓小，才不會「卡住」不能搬了。」
小彥	不然，一個(圓盤)一個(圓盤)搬不進去(柱子裡)。 註：該數學學習障礙學童只想到這個理由。
小儒	分堆分錯的話，沒辦法搬(分堆分錯的話，一開始或搬移到中途的時候會無法繼續做搬移，因為大的圓盤會壓到小的圓盤)。

操作結果分析：

1. 若將「1、3」號圓盤分為第一堆，「2」號圓盤分為第二堆，「4」號圓盤分為第三堆，這樣要將這 4 個圓盤放進柱子內，如果先放入「1、3」號進起始柱中，則「2、4」號在放進起始柱中，就會發現有「大的圓盤壓到小的圓盤」這樣違反遊戲規則的情形，就「搬不進去了」。小憲將這種發現「大的圓盤會壓到小的圓盤」違反遊戲規則的情形就如同小憲所說的，叫做「卡住」。

分堆不成功的另一種原因，就是如果分堆分成「1、2」號圓盤分為第一堆，「3、4」號圓盤分為第二、三堆，這樣一開始是可以順利放入起始柱子中，但搬移到中途的時候，數學學習障礙學童會發現無法繼續再做搬移，因為下一步的搬移會發生「大的圓盤壓到小的圓盤」這樣違反遊戲規則的情形，就無法繼續搬移、無法完成目標了。

2. 「1、2」分在同一堆，這種堆疊情形，在進入「實驗期」之前，該數學學習障礙學童已先具備移動此「2個圓盤」的能力，已經會了；就是利用已經會的經驗（移動2個圓盤）來解決移動「4個圓盤」這個問題（也屬於類化能力的一種）。
3. 分堆的要訣是：「最大的圓盤」必需自己形成一組，保證「一個步驟」就可以搬移過去。若有n個圓盤（由小到大，從1、2到n做編號），要分成兩組的話，就是n號原盤自己形成第三堆，n-1號原盤自己形成第二堆，其餘1到n-2號成第一堆，一共分成三堆。

（六）請寫出「把4個圓盤當作3個圓盤」的對應關係【對應】

表 4-5-10 4個圓盤分成正確的3堆之對應關係

	→	1
1		2
2	→	3
3	→	4

三位數學學習障礙學童都可以慢慢寫出上面的對應卡，可見三位數學學習障礙學童對應的基本觀念都有建立。

四、搬移 5 個圓盤時【問題解決類化能力】

(一) 假如第 1 張、第 2 張卡不是只有一個步驟就可以完成，就要做什麼動作？【工作記憶】

表 4-5-11 兩張卡之間非一個步驟的下一個動作

受試者	回答的答案
小憲	該數學學習障礙學童說「插入空白卡」 老師接著問「那搬移兩個圓盤要插入幾張？」 該數學學習障礙學童想了一下、很肯定地說「兩張」 老師接著問「那搬移三個圓盤要插入幾張？」 該數學學習障礙學童很自信肯定地說「六張」
小彥	還要再補兩張（空白卡）
小儒	要打開（要將這兩張卡上下分開，以便插入空白卡） （打開後，再來做什麼呢？） 插入卡片 開始寫 （插入幾張卡片） 想了有一陣子後說，應該要插入六張卡吧！

操作結果分析：

1. 三位數學學習障礙學童都只想到搬移 2 個圓盤時，要插入兩張空白卡，

比較完整的回答是：

- (1) 移動的圓盤數是 2 個時，就要補 2 張空白卡（亦即要插入「2 的 n 次方-2」空白卡。 2 的 2 次方-2=2）
- (2) 移動的圓盤數是 3 個時，就要補 6 張空白卡（亦即要插入「2 的 n 次方-2」空白卡。 2 的 3 次方-2=6）

2. 三位數學學習障礙學童都知道搬移 2 個圓盤時，最少的搬移步數是 3 步，所以會用眼睛觀察「河內塔遊戲工作板」上，第一張卡跳到空格 1 是第一個步數，空格 1 跳到空格 2 是第二個步數，空格 2 跳到第二張卡是第三個步數，所以要插入兩張空白卡才是正確的答案。三位數學學習障礙學童都有以最少的步數搬移的概念。

第一張卡
空格 1
空格 2
第二張卡

(二) 插入空白卡片後，然後要做什麼動作？【工作記憶】

表 4-5-12 插入空白卡後的下一個動作

受試者	回答的答案
小憲	<p>該數學學習障礙學童很自信肯定地說「填入號碼」</p> <p>註：此生的答案是對的，該數學學習障礙學童操作的流利，很能掌握操作的流程和邏輯。說明如下</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 找出不動之數字，將該數字填入每一張空白卡---就是該數學學習障礙學童所說的「填入號碼」，要在紙卡上寫入 1、2、3、4。 2. 利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）---就是該數學學習障礙學童所說的「填入號碼」，要在紙卡上寫入 1、2、3、4。。
小彥	要寫 1、2、3、4
小儒	<p>就開始寫了</p> <p>（小儒會用河內塔遊戲當場操作看看，忽視固定不動的數字，將會動的數字設法搬移到和第二張卡上的圓盤位置一樣，小儒會邊操作，邊在空白卡上填寫數字）</p>

操作結果分析：

小憲對整個河內塔遊戲操作的流程和型式的邏輯都相當清楚，所以可以很迅速的回答該問題，並迅速的在腦中完成搬移，可以迅速的寫出空白卡上的數字。小彥也是會在腦中完成搬移，直接寫出空白卡上的數字，但是小彥會粗心遺漏一些數字，有時須靠實際的搬移才知道如何填寫空白卡上的數字。而小儒習慣用實際操作河內塔遊戲，當場實驗看看自己的搬移是否正確，正確之後才寫入空白卡之中，小儒很有自尊心，要求完美，要求自己一定要確定答案正確，才肯將數字寫入空白卡之中。

(三) 插入 2 張空白卡時，要比照「搬移幾個圓盤的型式」？【型式、對應】

表 4-5-13 插入兩張卡是比照搬移幾個圓盤的型式

受試者	回答的答案
小憲	2 個 (搬移 2 個圓盤)
小彥	2 個 (搬移 2 個圓盤)
小儒	3 個 (答錯了)

操作結果分析：

1. 小憲的邏輯很清楚，馬上可以很篤定的回答是 2 個圓盤。因為剛剛問過第 (一) 題，所以小彥也可以迅速回答是搬移 2 個圓盤。小儒一時忘記了，回答出 3 個圓盤錯誤的答案(3 個圓盤是插入 6 張空白卡)。
2. 插入 2 張空白卡，依公式來看，2 的 n 次方 $-2=2$ ，所以 $n=2$ ，亦即移動的圓盤數是 2 個。

(四) 插入 6 張空白卡時，要比照「搬移幾個圓盤的型式」？【型式、對應】

表 4-5-14 插入六張卡是比照搬移幾個圓盤的型式

受試者	回答的答案
小憲	3 個。註：1.該數學學習障礙學童的邏輯很清楚，馬上可以很篤定的回答是 3 個圓盤。 2.插入 6 張空白卡，依公式來看，2 的 n 次方-2=6， 所以 n=3，亦即移動的圓盤數是 3 個。
小彥	3 個。
小儒	忘記了！

操作結果分析：

1. 小憲的邏輯很清楚，馬上可以很篤定的回答是 2 個圓盤。小彥需要想一下，才可回答出是搬移 2 個圓盤的正確答案。小儒回答的當時已經開始混淆了，一時答不出來。
2. 插入 6 張空白卡，依公式來看，2 的 n 次方-2=6，所以 n=3，亦即移動的圓盤數是 3 個。
3. 歲數學學習障礙學童對搬移 2、3 個圓盤都具有基本的形式認知的概念。

(五) 將第 1 張卡片放到「答案區」，請問第 2 張卡片成為什麼？

表 4-5-15 第 2 張卡如何處理

受試者	回答的答案
小憲	成為第 1 張卡。
小彥	該數學學習障礙學童只會在「河內塔遊戲工作板」上做出動作，不會說。該數學學習障礙學童在工作板上，將第 2 張卡往上推一格，擺在第 1 張卡的位置。
小儒	放上去（往上搬）。

操作結果分析：三位數學學習障礙學童都很清楚的知道下一個步驟該如何處理，只是口語用詞比較簡單，做簡易的回答，或直接做給老師看。

接下來要做什麼動作？【工作記憶】

表 4-5-16 後續如何處理

受試者	回答的答案
小憲	<p>拿出下一張卡出來比對。</p> <p>老師進一步確認：「從哪裡拿出一張卡出來比對？」</p> <p>該數學學習障礙學童馬上回答「答案檢查區」</p> <p>註：正確說法是「等待檢查區」，可是該數學學習障礙學童回答「答案檢查區」意思也正確。</p>
小彥	<p>該數學學習障礙學童說「就要拿一張」</p> <p>老師進一步確認：「從哪裡拿出一張卡？」</p> <p>該數學學習障礙學童看著工作板上的國字，邊用手指著，邊唸出「等待檢查區」</p>
小儒	再從等待檢查區拿一張（紙卡）放在（工作區）下面。

操作結果分析：三位數學學習障礙學童都很確實且迅速的知道下一個步驟該如何處理，只是口語用詞很簡易，或直接做給老師看，可見三位數學學習障礙學童對解決河內塔遊戲問題、利用紙卡的策略，在經過處理期的學習之後，都已經建立型式的認知概念，有學習的成效。

第六節 理解型式概念，增強型式的認知：

河內塔的型式認知之分析

一、實施方法

為探討以河內塔為內涵的型式教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中的型式關係是什麼？理解型式概念，而增強型式的認知。研究者依自編的型式認知評量單（河內塔），予以受試者評量並加以分析（附錄〈十八〉）

二、實施結果

河內塔的型式認知之分析——探討是否理解型式概念，而增強型式的認知

第一題、忽略不動（固定）的數字：

1. 4. 7. 10. 可以把下列過程看作是「由哪根柱子搬移到哪根柱子」？
2. 5. 8. 11. 可以把下列過程看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」？
3. 6. 9. 12. 請從「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。

表 4-6-1 河內塔型式認知測驗結果-1

數學學習障礙學童寫的答案				數學學習障礙學童選貼的答案 (答錯的答案)																											
1. 由 (A) 柱搬移到 (C) 柱。 2. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)，固定不動的數字是 (3、4)。				三位受試者都寫正確。																											
3.	0	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table>	1			2			3			4				小儒選	0	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table>	1			2			3			4			錯
1																															
2																															
3																															
4																															
1																															
2																															
3																															
4																															
	1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr> </table>	2			3			4	1				1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	3			4	1	2										
2																															
3																															
4	1																														
3																															
4	1	2																													
	2	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	3			4	1	2			2	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr> </table>	2			3			4	1											
3																															
4	1	2																													
2																															
3																															
4	1																														
	3	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>1</td></tr> </table>	3			4		1			3	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>1</td></tr> </table>	3			4		1													
3																															
4		1																													
3																															
4		1																													

