

投稿類別：數學類

篇名：

河內塔問題環數限制的探討

作者：

陳沛儒。金門高中。高一 1 班

許尹懷。金門高中。高一 1 班

指導老師：

陳曉惠老師

壹●前言

一、研究動機

上數學課的時候，講到遞迴關係式的單元，提到一個河內塔的問題，其實在國小時，便有聽過「河內塔」這個名字，但當時在操作時不知道它有什麼規律，而且班級內知道它如何運作以及如何以最少步數運作的規則的人並不多，於是我們利用閒暇時間，試出了最少步數的方法，在學習了這個單元之後，也找出了屬於三根柱最基本河內塔的遞迴關係式，對河內塔抱著極大興趣的我們，就已經有結論的河內塔研究，延伸與歸納出不同的河內塔問題。

二、研究目的

- (一) 改變柱子的根數，試著找出最少移動步數，並推導出公式。
- (二) 改變柱子所