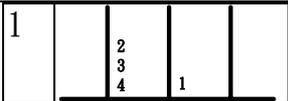
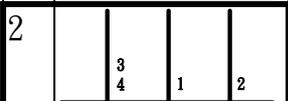
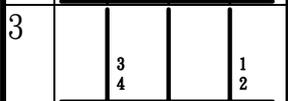
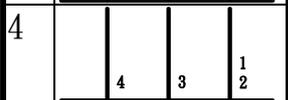
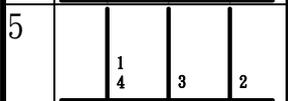
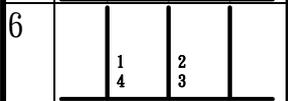
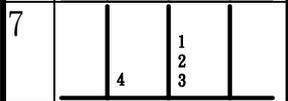
<p>4. 由 (C) 柱搬移到 (B) 柱。 5. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。 固定不動的數字是 (3、4)。</p>	<p>小憲寫：4. 由 (A) 柱搬移到 (B) 柱。 小儒寫：4. 由 (A) 柱搬移到 (B) 柱。</p>																																																		
<p>6.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;">5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;">6</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;">7</td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> </tr> </table>	4						4	3	1	2	5	1	3	2			4	3			6	1	2				4	3			7		1				4	2	3		<p>三位受試者都選貼正確。</p>										
4																																																			
	4	3	1	2																																															
5	1	3	2																																																
	4	3																																																	
6	1	2																																																	
	4	3																																																	
7		1																																																	
	4	2	3																																																
<p>7. 由 (B) 柱搬移到 (A) 柱。 8. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。 固定不動的數字是 (3、4)。</p>	<p>三位受試者都寫正確</p>																																																		
<p>9.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">8</td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;">9</td> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;">10</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">4</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;">11</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td></td> </tr> </table>	8							1		4			2					3			9		2	1				3	4		10	2	3	1					4		11	1	3				2	3	4		<p>三位受試者都選貼正確。</p>
8																																																			
		1		4																																															
		2																																																	
		3																																																	
9		2	1																																																
		3	4																																																
10	2	3	1																																																
			4																																																
11	1	3																																																	
	2	3	4																																																
<p>10. 由 (A) 柱搬移到 (C) 柱。 11. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。 固定不動的數字是 (3、4)。</p>	<p>三位受試者都寫正確。</p>																																																		

12.	<table border="1"> <tr> <td>12</td> <td></td> <td>1 2</td> <td></td> <td>3 4</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td></td> <td>2</td> <td>1</td> <td>3 4</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td>2 3 4</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1 2 3 4</td> </tr> </table>	12		1 2		3 4	13		2	1	3 4	14			1	2 3 4	15				1 2 3 4	小彥選	<table border="1"> <tr> <td>12</td> <td></td> <td>1 2</td> <td></td> <td>3 4</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td></td> <td>2</td> <td></td> <td>1 3 4</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td>2</td> <td>1 3 4</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1 2 3 4</td> </tr> </table>	12		1 2		3 4	13		2		1 3 4	14			2	1 3 4	15				1 2 3 4	錯
12		1 2		3 4																																								
13		2	1	3 4																																								
14			1	2 3 4																																								
15				1 2 3 4																																								
12		1 2		3 4																																								
13		2		1 3 4																																								
14			2	1 3 4																																								
15				1 2 3 4																																								

第二題、以下是搬移 4 個圓盤的問題，由「A 柱子搬移到 C 柱子」：

- 1-1. 1-2. 可以把下列過程看作是「由哪根柱子搬移到哪根柱子」？
- 2-1. 2-2. 可以把下列過程看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」？
3. 5. 請從「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。
4. 請畫出「步驟 8」的圖。

表 4-6-2 河內塔型式認知測驗結果-2

數學學習障礙學童寫的答案		數學學習障礙學童選貼的答案 (答錯的答案)	
1-1. 由 A 柱搬移到 (B) 柱。 2-1. 搬移 (3) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2、3)。固定不動的數字是 (4)。 3. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。		小憲寫：搬移 (4) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。固定不動的數字是 (3、4)。 小儒：忘記會搬移七個步驟的是搬移幾個圓盤	
1 	2 	三位受試者都選貼正確。	
3 	4 		
5 	6 		
7 			
1-2. 由 (B) 柱搬移到 C 柱。 2-2. 搬移 (3) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2、3)。固定不動的數字是 (4)。 4. 請畫出「步驟 8」的圖。 5. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。			三位受試者對「步驟 8」的圖，第一次都寫錯。

8			1 2 3	4
9			2 3	1 4
10		2	3	1 4
11		1 2	3	4
12		1 2		3 4
13		2	1	3 4
14			1	2 3 4
15				1 2 3 4

三位受試者都選貼正確。

第三題、以下是搬移 4 個圓盤的問題，由第（二）題得知步驟 0 到步驟 7 是由「A 柱子搬移到 B 柱子」，請回答下列的問題：

- 1-1. 1-2. 可以把下列過程看作是「由哪根柱子搬移到哪根柱子」？
- 2-1. 2-2. 可以把下列過程看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」？
3. 5. 請從「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。
4. 請畫出「步驟 4」的圖。

表 4-6-3 河內塔型式認知測驗結果-3

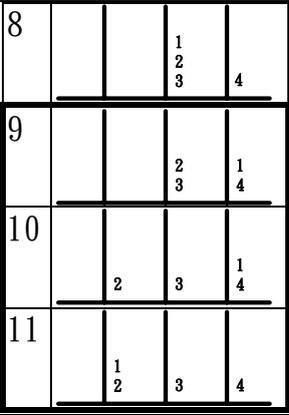
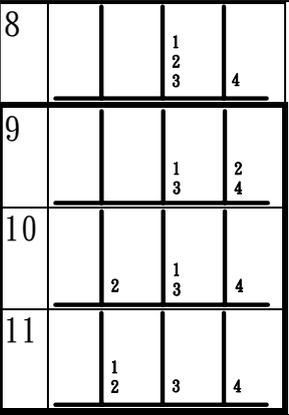
數學學習障礙學童寫的答案		數學學習障礙學童選貼的答案 (答錯的答案)															
1-1. 由 A 柱搬移到 (C) 柱。 2-1. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。固定不動的數字是 (3、4)。 3. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。		小儒：忘記會搬移三個步驟的是搬移幾個圓盤															
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px; height: 100px;"> <tr> <td style="width: 20px;">0</td> <td style="width: 20px;">1 2 3 4</td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;"></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2 3 4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3 4</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>3 4</td> <td></td> <td>1 2</td> </tr> </table>	0	1 2 3 4			1	2 3 4	1		2	3 4	1	2	3	3 4		1 2	三位受試者都選貼正確。 小儒一開始對起始柱和終點柱是哪一根，有點混淆，亦即對「非固定的數字」在哪兩根移動會看走眼。
0	1 2 3 4																
1	2 3 4	1															
2	3 4	1	2														
3	3 4		1 2														
1-2. 由 (C) 柱搬移到 B 柱。 2-2. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。固定不動的數字是 (3、4)。 4. 請畫出「步驟 4」的圖。 5. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。		三位受試者對「步驟 4」的圖，第一次都寫錯。															

4		4	3	1 2	三位受試者都選貼正確。
5		1 4	3	2	
6		1 4	2 3		
7		4	1 2 3		

第四題、以下是搬移 4 個圓盤的問題，由第（二）題得知步驟 7 到步驟 15 是由「B 柱子搬移到 C 柱子」，請回答下列的問題：

- 1-1. 1-2. 可以把下列過程看作是「由哪根柱子搬移到哪根柱子」？
- 2-1. 2-2. 可以把下列過程看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」？
3. 5. 請從「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。
4. 請畫出「步驟 12」的圖。

表 4-6-4 河內塔型式認知測驗結果-4

數學學習障礙學童寫的答案	數學學習障礙學童選貼的答案 (答錯的答案)
<p>1-1. 由 B 柱搬移到 (A) 柱。 2-1. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。固定不動的數字是 (3、4)。 3. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。</p>	<p>小彥寫：由 B 柱搬移到 (C) 柱。</p>
	<p>小彥選</p>  <p>錯</p>
<p>1-2. 由 (A) 柱搬移到 C 柱。 2-2. 搬移 (2) 個圓盤，非固定的數字是 (1、2)。固定不動的數字是 (3、4)。 4. 請畫出「步驟 12」的圖。 5. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。</p>	<p>三位受試者對「步驟 12」的圖，第一次都寫錯。</p>

12		1 2		3 4
13		2	1	3 4
14			1	2 3 4
15				1 2 3 4

三位受試者都選貼正確。

要數學學習障礙學童去觀察紙卡上圓盤的位置，是由「由哪根柱子搬移到哪根柱子」：受試甲答錯兩題，受試乙答錯一題，受試丙答錯四題。要數學學習障礙學童去思考可將此問題看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」：受試甲、受試丙各有一題答不出來。從「問題解決之內容參照」之6種pattern去挑選一個最適當的pattern來貼入空白卡中：受試乙答錯兩題，受試丙答錯一題。

整體而言，三位受試者經過不同的角度去思考河內塔遊戲中的型式認知，錯誤的情形很少，大致都可以理解出河內塔中型式的概念，寫出或選出正確的答案。

第七節 理解型式概念，增強型式的認知：

星形的型式認知之分析

(星形的型式認知之分析—探討是否理解型式概念，而增強型式的認知)

一、實施方法

為探討以河內塔為內涵的型式教學後，數學學習障礙學童可否發現兩題星形的圖型中的型式關係是什麼？理解型式概念，而增強型式的認知。研究者依自編的型式認知評量單（星形），予以受試者評量並加以分析（附錄〈十九〉）

註：星形圖型中的型式關係：是指第一個圖形演變成第二個圖形其中的邏輯規則，並依此邏輯規則去推論出第三個或第四個圖形，如果數學學習障礙學童可以觀察前兩個或三個圖形，體會出其中的邏輯規則，而在五個 pattern 中選出正確的圖形，去拼貼出第三個或第四個圖形，就代表該數學學習障礙學童有型式的概念，可以理解型式概念，並增強型式的認知。

二、實施內容

關於星形的型式認知，一共有兩題，第一題是星形一，第二題是星形二。第一題的星形一中，提供第 1 個圖形、第 2 個圖形，請數學學習障礙學童貼出第 3 個圖形來。而第二題的星形二中，提供第 1 個圖形、第 2 個圖形、第 3 個圖形，請數學學習障礙學童貼出第 4 個圖形來。從下面大小不同的 pattern（圖 4-7-1）中，挑選正確大小的 pattern 數個去貼入框框中，完成第 3 或 4 個圖形，詳細的題目內容請看附錄十九。

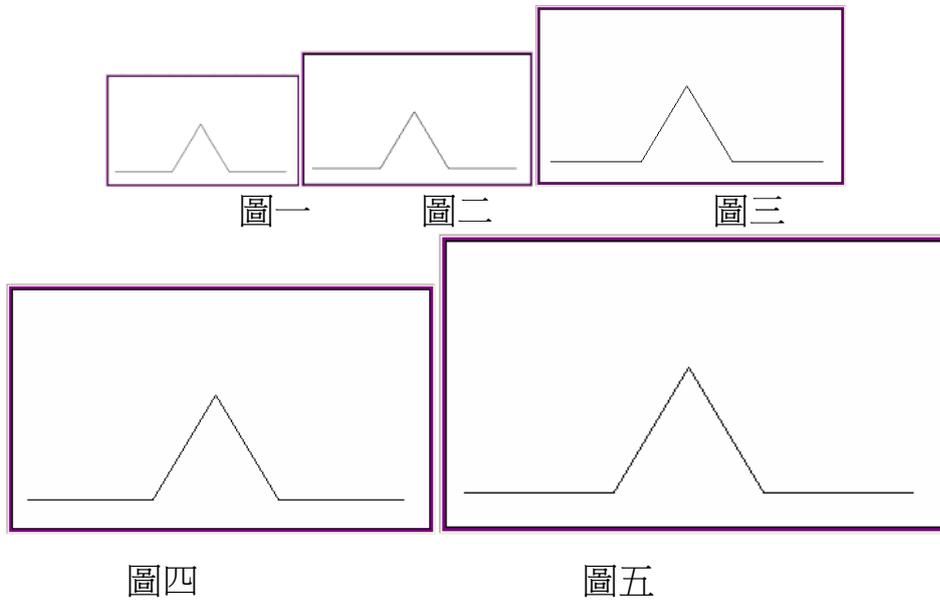


圖 4-7-1 大小不同的待選的 pattern

三、研究者的口語提示

數學學習障礙學童們乍看到型式認知的評量單都說好難，不知道怎麼做，數學學習障礙學童看到紙面上的提示字眼，仍然遲疑不決，若研究者加上口語重複提示，數學學習障礙學童就比較理解題目的意思，且有信心回答，研究者的口語提示如下：

第一題：

1. 看到一條線 ，就變成一座山 ，而且這座山的長度，和原來的這條直線一樣長。

2.  第 1 個圖形  第 2 個圖形  請貼出第 3 個圖形

第二題：

1. 如果一條線代表一隻手，此圖 () 就有四隻手，四隻手組成一座山，看到一條線 () (星形二：第 1 個圖形)，

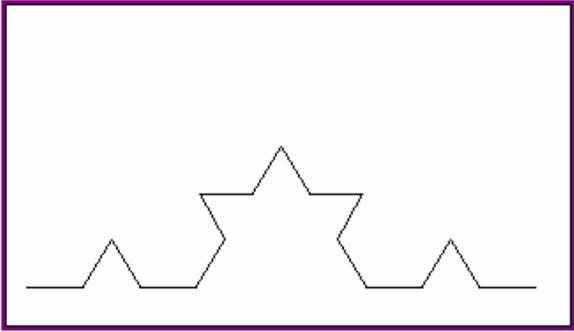
就變成一座山 () (星形二：第 2 個圖形)

而且這座山的第一隻手的長度，和原來的這條線一樣長。

2. 第 1 個圖形 () 中只有一條線，所以衍伸出的第 2 個圖形

() 中只有一座山，因為第 2 個圖形 ()

中有四條線，所以衍伸出的第 3 個圖形應該有幾座山呢 (有四座山)。

3.   
- 第 1 個圖形 第 2 個圖形 第 3 個圖形



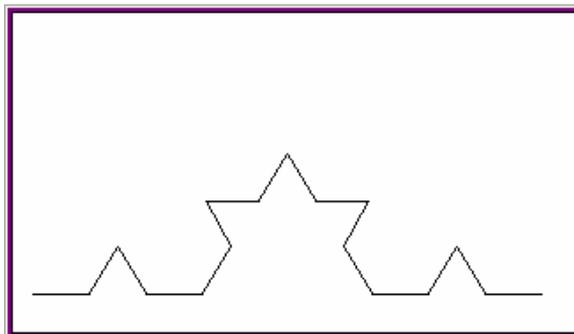
請貼出第 4 個圖形 (註：本圖形很大，超過 A4，只有上、下、左三面框，在觀察第 1 個圖形、第 2 個圖形、第 3 個圖形之後，對於第 4 個圖形，只要貼滿以上的範圍即可)。

四、實施結果

(一) 小憲：

1. 第一題：在研究者的口語提示完之後，該數學學習障礙學童前第一次所選擇的圖形，比正確的圖形大很多（圖五），直呼「好難」，研究者告知他「所選的圖形，沒有符合研究者所說的--這座山的長度，和原來的這條線一樣長--這個條件」，該生想了一下，第二次選了一個比第一次的圖形小一點，但仍然大於正確圖形的圖形（圖四），研究者再度告知他「所選的圖形，沒有符合研究者所說的--這座山的長度，和原來的這條線一樣長--這個條件」，該生經過思考之後，摺疊「候選的五個圖形」去和「星形一：第 2 個圖形」做長度的比對之後，第三次才選對正確圖形（圖三）。由於只有四條線，黏貼的角度都正確。

2. 第二題：在研究者的口語提示完之後，該數學學習障礙學童第一次就選對正確的圖形（圖一）。在黏貼第六條線時，黏貼的角度不正確，應該是 130 度，該生黏貼成 45 度，經過研究者口語提示說「你仔細看！第六條線的角度是幾度」



，該生說：「喔！我知道

了！」，馬上自己更正成正確的角度做黏貼，之後除了第九條線太垂直、第十條線不夠水平之外，其餘的角度都正確（圖 4-7-2）。

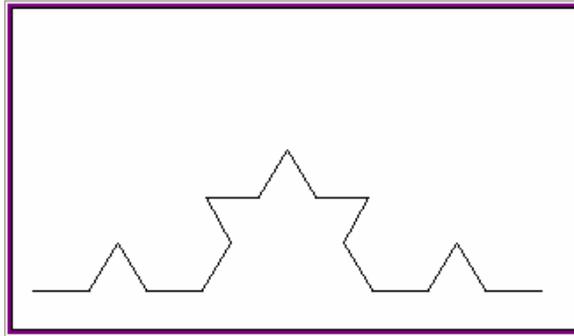


圖 4-7-2 星形二的第 4 個完成圖（受試甲）

（二）小彥：

1. 第一題：在研究者的口語提示完之後，該數學學習障礙學童前第一次所選擇的圖形，比正確的圖形大一點點（圖四），研究者告知他「所選的圖形，沒有符合研究者所說的——這座山的長度，和原來的這條線一樣長——這個條件」，該生想了一下，仍是選擇同樣的那個圖形（圖四）說「研究者，就是這個，對啊！」，一直堅稱兩個圖形的長度真的一樣長，研究者提示他可以摺疊「候選的五個圖形」去和「星形一：第 2 個圖形」做長度的比對，該生比了很久，比不出來，最後在每個候選的圖形上之「長度的始末」畫一條短短的垂直線再做比對，終於選中正確的圖形（圖三）。由於只有四條線，黏貼的角度都正確。

2. 第二題：在研究者的口語提示完之後，該數學學習障礙學童第一次就選對正確的圖形。在黏貼第六條線時，黏貼的角度不正確，應該是 130 度，該生黏貼成 97 度，經過研究者口語提示說「你仔細看！第六條線的角度是幾度」



，該生說：「喔！對喔！」，馬上自己更正成正確的角度做黏貼，第七到第十一條線都黏貼正確，第十二條線應該是 130 度，該生黏貼成 60 度，嚴重錯誤，經過研究者口語提示說「你仔細看！第 3 個圖形的第六條線的角度是幾度」，小彥就可以自己發現正確的角度了，接下來的角度都正確（圖 4-7-3）。

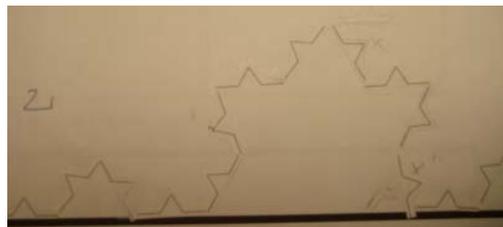


圖 4-7-3 星形二的第 4 個完成圖（受試乙）

(三) 小儒：

1. 第一題：在研究者的口語提示完之後，該數學學習障礙學童前第一次所選擇的圖形，比正確的圖形大很多（圖五），研究者告知他「所選的圖形，沒有符合研究者所說的——這座山的長度，和原來的這條線一樣長——這個條件」，該生想了一下，仍不理解，研究者就提示小儒：可以將第 2 個圖形的第一隻手（四條線中的第一條線）的長度拿來比對，找和這一隻手一樣長的圖形來，亦即可以摺疊「候選的五個圖形」去和「星形一：第 2 個圖形」做長度的比對，該生比了很久，終於自己選中正確的圖形（圖三）。一共只需黏貼四條線，小儒黏貼的角度大都正確，但第一條線和第二條線的接合處接得不夠好、第三條線和第四條線的接合處接得不夠好，但整體觀之，仍不失為一個正確的圖形。
2. 第二題：在研究者的口語提示完之後，該數學學習障礙學童第一次選到最大的圖形（圖五）。研究者再提示「第 3 個圖形的第一條線要變成一座山，而且這座山的第一隻手的長度，和原來的這條線一樣長」，小儒第二次選圖四，第三次選圖三，第四次才選到正確的圖一，雖然小儒在挑選正確的 pattern 圖形時錯了很多次，但在黏貼複雜的條線時，黏貼的角度很正確，整個完成圖（圖 4-7-4）又正確又好看，已經有型式的認知了。



圖 4-7-4 星形二的第 4 個完成圖（受試乙）

第八節 討論

就學習效率而言，本研究以受試甲小憲的學習效率最好，其次是受試乙小彥，受試丙小儒的學習效率更次之，分析其原因，主要的原因可能是年級的差異所造成，第二個原因是本身專注力和挫折忍受度的不同造成表現上有差異。

年級的差異造成河內塔測驗上表現的差異：河內塔遊戲本身蘊涵型式的這種概念是屬於比較抽象的、高層次的認知，雖然研究者已盡量將此抽象的型式概念用半具體或具體的情境來學習，但如果數學學習障礙學童本身智能的成熟度好一點，則在教學時的理解會比較快，回答河內塔的問題或在操作河內塔的搬移問題都會順利很多，幾乎每個學習的活動，受試丙都要花比受試甲多很多的時間才能完成。

本身專注力和挫折忍受度的高低造成河內塔測驗表現上有差異：受試甲本身雖然單親，但在學習河內塔遊戲的型式概念時，表現出成熟穩重、遇到挫折努力不懈的態度；受試乙也是單親，偶爾會逃學，但是孺子可教也，本性善良，很聽老師的話；受試丙的專心度較不足，尤其是其挫折忍受度很低，在學習河內塔策略時如果遇到挫折，馬上難過、別過頭去，沒有辦法再往下做，需要老師不斷的鼓勵、費很多言詞才能恢復其信心，繼續往下做，過度要求自己完美，常主動問研究者什麼時候要再做河內塔，學習態度還算認真、很可愛會撒嬌，但個性上常想不開，所以表現上略遜於其他數學學習障礙學童。

依據林穎義（2001）的研究中數學學習障礙學童的特徵，檢核三位受試者的狀況如表 4-8-1 所述。

表 4-8-1 利用表 3-3-13（三位受試者的學習困難項目）檢核表的再評估

編號	數學學習障礙學童的特徵	受試甲	受試乙	受試丙
1	缺乏理解問題的能力	有改善	有改善	有改善
2	數學語言理解有困難			
3	計算方面有困難			
4	注意力不足		有改善	有改善
5	對數學基本概念理解有困難	有改善	有改善	有改善
6	策略應用的能力不足	有改善	有改善	有改善
7	視覺辨識有困難			
8	記憶能力有缺陷		有改善	有改善
9	知覺缺陷			
10	學習態度因素			有改善
11	動作不靈活			有改善

受試甲的學習特徵有缺乏理解問題的能力、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足等。在河內塔的型式教學之後，受試甲在面對要解決搬移 5 個圓盤的問題時，可以運用搬移 4 個圓盤的解題策略去理解搬移 5 個圓盤的問題，達成搬移 5 個圓盤的目標。受試甲將四個圓盤分成二堆，四個圓盤中的 1 號、2 號、3 號圓盤對應二個圓盤中的 1 號圓盤，四個圓盤中的 4 號圓盤對應二個圓盤中的 2 號圓盤；受試甲將四個圓盤分成三堆，四個圓盤中的 1 號、2 號圓盤對應三個圓盤中的 1 號圓盤，四個圓盤中的 3 號圓盤對應三個圓盤中的 2 號圓盤，四個圓盤中的 4 號圓盤對應三個圓盤中的 3 號圓盤，漸漸有對應的數學概念。在填寫空白卡中的圓盤號碼時，數學學習障

礙學童必須挑選搬移二個圓盤或搬移三個圓盤的型式來做參照，然後依照對應卡，將空白卡填滿數字，無形中也是增加型式方面的數學概念。研究者教導數學學習障礙學童解決搬移四個圓盤的解題策略，讓數學學習障礙學童學習之後，類化應用到解決四個圓盤以上的搬移問題，讓數學學習障礙學童有策略應用的機會，無形中也增加策略應用的能力。

而受試乙的學習特徵有缺乏理解問題的能力、注意力不足、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足、記憶能力有缺陷等。受試乙在增進理解問題的能力、增進對數學基本概念的理解、以及增進策略的應用方面，和上述受試甲的情形雷同。此外，由於河內塔的工作板上有區分為主要操作區、放空白卡區、答案區、等待檢查區，有條有理，在操作時注意力容易集中在工作區，經過一段時間的學習後，注意力有改善的現象。在訪談紀錄中，受試乙對於搬移 2、3 個圓盤共 12 種搬移的型式，大都很清楚，也可以將四個圓盤有效的分成 2 或 3 堆，並寫出對應卡。在思考「插入 2、6 張空白卡時，是比照搬移幾個圓盤的型式」也是答對，在操作河內塔的遊戲中，對其記憶能力有增進的助力。

受試丙的學習特徵則是缺乏理解問題的能力、注意力不足、對數學基本概念理解有困難、策略應用的能力不足、記憶能力有缺陷、學習態度因素、動作不靈活等。受試丙在增進理解問題的能力及注意力、增進對數學基本概念的理解、以及增進策略的應用、增進其記憶能力等方面，和上述受試乙的情形雷同。在學習態度方面，由於受試丙的挫折忍受度很低，在學習學科時如果遇到挫折，會馬上難過放爛，在河內塔的型式教學之後，該學童由於對河內塔充滿興趣，雖然遇到挫折也是會表現出過度傷心，但最後已經可以將

傷心的時間所短，自己整理情緒，繼續完成河內塔的目標，所以在學習態度方面有進步。在動作的靈活度方面，由於河內塔的遊戲是要一個一個的從柱子中搬移圓盤，搬出柱子又搬入另一根柱子中，圓盤中央的圓洞不大，所以也藉此遊戲可以訓練學童手的精細動作，由於受試丙操作河內塔遊戲已經一年多，從笨拙的搬移動作到熟練快速的做搬移動作，動作的靈活度明顯的改進了。

此外，林穎義（2001）發現數學學習障礙學童所常出現的解題錯誤類型和「易受情緒影響解題、解題態度不佳、沒信心」之間有顯著相關；研究者也發現經由河內塔遊戲教學之後，數學學習障礙學童的解題態度變得積極，明顯可以提升數學學習障礙學童的信心。

第五章 結論與建議

本研究本著「從遊戲中學習，從操作中認知」的理念，冀望藉由河內塔遊戲的解題過程中學習解決問題，提升數學學習障礙學童問題解決類化的能力。

河內塔型式的學習本著從遊戲中學習的理念：河內塔的形式教學採用紙卡去紀錄搬移河內塔的步驟，使數學學習障礙學童可以在半具體的情境中學習，並將解決問題的作業細步化可以讓數學學習障礙學童免於迷失在龐雜、混亂的資料中，讓數學學習障礙學童在輔導式教學中有所發現。河內塔的形式教學讓數學學習障礙學童有分的學習時間，一直要達到精熟的技巧才進入下一個學習目標。在形式的教學之後，數學學習障礙學童將河內塔遊戲操作流程圖記入腦子中，進行自我對話和自我詢問，監控自己解題的步驟，達到認知的學習。最後，用訪談記錄、剪貼有關河內塔和星形的學習單，以問題引導兒童思考，使數學學習障礙學童從中發現並建立形式的概念。

河內塔型式的學習本著從操作中認知的理念：河內塔的形式教學將複雜的工作化成簡單的工作，用操作制約的原理教導數學學習障礙學童，讓數學學習障礙學童從操作中發現河內塔問題的形式，使數學學習障礙學童跨越「不會搬移四個圓盤」困難的步驟，自己來解決更深一層、搬移更多個圓盤問題。

此外，河內塔的形式教學讓數學學習障礙學童使用真實的材料，實際操作河內塔教具，藉由肢體的碰觸、移動操作，在具體的情境中來解決數學問題，抽象的認知能力是根源於具體的肌肉動作，實際的操作動作有助於數學學習障礙學童即時去驗證自己的想法，提升自己的認知。

本研究的目的是，在探討河內塔遊戲的形式教學對國小數學學習障礙學童在形式認知之學習成效。研究者採取採單一受試研究法中的跨受試多基線擬定，以河內塔遊戲的形式教學為自變項，依變項包括形式教學後之學習成效、保留成效，以及探討數學學習障礙學童之擬定解題計畫能力、問題解決類化能力，及探討是否理解形式概念，而增強形式的認知；以台中市文山國小三位資源班之數學學習障礙學童作為本研究之受試對象，經過為期一年的實驗教學研究後，綜合本研究之研究結果與討論，提出結論與建議。

第一節 結論

本研究實驗結果發現三位受試者的立即學習效果及學習保留效果均能達到預定的準標。在探討數學學習障礙學童之擬定解題計畫能力方面，三位受試者所擬定的解題計畫都有將14個步驟包含在內，都有掌握到解題策略的重點。在問題解決類化能力方面，三位受試者都可以將搬移四個圓盤的解題策略類化到解決搬移五個圓盤的問題上。

在探討數學學習障礙學童經過河內塔遊戲的型式教學後，是否理解型式概念，而增強型式的認知，這個部份分為訪談記錄、測試河內塔的型式認知，以及測試星形的型式認知三方面來分析。在訪談方面，三位受試者對於問題，大都可以用簡單的話回答出來：在河內塔的型式認知方面，三位數學學習障礙學童都可以慢慢思考、大都能挑選出正確的pattern來貼；在河內塔的型式認知方面，三位數學學習障礙學童在受試者的口語提示之後，都能漸漸領會出其中的型式模式，而選貼出正確又漂亮的圖。

以下針對河內塔的型式教學結果提出以下結論：

(一) 就河內塔的型式教學對提升數學學習障礙學童之型式認知的立即學習成效而言，在教學後，三位受試者在「以最少步數完成目標的次數」的表現水準各為5.4、4.4、4.85明顯高於基線期0.33、0、0的水準，而且顯示出進步的趨向，表示教學處理具有成效。

(二) 就河內塔的型式教學對數學學習障礙學童之型式認知概念的建立而言：

三位受試者在寫出搬移2、3個圓盤的12種型式時，得分都在80%以上。在搬移2、3個圓盤時，以最少步數完成目標的得分，最後都可以連續三次獲得滿分，表示基本能力已具備了。

在形成性成效評量(一)中，必須找起始柱與終點柱，以及參照pattern填寫入空白卡中，三位受試者最後都可以連續三次得分在在80%以上，有資格

進入處理期的第二個階段。

在形成性成效評量（二）中，三位數學學習障礙學童嘗試不斷的將四個圓盤分成2或3堆，其中，受試甲均在第五次分堆成功，受試乙在第十一次和第四次分堆成功，受試丙在第八次和第四次分堆成功，三位受試者都是測試到分堆成功才停止，可見河內塔遊戲是一個有趣的學習型式的媒材。

另外一個也是形成性成效評量（二），要數學學習障礙學童根據分堆多次的心得寫出有效的分組模式，並寫出對應卡，以及做出複製至空白卡的動作，三位受試者最後都可以連續三次得分在在80% 以上，有資格進入處理期的第三個階段。

在形成性成效評量（三）中，要檢核三位受試者在搬移河內塔四個圓盤時，主要的幾個操作動作是否有做出來，這個評量是包含所有在處理期所學習到的型式認知，三位受試者最後都可以連續三次得分在在80% 以上，可見三位受試者對於三個階段的型式教學都具有穩定的學習成效。

三位受試者在處理期結束後一個星期、二個星期的短期保留成效評量，以及在處理期結束後一個月的長期保留成效評量，全部都得到滿分，可見三位受試者的學習保留效果佳。

（三）就河內塔の型式教學對提升數學學習障礙學童之擬定解題計畫能力而言，

在以口述紀錄方式擬訂解題計畫方面：三位受試者口述所擬定の解題計畫都有包含河內塔遊戲的操作流程圖之14個步驟，都有掌握到解題策略的重點，可見三位受試者所擬訂的解題計畫堪稱完備。

在以排步驟卡方式擬訂解題計畫方面：三位受試者，一開始的選排步驟卡時，會處於混亂的階段，漸漸都能抓到解決河內塔問題的一個型式，此型式會

呈現循環的現象，不斷的重複，最後整個擬定解題的計畫就全部排列出來，三位受試者的計畫都可以抓到河內塔的形式，最後都可以將五個圓盤以最少的步數從起始柱搬移到目標柱，可見三位受試者所擬定的計畫都成功達成目標

(四) 就河內塔的形式教學對提升數學學習障礙學童之問題解決類化能力而言，

三位數學學習障礙學童在處理期結束後一個月，用紙卡操作，去解決河內塔遊戲搬移 5 個圓盤的問題，在操作的過程中，每個步驟都有做到，而且最後都可以依最少步數搬移成功，可見經過河內塔遊戲之形式教學的策略學習後，數學學習障礙學童已經可以從解決搬移 4 個圓盤的問題類化到更難一層、解決搬移 5 個圓盤的問題上。

(五) 就河內塔的形式教學後，對數學學習障礙學童是否理解形式概念，進而增強形式的認知而言，從訪談紀錄來看，三位數學學習障礙學童對於搬移 2、3 個圓盤

共 12 種搬移的形式都很清楚，也可以將四個圓盤有效的分成 2 或 3 堆，並寫出對應卡。在思考「插入 2、6 張空白卡時，是比照搬移幾個圓盤的形式」只有受試丙答錯，其餘的答題上，雖然三位受試者所回答的用詞都很簡略，但可以明白他們的意思，訪談結果可以知道三位受試者對形式的認知已具概念。

從河內塔的形式認知之測試來看，要數學學習障礙學童去觀察紙卡上圓盤的位置，是「由哪根柱子搬移到哪根柱子」：受試甲答錯兩題，受試乙答錯一題，受試丙答錯四題。要數學學習障礙學童去思考可將此問題看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」：受試甲、受試丙各有一題答不出來。從「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中：受試乙答錯兩題，受試丙答錯一題。綜合言之，大多數的選貼 pattern 都正確。

從星形的形式認知之測試來看，三位受試者在挑選正確的 pattern 圖形時錯了很多次，在研究者的口語提示完之後，三位數學學習障礙學童最後都有選

到正確的圖形，將所選的圖形，依照型式邏輯貼出第三個或第四個圖形，但在黏貼複雜的條線時，黏貼的角度大都正確，有基本的型式認知。

綜合上述分析，本研究發現河內塔遊戲的型式教學的確可以讓國小資源班數學學習障礙學童在型式的認知上具有良好的立即學習效果及學習保留效果。在擬定解題計畫、問題解決類化兩方面都有達到目標。在測試數學學習障礙學童在學習河內塔遊戲的型式之後，是否理解型式概念，並增強型式的認知，從三個測驗來看，在訪談、河內塔型式認知測驗、星形型式認知測驗中，三位受試者的表現都達到水準。

第二節 建議

本研究發現資源班數學學習障礙學童在河內塔遊戲的型式教學後，確實對型式認知的有所提升，河內塔遊戲的型式教學除了可提升數學學習障礙學童的型式認知，對於其他障礙類別的數學學習障礙學童能否達成建立型式認知，尚有待研究。因此對未來教學及研究方面提出以下建議，作為往後從事相關教學及研究者之參考：

一、教學上的建議

- (一) 生活中充滿各種型式的圖形、事件，例如：雨傘的邊緣有重覆不斷的圖形，黃燈、紅燈、綠燈之間的切換，太陽、月亮週而復始等等都是一種型式，建議可以從日常生活中去引導數學學習障礙學童注意到型式的邏輯，享受探索型式的樂趣。
- (二) 本研究是由研究者主導一個可以解決河內塔問題的策略，提供一個策略讓數學學習障礙學童從中體會型式的奧妙，進而解決更深一層難度的河內塔搬移的問題，如果可以讓數學學習障礙學童主動探索型式的奧妙，以建構自己的知識，相信數學學習障礙學童的獲得會更多。

二、未來研究之建議

- (一) 本研究採取單一受試研究法中的跨受試多基線設計，僅能得知受試者在接受型式的教學後的確能提升學習效果，在未來研究中可以採取跨行為之研究擬定，以瞭解受試者在不同於河內塔教具的情況下，探討其他教具對數學學習障礙學童之學習型式認知效果為何。此外，亦可擴大研究對象至其他障礙類別的學童，以比較其成效。

(二) 本研究是使用紙卡的策略，以減少數學學習障礙學童記憶的負擔，未來的研究可以思考採用其他的方式和策略，來教導數學學習障礙學童使其領略河內塔遊戲所蘊含的型式認知概念。

參考文獻

一、中文書目

- 王瑋樺（民90）。國小三年級數學學習障礙學生加法文字題解題歷程與補救教學之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 王寵惠、彭素真（民88）。促進身心障礙兒童發展的遊戲方法。國小特殊教育，27，25-30。
- 江美娟（民90）。後設認知策略教學對國小數學學習障礙學生解題成效之研究。國立彰化師範大學特殊教育研究所碩士論文。
- 朱經明、蔡玉瑟（民89）。動態評量在診斷國小五年級數學障礙學生錯誤類型之應用成效。特殊教育研究學刊，18，173-189。
- 池韻聲（民91）。如何突破學習障礙。台北市：台視文化事業股份有限公司。
- 杜正治（民83）。單一受試法。台北市：心理，220
- 李佳蓉（民85）。電腦益智遊戲對國小高年級學童的推理能力、問題解決能力及電腦態度之影響。國立台南師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 何華國（民79）。特殊兒童心理與教育。台北市：五南。
- 吳佳玲（民90）。影響高一學生地球科學問題解決能力之相關變項探討。國立台灣師範大學地球科學研究所碩士論文。
- 吳坤銓（民86）。國小學生認知能力、問題解決能力與創造向之相關研究。國立高雄師範大學教育研究所碩士論文。
- 林廷華（民83）。創造性問題解決教學方案對幼兒創造力、問題解決能力之影響。文化大學兒童福利學系研究所碩士論文。
- 林淑玲（民88）。國小數學學習障礙學生對比較類加減應用題解題表徵之研究。國立台灣師範大學特殊教育研究所碩士論文。
- 林壽福（民95）。數學樂園。台北市：如何。

- 林穎義（民90）。從資源班老師觀點進行數學學障生教育診斷之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 林寶貴、吳純純、林美秀（民84）。台灣區兒童普通推理能力及其相關因素之研究。特殊教育研究學刊，11，1-18。
- 林寶貴、張昇鵬（民83）。智能障礙兒童普通推理能力結構及其相關因素之研究。特殊教育研究學刊，10，頁143-169。
- 邱佳寧（民90）。國小數學學習障礙學生解題策略之研究。彰化師範大學特殊教育學系碩士論文。
- 周台傑、蔡宗政（民86）。國小數學學習障礙學生應用問題解題之研究。特殊教育學報，12，233-292。
- 周淑惠（民88）。幼兒數學新論-教材教法。台北市：心理出版社。
- 呂素雯（民91）。自然科創造性問題解決教學對國小六年級學童問題解決能力、態度及學習成就之影響。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 孟瑛如（民93）。學習障礙與補救教學—教師及家長實用手冊。台北市：五南。
- 柳秀蘭（民83）。資優學生、普通學生、山地學生創造力與問題解決能力之比較研究。國立彰化師範大學特殊教育研究所碩士論文。
- 侯禎塘、李香慧、張乃悅（民95）。透過數學遊戲教學提升國小一年級數學學習困難兒童的學習興趣與學習成效。特殊教育文集（六），133-164。
- 侯禎塘（民93）。特殊教育需求兒童數學學習困難之特質、教學策略與創意遊戲教學數學之應用。特殊教育叢書，9302，47-66。
- 洪麗晴（民85）。原住民與非原住民國小學童推理表現與其策略使用之差異研究。國立新竹師範學院初等教育學系碩士論文。
- 許天威（民91）。學習障礙者之教育（288-291頁）。台北市：五南圖書出版公司。

- 唐慧娟(民92)。國小高年級學童解題與推理思考能力相關因素之個案研究。屏東師範學院數理教育學系碩士論文。
- 秦麗花(民84)。國小數學學習障礙兒童數學解題補救教學實施成效之比較研究。國民教育研究集刊，1，225-265。
- 郭生玉(民90)。心理與教育測驗。台北市：精華書局。
- 郭邦彥(民91)。電腦化高識字自閉兒 評量與語言學習系統建置。中原大學醫學工程學系碩士學位論文
- 陳家弘(民87)。建構教學對國小數學學習障礙學生解四則運算問題之研究。花蓮師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 陳滿(民92)。國小五年級學童數學推理能力之研究~以BBS 為工具。台中師範學院數學教育學系在職進修教學碩士學位班論文。
- 郭靜芳(民86)。國小資優生後設認知與推理思考能力相關之研究。嘉義師院國教所碩士論文。
- 郭靜晃等著(民94)。兒童課後照顧服務訓練教材(下)。台北市：揚智文化事業股份有限公司。
- 張振松(民90)。自然科創造性問題解決教學對國小學童創造力及問題解決能力之研究。台北市立師範學院科學教育研究所碩士論文。
- 張筱珊(民93)。國小學童演繹邏輯推理能力之研究。屏東師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 張麗芬(民79)。工作分析及其在教導上的應用。教育心理與研究，13，231-264。
- 陳麗玲(民82)。國小數學學習障礙學生計算錯誤類型分析之研究。彰化師範大學特殊教育學系碩士論文。
- 黃世毅譯(民91)。從遊戲中學習解決問題。信誼基金出版社。
- 黃幸美(民83)。兒童的類比推理思考與發展。國立政治大學教育與心理研究，17，477-506。
- 黃幸美、林美珍、鄭晉昌(民86)。國小學童好與差解題者的類比推理解

- 題表現之探討。教育與心理研究，20(上)，111-139。
- 黃美瑜(民91)。生活數學教學對國民中學輕度智能障礙學生學習統計與圖表概念成效之研究。國立高雄師範大學特殊教育學系所碩士論文。
- 傅秀媚(民93)。特殊幼兒教材教法。台北市：五南。
- 曾望超(民92)。國小教師創意教學與學生後設認知能力、創造力及問題解決能力之相關研究。國立高雄師範大學教育系課程與教學碩士班碩士論文。
- 曾繁鈞(民90)。社會科創造性問題解決教學對國小學童創造性、問題解決能力及社會科學業成就之影響。國立屏東師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 葉安琦(民89)。促進國小學童創造性問題解決能力的個案研究——發展問題表徵。國立高雄師範大學科學教育研究所碩士論文。
- 楊宗仁(民90)。自閉症青少年之「執行功能」系列研究 認知計劃。國立台北師範學院特殊教育學系特教中心。145-183。
- 詹秀美(民78)。國小學生創造力與問題解決能力的相關變項研究。國立臺灣師範大學特殊教育研究所碩士論文。
- 楊坤堂(民92)。數學學習障礙學生的課程與教學。特殊教育叢書(91)，15-18。
- 廖信達(民93)。幼兒遊戲。臺北縣：群英出版社。
- 趙梅華(民90)。電腦冒險遊戲對國小高年級學童的創造力、問題解決力與成就動機之影響。國立台南師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 潘怡吟(民90)。遊戲型態教學對國小學生「自然與生活科技」學習之研究。台北市立師範學院科學教育研究所碩士論文。
- 蔡盈修(民82)。報紙的遊戲。台南市：光田出版社。
- 蔡翠華(民85)。國小數學學習障礙學生的學習型態與學習策略之相關研究。特殊教育研究學刊，14，157-177。

- 鄭佳昇（民92）。國小六年級學生樣式推理之研究-以網際網路為媒介。
台中師範學院數學教育學系在職進修教學碩士學位班論文。
- 劉光漢。電腦輔助教學在國小輕度智能障礙學童時間概念學習之研究。台
中師範學院特殊教育與輔助科技研究所碩士論文。
- 劉春纓（民92）。國小高年級學童類比推理能力及其影響因素之研究。屏
東師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 劉淑雲（民91）。臺灣中部地區國小學童問題解決能力及其相關因素之研
究。國立台中師範學院諮商與教育心理研究所碩士論文。
- 饒見維（民85）。國小數學遊戲教學法。台北市：五南。

二、英文書目

- Cawley, J. F., & Miller, J. H. (1989). *Cross-sectional comparisons of the mathematical performance of children with learning disabilities: Are we on the right track toward comprehensive programming*. *Journal of Learning Disabilities*, 22, 250-259.
- Markovits, H. & Dumas, C. & Malfait, N. (1995). *Understanding transitivity of a spatial relationship: A developmental analysis*. *Journal of experimental child psychology*. 59. p. 125-141.
- Nancy, C. J., & Theresa, O. M. (1997). *Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with special and general mathematics difficulties*. *Journal of Learning Disabilities*, 30(6), 624-634, 684.
- Overton, W. F. (1987). *Form and content in the development of deductive reasoning*. *Developmental psychology*. 23. p. 22-30.
- Ward, S. L. & Overton, W. F. (1990). *Semantic familiarity, relevance, and the development of deductive reasoning*. *Development psychology*. 26. p. 488-493.

附錄<一>型式的基本能力評量(一):

寫出 12 種的型式 (pattern) -pl

()年()班、姓名() 年 月 日【得分: 】

編號	2 個圓盤						
起迄	由 A 搬到 B	起迄	由 A 搬到 C	起迄	由 B 搬到 A	起迄	由 B 搬到 C
0		0		0		0	
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	
4		4		4		4	
5		5		5		5	
6		6		6		6	
7		7		7		7	
8		8		8		8	
9		9		9		9	
10		10		10		10	
11		11		11		11	
12		12		12		12	
13		13		13		13	
14		14		14		14	
15		15		15		15	

附錄<一>型式的基本能力評量(一):

寫出 12 種的型式 (pattern) -p2

()年()班、姓名() 年 月 日【得分: 】

編號	2 個圓盤	編號	2 個圓盤	編號	3 個圓盤	編號	3 個圓盤
起迄	由 C 搬到 A	起迄	由 C 搬到 B	起迄	由 A 搬到 B	起迄	由 A 搬到 C
0		0		0		0	
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	
4		4		4		4	
5		5		5		5	
6		6		6		6	
7		7		7		7	
8		8		8		8	
9		9		9		9	
10		10		10		10	
11		11		11		11	
12		12		12		12	
13		13		13		13	
14		14		14		14	
15		15		15		15	

附錄<一>型式的基本能力評量(一):

寫出 12 種的型式 (pattern) -p3

()年()班、姓名() 年 月 日【得分: 】

編號	3 個圓盤						
起迄	由 B 搬到 A	起迄	由 B 搬到 C	起迄	由 C 搬到 A	起迄	由 C 搬到 B
0		0		0		0	
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	
4		4		4		4	
5		5		5		5	
6		6		6		6	
7		7		7		7	
8		8		8		8	
9		9		9		9	
10		10		10		10	
11		11		11		11	
12		12		12		12	
13		13		13		13	
14		14		14		14	
15		15		15		15	

【搬移 3 個圓盤】

○：依「最少步數」完成-----成功
 △：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗
 ×：未完成-----失敗
 () 內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第 1 次						
搬移第 2 次						
搬移第 3 次						
搬移第 4 次						
搬移第 5 次						
搬移第 6 次						
計分						
出現○的個數						

附錄〈三〉型式認知學習成效（基線期末期評量）：

以最少步數完成目標的次數評量表

()年()班、姓名() 年 月 日

1. 「最少步驟次數」之計算： $2^n - 1$ (n =搬移圓盤的個數)
2. 操作之結果評量：依「最少步驟次數」完成，就打○（成功）。有完成目標，但不是用最少次數完成，就打△（失敗）。「未完成」就打×（失敗）
3. 計分方式：分數範圍為 0-10 分【最多玩六次】
 - 10 分：連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成。
 - 9 分：連續第一次、第二次均以最少步數完成。
 - 8 分：第一次失敗；第二次、第三次均以最少步數完成。
 - 7 分：在第三次、第四次連續以最少步數完成。
 - 6 分：在第四次、第五次連續以最少步數完成。
 - 5 分：在第五次、第六次連續以最少步數完成。
 - 4 分：以最少步數通過兩次以上，但並未連續通過。
 - 3 分：以最少步數通過一次。
 - 2 分：有完成目標二次以上，但不是用最少步數完成。
 - 1 分：有完成目標一次，但不是用最少步數完成。
 - 0 分：六次完全沒有完成目標。

○：依「最少步數」完成-----成功
 △：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗
 ×：未完成-----失敗
 ()內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第 1 次						
搬移第 2 次						
搬移第 3 次						
搬移第 4 次						
搬移第 5 次						
搬移第 6 次						
計分						
出現○的個數						

形成性成效評量（一）：找起始柱與終點柱、參照寫入

（ ）年（ ）班、姓名（ ） 年 月 日【得分： 】

目標：1. 找出非固定數字的起始柱和終點柱 2. 從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照					
	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題
	寫出非固定的數字：	寫出非固定的數字：	寫出非固定的數字：	寫出非固定的數字：	寫出非固定的數字：
目標 1	由 搬到				
目標 2	找對 找錯				
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
目標 3：找出固定不動之數字					
目標 4：將固定不動之數字填入每一張空白卡					
目標 3	寫出固定不動的數字：	寫出固定不動的數字：	寫出固定不動的數字：	寫出固定不動的數字：	寫出固定不動的數字：
目標 4	將固定不動之數字填入每一張空白卡(寫對 寫錯)				

附錄〈五〉實驗處理期

形成性成效評量（二）：分堆紀錄表

姓名（ ） 年 月 日

4 個圓盤分成 2 組（4 個圓盤視作 2 個圓盤，來做搬移的動作）

分組方式	第一次		第二次		第三次		第四次		第五次	
4 個圓盤 分成 2 組 之情形										
分組 成功與否										

4 個圓盤分成 3 組（4 個圓盤視作 3 個圓盤，來做搬移的動作）

分組方式	第一次			第二次			第三次			第四次			第五次		
4 個圓盤 分成 3 組 之情形															
分組 成功與否															

形成性成效評量（二）：有效分組、寫出對應卡、複製至空白卡

（ ）年（ ）班、姓名（ ） 年 月 日【得分： 】

目標 1：是否做有效分組？					
題數	第 1 題		題數	第 2 題	
決定要分幾組	將 4 個圓盤 分成（ ）組		決定要分幾組	將 4 個圓盤 分成（ ）組	
挑其中一種	1	1	挑其中一種	1	1
	2	2		2	2
	3			3	
圈出分組情形	1		圈出分組情形	1	
	2			2	
	3			3	
	4			4	

是否做有效（成功）分組？ 是 否

是否做有效（成功）分組？ 是 否

目標 2：是否可以寫出一張對應卡？

寫出對應卡（第 3 題）			寫出對應卡（第 4 題）		
4 個圓盤		（ ）個圓盤	4 個圓盤		（ ）個圓盤
	→			→	
	→			→	
	→			→	

目標 3：是否會利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）？ 有 6 題

0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

形成性成效評量（三）：操作動作之檢核表

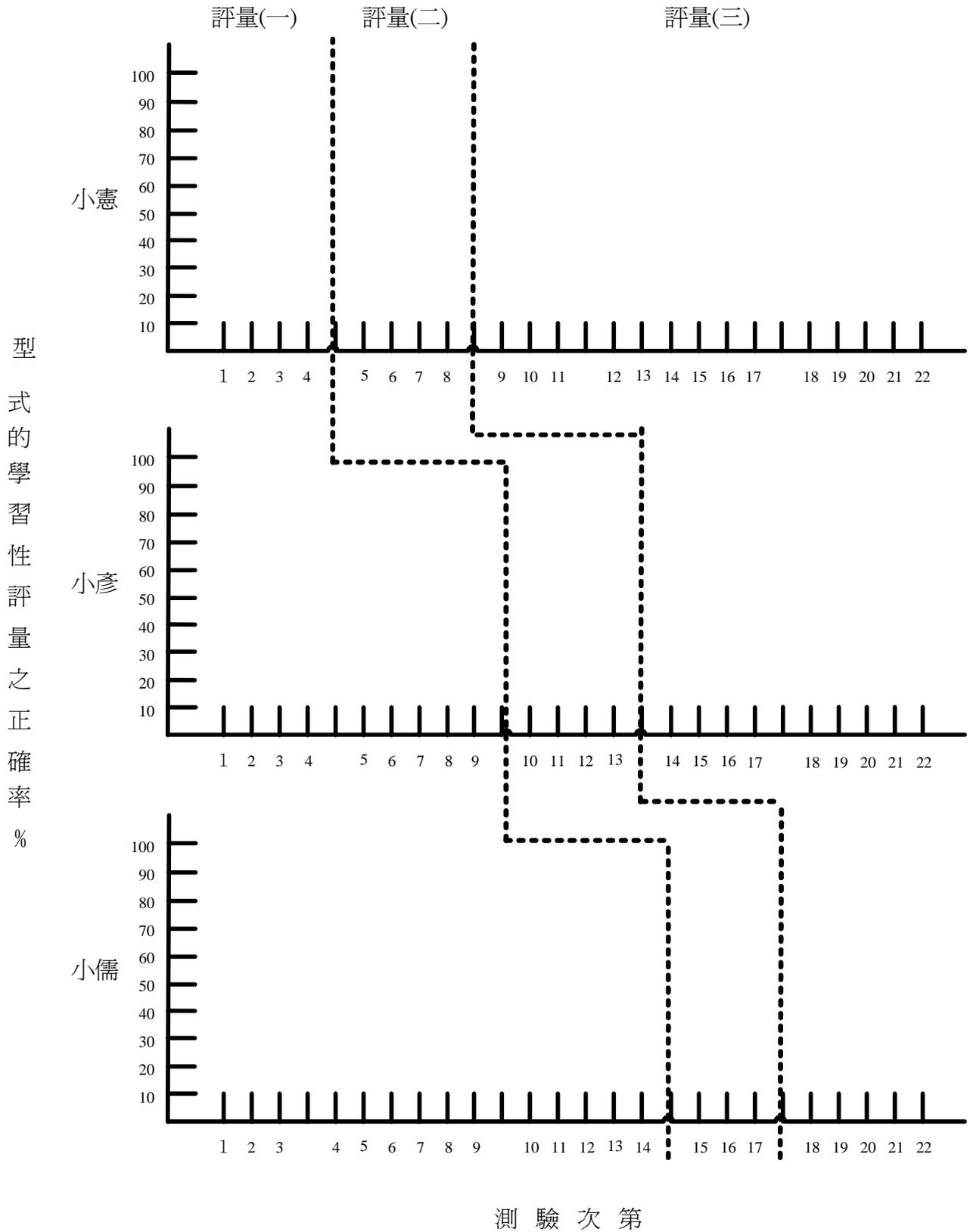
（ ）年（ ）班、姓名（ ） 年 月 日 【得分： 】

目標四之檢核表（做對一題，可得1分，滿分10分）

	檢核項目	可否完成此動作，有完成就打○，否則打×	完成日期
1	從起始卡依序收起所有卡片 放入「待檢區」		
2	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡		
3	第1張、第2張卡是不是只有一個步驟 就可以完成？（可否回答正確）		
4	第1張、第2張卡不是只有一個步驟： 可以找出非固定的數字的起始柱和終點 柱		
5	第1張、第2張卡不是只有一個步驟： 能夠做有效的分組		
6	第1張、第2張卡不是只有一個步驟： 可以依照分組，寫出一張對應卡		
7	第1張、第2張卡不是只有一個步驟： 會利用型式複製某一pattern至空白卡 （完成對應）		
8	所有「等待檢查區」的卡片 是否都檢查完畢？		
9	將第1張卡片放到「答案區」、 第2張卡片成為第1張卡片、 從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片		
10	將此張卡片依序放入「答案區」中		

附錄<八>學習成效：

三個形成性成效評量的正確率



附錄〈九〉型式認知學習成效（實驗處理期末評量）：

以最少步數完成目標的次數評量表

() 年 () 班、姓名 () 年 月 日

1. 「最少步驟次數」之計算：2 的 n 次方-1 (n=搬移圓盤的個數)
2. 操作之結果評量：依「最少步驟次數」完成，就打○（成功）。有完成目標，但不是用最少次數完成，就打△（失敗）。「未完成」就打×（失敗）
3. 計分方式：分數範圍為 0-10 分【最多玩六次】
 - 10 分：連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成。
 - 9 分：連續第一次、第二次均以最少步數完成。
 - 8 分：第一次失敗；第二次、第三次均以最少步數完成。
 - 7 分：在第三次、第四次連續以最少步數完成。
 - 6 分：在第四次、第五次連續以最少步數完成。
 - 5 分：在第五次、第六次連續以最少步數完成。
 - 4 分：以最少步數通過兩次以上，但並未連續通過。
 - 3 分：以最少步數通過一次。
 - 2 分：有完成目標二次以上，但不是用最少步數完成。
 - 1 分：有完成目標一次，但不是用最少步數完成。
 - 0 分：六次完全沒有完成目標。

○：依「最少步數」完成-----成功
 △：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗
 ×：未完成-----失敗
 () 內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」

測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第 1 次						
搬移第 2 次						
搬移第 3 次						
搬移第 4 次						
搬移第 5 次						
搬移第 6 次						
計分						
出現○的個數						

附錄〈十〉追蹤期：

短期保留成效評量

——以河內塔為內涵的型式、分類、對應之教學推理活動

() 年 () 班、姓名 () 年 月 日 【得分： 】

編號	檢核項目	通過打○、 不通過打×
1	能正確說出非固定數字的起始柱和終點柱。	
2	能從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照。	
3	能插入正確的空白卡張數 (2 的 n 次方-2 張空白卡)。	
4	能找出固定不動之數字，將該數字填入每一張空白卡。	
5	依自己的意願做分組後，能夠操作看看 (在研究者的協助之下邊記錄過程) 是否可以成功。	
6	能夠寫出「4 個圓盤分成 3 組、和分成 2 組」的對應卡。	
7	能夠利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)。	
8	能夠從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」。	
9	能夠從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡。	
10	能夠正確回答第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成。	
11	能夠正確判斷所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢。	
12	如果第 1 張、第 2 張卡只有一個步驟就可以完成：受試者能夠將第 1 張卡片放到「答案區」、第 2 張卡片成為第 1 張卡片、從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片。	
13	能夠將最後一張卡片依序放入「答案區」中。	

計分方式：

答對的題數 × 10/13 = 得分 (四捨五入，取到整數)

附錄〈十一〉追蹤期：

長期保留成效評量

—以河內塔為內涵的型式、分類、對應之教學推理活動

() 年 () 班、姓名 () 年 月 日 【得分： 】

編號	檢核項目	通過打○、 不通過打×
1	能正確說出非固定數字的起始柱和終點柱。	
2	能從 12 種情形中找出正確的 pattern 當參照。	
3	能插入正確的空白卡張數 (2 的 n 次方-2 張空白卡)。	
4	能找出固定不動之數字，將該數字填入每一張空白卡。	
5	依自己的意願做分組後，能夠操作看看 (在研究者的協助之下邊記錄過程) 是否可以成功。	
6	能夠寫出「4 個圓盤分成 3 組、和分成 2 組」的對應卡。	
7	能夠利用型式複製某一 pattern 至空白卡 (完成對應)。	
8	能夠從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」。	
9	能夠從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡。	
10	能夠正確回答第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成。	
11	能夠正確判斷所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢。	
12	如果第 1 張、第 2 張卡只有一個步驟就可以完成：受試者能夠將第 1 張卡片放到「答案區」、第 2 張卡片成為第 1 張卡片、從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片。	
13	能夠將最後一張卡片依序放入「答案區」中。	

計分方式：

答對的題數 × 10/13 = 得分 (四捨五入，取到整數)

附錄<十二>型式認知學習成效 (追蹤期末評量):

以最少步數完成目標的次數評量表

() 年 () 班、姓名 () 年 月 日

1. 「最少步驟次數」之計算：2 的 n 次方-1 (n=搬移圓盤的個數)
2. 操作之結果評量：依「最少步驟次數」完成，就打○(成功)。有完成目標，但不是用最少次數完成，就打△(失敗)。「未完成」就打×(失敗)
3. 計分方式：分數範圍為 0-10 分【最多玩六次】
 - 10 分：連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成。
 - 9 分：連續第一次、第二次均以最少步數完成。
 - 8 分：第一次失敗；第二次、第三次均以最少步數完成。
 - 7 分：在第三次、第四次連續以最少步數完成。
 - 6 分：在第四次、第五次連續以最少步數完成。
 - 5 分：在第五次、第六次連續以最少步數完成。
 - 4 分：以最少步數通過兩次以上，但並未連續通過。
 - 3 分：以最少步數通過一次。
 - 2 分：有完成目標二次以上，但不是用最少步數完成。
 - 1 分：有完成目標一次，但不是用最少步數完成。
 - 0 分：六次完全沒有完成目標。

○：依「最少步數」完成-----成功 △：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗 ×：未完成-----失敗 () 內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」						
測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第 1 次						
搬移第 2 次						
搬移第 3 次						
搬移第 4 次						
搬移第 5 次						
搬移第 6 次						
計分						
出現○的個數						

基線期、處理期、追蹤期之以最少步數完成目標的次數評量統計表

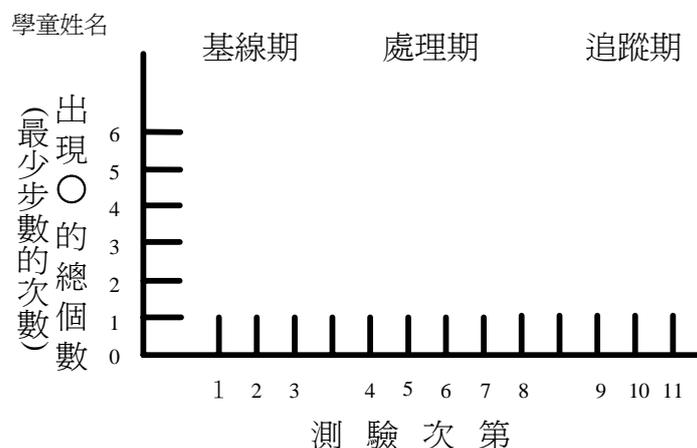
「出現○的總個數」的意義如下：

在搬移圓盤時，如果可以用「最少步數」完成搬移，則該次的搬移屬於「成功」，可以得到一個○。

如下表，每一個「測驗次第」均有六次搬移的機會，對每一個測驗次第所包含的六次搬移做統計，就可以計算出該測驗次第「出現○的總個數」。

配合計分方式來看，如果連續第一次、第二次、第三次均以最少步數完成，就可以得到10分，換句話說，在某個測驗次第的搬移中，如果連續得到三個○，就可以得到10分。如果該測驗次第所包含的六次搬移都沒有得到○，則該測驗次第得分為零分，表示該測驗次第所包含的六次搬移都沒有用「最少步數」完成搬移，則停止搬移動作，一個測驗次第最多只有六次的搬移機會。

○：依「最少步數」完成-----成功 △：有完成目標，但不是用最少步數完成--失敗 ×：未完成-----失敗 ()內數字：從「起始柱」開始搬移的「搬移總步數」						
測驗次第 搬移次第	測驗 第一次	測驗 第二次	測驗 第三次	測驗 第四次	測驗 第五次	測驗 第六次
搬移第1次						
搬移第2次						
搬移第3次						
搬移第4次						
搬移第5次						
搬移第6次						
計分						
出現○的總個數						



附錄<十五>擬訂解題計畫能力：搬移 5 個圓盤（排步驟卡）

搬移 5 個圓盤的解題計畫是將 14 個解題步驟貼在名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供學童取用，學童去挑選適當的步驟卡排成一串自己的解題過程，亦即將整個解題計畫用步驟卡排列出來，老師將之做成紀錄。讓學童有擬訂解題計畫的經驗，培養其擬訂解題計畫能力，養成做計畫的習慣（使用策略），可以減少學童隨機化的行為，以期將來做事更有效率。

編號	河內塔遊戲的 14 個步驟流程 --檢核項目	擬訂解題計畫的內容 （搬移 5 個圓盤） 排步驟卡
步驟 1	取出起始卡、取出終點卡	
步驟 2	選擇 2 的 pattern、或 3 的 pattern 當參照	
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照	
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方-2」空白卡	
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡	
步驟 6	是否做有效分組？	
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡	
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）	
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」	
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡	
步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？	
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？	
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成爲第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片	
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中	

由於河內塔遊戲操作流程圖（圖 3-1-2）上 14 個解題步驟的用詞較專業化，所以研究者將 14 個解題步驟的專業化用詞改成口語化用詞，貼在步驟卡上讓學童挑選，減少學童在挑選步驟卡時語文理解的負擔，14 個解題步驟的專業化用詞改成口語化用詞的對照請看表 4-3-5

將口語化用詞貼入名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供學童取用，14 疊步驟卡如下圖所示。

步驟卡

將 14 個解題步驟貼在名片卡上，每個步驟各做 5 張相同的卡，共有 70 張卡（步驟卡）供學童選取使用，排成一串計畫。

寫出 第一張卡 ，和 最後一張卡	看對應卡，複製數字到空白卡上
去選： 要比照搬2個，還是搬3個圓盤	依序收起所有卡片放入「待檢區」
從6個pattern中，去找到同樣「從n柱搬到n柱」的那一個拿到桌上來	從「待檢區」中取出 第一張卡 、 第二張卡
插入空白卡	第1張、第2張卡 是不是只有一個步驟 就可以完成？
先把「不動」的數字，在空白卡上寫一寫	所有「等待檢查區」的卡片是否都 檢查光光 ？
是否分成正確的 2堆（3推）	將 第1張 卡片放到「答案區」， 第2張 卡片成為第1張卡片，再去拿 出一張 卡片
寫出「對應卡」	最後一張 卡片，也放入「答案區」中

附錄〈十六〉問題解決類化能力：搬移 5 個圓盤

在實驗處理之後，測試學童是否可以將搬移 4 個圓盤的解題策略應用到搬移 5 個圓盤的問題上。換句話說，如果學童可以用最少步數搬移 5 個圓盤、搬移成功的話，表示該學童具有問題解決類化能力。

編號	河內塔遊戲的 14 個步驟流程 --檢核項目	做到請打勾
步驟 1	取出起始卡、取出終點卡	
步驟 2	選擇 2 的 pattern、或 3 的 pattern 當參照	
步驟 3	找出會動數字的起始柱和終點柱，從 6 種情形中找出正確的 pattern 當參照	
步驟 4	在起始卡和終點卡之間插入「2 的 n 次方 -2」空白卡	
步驟 5	若有不動之數字，就將該數字填入每一張空白卡	
步驟 6	是否做有效分組？	
步驟 7	是否可以寫出一張對應卡	
步驟 8	利用型式複製某一 pattern 至空白卡（完成對應）	
步驟 9	從起始卡依序收起所有卡片放入「待檢區」	
步驟 10	從「待檢區」中取出第一張卡、第二張卡	
步驟 11	第 1 張、第 2 張卡是不是只有一個步驟就可以完成？	
步驟 12	所有「等待檢查區」的卡片是否都檢查完畢？	
步驟 13	將第 1 張卡片放到「答案區」，第 2 張卡片成爲第 1 張卡片，再從「待檢區」的卡片中再取出第一張卡片	
步驟 14	將此張卡片依序放入「答案區」中	

附錄<十七> 探討是否理解型式概念，增強型式的認知：訪談紀錄單

訪談目的：探討以河內塔之型式的教學後，數學學習障礙學童可否發現河內塔遊戲中
型式的內涵是什麼？理解型式概念，而增強型式的認知。

【師生對談】

() 年 () 班、姓名 () 年 月 日

一、小朋友，你覺得搬移 2 個圓盤【型式】

(一) 有哪 6 種搬移的型式？

(二) 這 6 種搬移的型式，你覺得哪些地方「一樣」？

二、小朋友，你覺得搬移 3 個圓盤【型式】

(一) 有哪 6 種搬移的型式？

(二) 這 6 種搬移的型式，你覺得哪些地方「一樣」？

三、搬移 4 個圓盤時，一開始，你無法用最少的 15 個步驟就完成搬移，你只好把 4

個圓盤當作 2 個圓盤或 3 個圓盤來搬？

(一) 請問「把 4 個圓盤當作 2 個圓盤」，你要如何分堆才有效？【型式】

(二) 為什麼一定要這樣分才有效（才能成功比照 2 個圓盤的型式來搬移）？
【型式】

(三) 請寫出「把 4 個圓盤當作 2 個圓盤」的對應關係【對應】

(四) 請問「把 4 個圓盤當作 3 個圓盤」，你要如何分堆才有效？【型式】

(五) 為什麼一定要這樣分才有效（才能成功比照 3 個圓盤的型式來搬移）？
【型式】

(六) 請寫出「把 4 個圓盤當作 3 個圓盤」的對應關係【對應】

四、搬移 5 個圓盤時【問題解決類化能力】

(一) 假如第 1 張、第 2 張卡不是只有一個步驟就可以完成，就要做什麼動作？
【工作記憶】

(二) 插入空白卡片後，然後要做什麼動作？【工作記憶】

(三) 插入 2 張空白卡時，要比照「搬移幾個圓盤的型式」？【型式、對應】

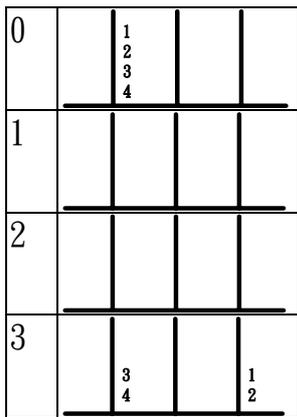
(四) 插入 6 張空白卡時，要比照「搬移幾個圓盤的型式」？【型式、對應】

(五) 將第 1 張卡片放到「答案區」，請問第 2 張卡片成為什麼？ 接下來要做什麼動作？【工作記憶】

附錄<十八> 探討是否理解型式概念，增強型式的認知：型式認知評量單(河內塔遊戲)

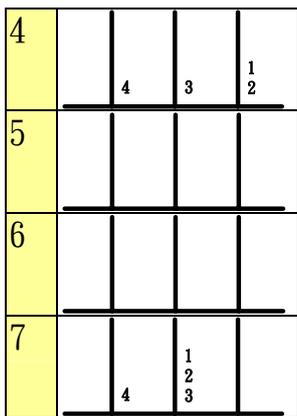
第一題、忽略不動(固定)的數字

1. 可以把下列過程看作是「由哪根柱子搬移到哪根柱子」?
2. 可以把下列過程看作是「搬移幾個圓盤的問題之答案」? 非固定的數字是?
3. 請從「問題解決之內容參照」之6種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。



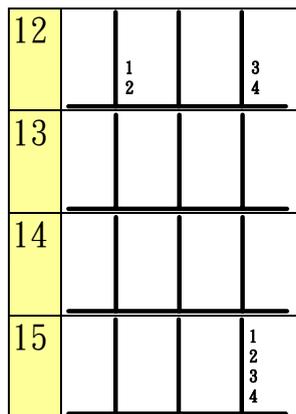
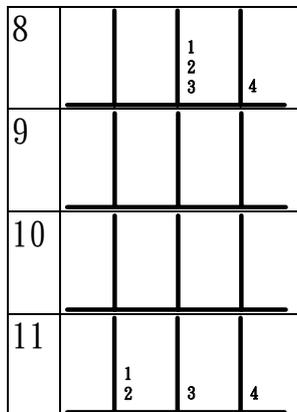
1. 由 () 柱搬移到 () 柱。
 2. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
 固定不動的數字是 ()。

4. 由 () 柱搬移到 () 柱。
 5. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
 固定不動的數字是 ()。



7. 由 () 柱搬移到 () 柱。
 8. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
 固定不動的數字是 ()。

10. 由 () 柱搬移到 () 柱。
 11. 搬移 () 個圓盤，
 非固定的數字是 ()。
 固定不動的數字是 ()。



第二題、以下是搬移 4 個圓盤的問題，由「A 柱子搬移到 C 柱子」：

- 1-1. 由 A 柱搬移到 () 柱。
 2-1. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
 固定不動的數字是 ()。
 3.. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern
 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。

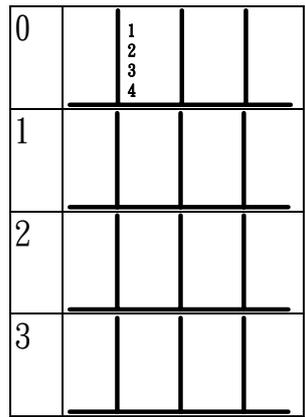
0		1 2 3 4		
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

- 1-2. 由 () 柱搬移到 C 柱。
 2-2. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
 固定不動的數字是 ()。
 4. 請畫出「步驟 8」的圖。
 6. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern
 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。

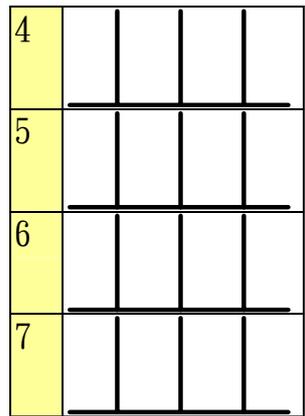
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				1 2 3 4

第三題、以下是搬移 4 個圓盤的問題，由第 (二) 題得知步驟 0 到步驟 7 是由「A 柱子搬移到 B 柱子」，請回答下列的問題：

- 1-1. 由 A 柱搬移到 () 柱。
- 2-1. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
固定不動的數字是 ()。
3. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。

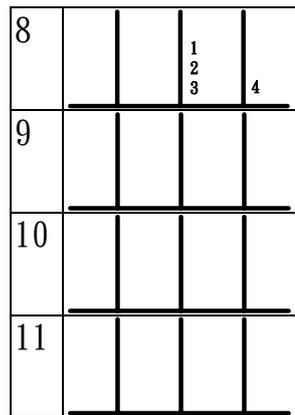


- 1-2. 由 () 柱搬移到 B 柱。
- 2-2. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
固定不動的數字是 ()。
4. 請畫出「步驟 4」的圖。
6. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中

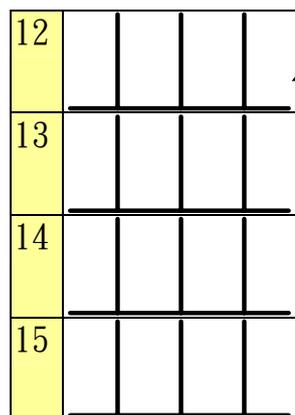


第四題、以下是搬移 4 個圓盤的問題，由第 (二) 題得知步驟 7 到步驟 15 是由「B 柱子搬移到 C 柱子」，請回答下列的問題：

- 1-1. 由 B 柱搬移到 () 柱。
- 2-1. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
固定不動的數字是 ()。
3. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。



- 1-2. 由 () 柱搬移到 C 柱。
- 2-2. 搬移 () 個圓盤，非固定的數字是 ()。
固定不動的數字是 ()。
4. 請畫出「步驟 12」的圖。
5. 「問題解決之內容參照」之 6 種 pattern 去挑選一個最適當的 pattern 來貼入空白卡中。

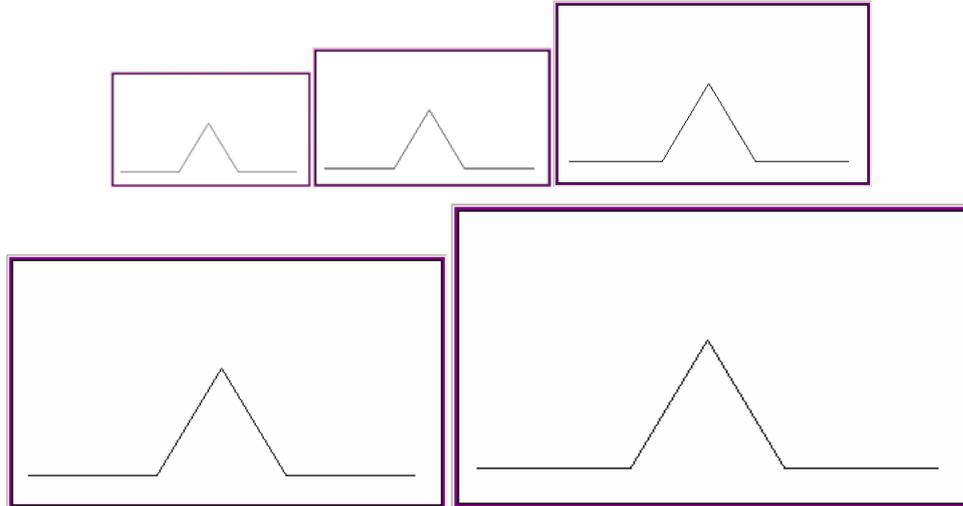


附錄<十九>探討是否理解型式概念，增強型式的認知：

型式認知評量單（星形-1、星形-2）

【第一題 星形-1】請依圖形的規律，貼出第3個圖形來

從下面大小不同的 pattern 中，挑選正確大小的 pattern 去貼入框框中

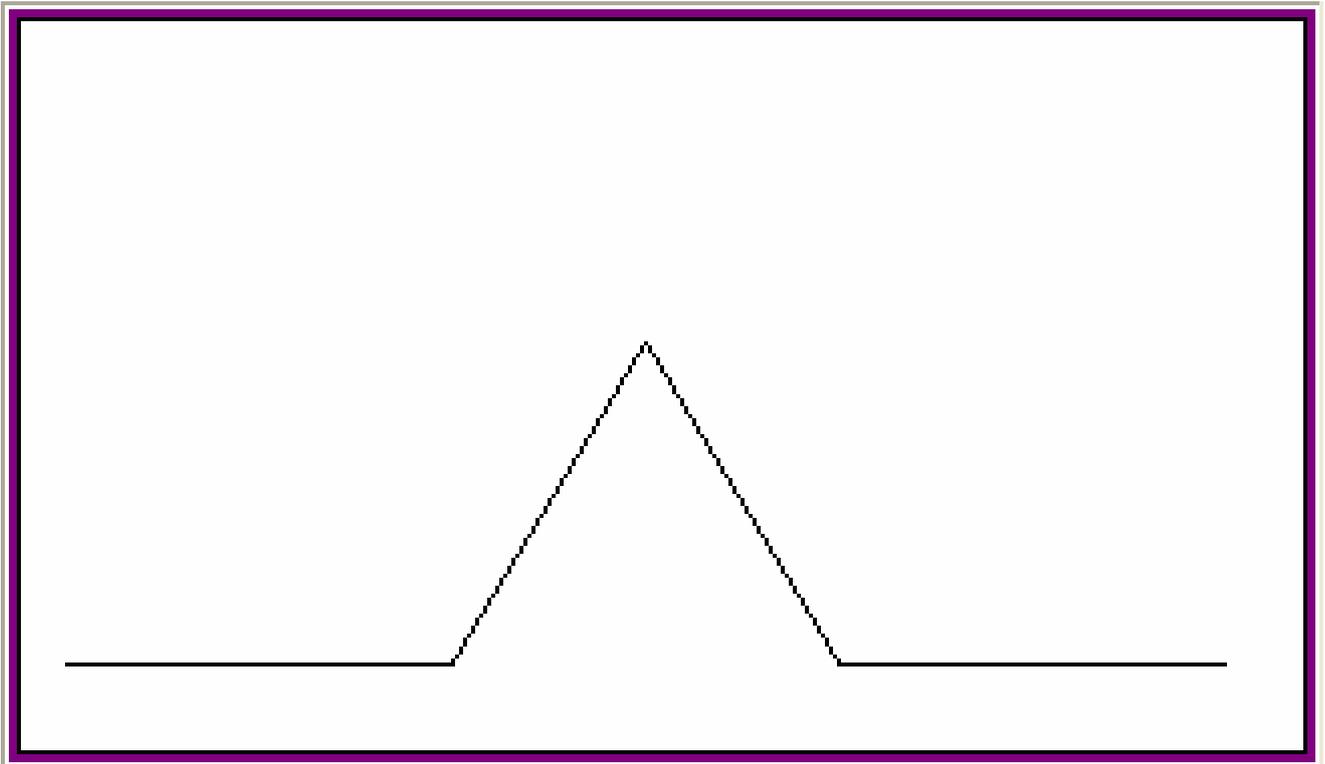


第1個圖形【星形-1】

提示：「看到」-----



第 2 個圖形【星形-1】 提示：「就換成」-----（請注意 pattern 的大小比例）

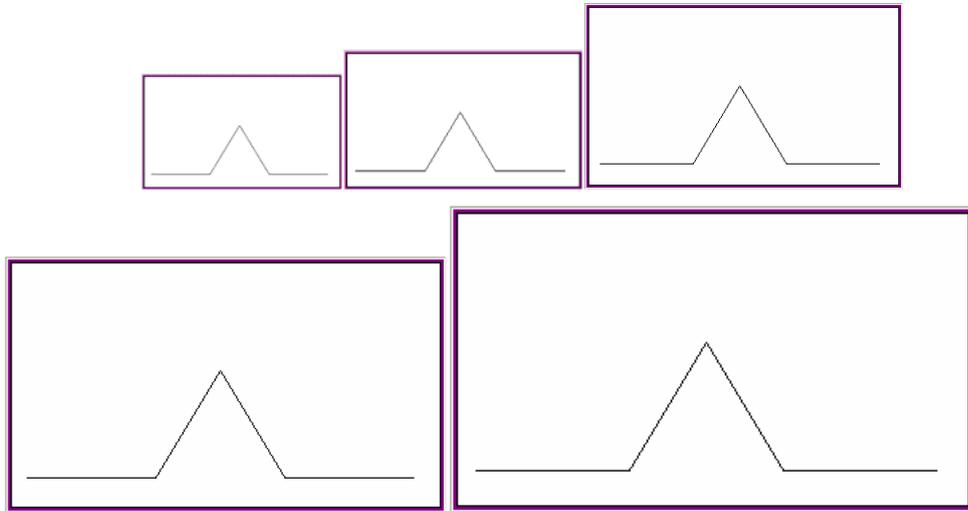


第 3 個圖形【星形-1】



【第二題 星形-2】請依圖形的規律，貼出第3個圖形來

從下面大小不同的 pattern 中，挑選正確大小的 pattern 去貼入框框中



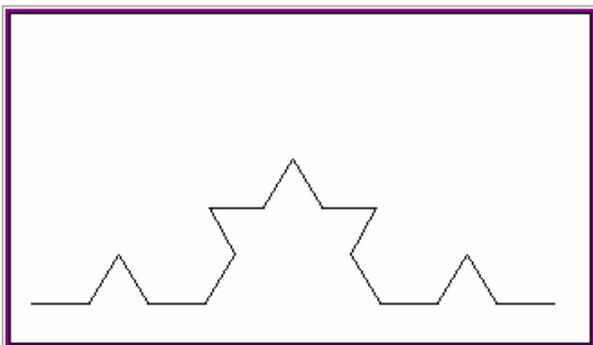
第1個圖形【星形-2】 提示：「看到」-----



第2個圖形【星形-2】 提示：「就換成」-----【請注意 pattern 的大小比例】



第3個圖形【星形-2】



第 4 個圖形【星形-2】



註：本圖形很大，超過 A4，在觀察第 1 個圖形、第 2 個圖形、第 3 個圖形之後，
對於第 4 個圖形，只要貼滿以上的範圍即可。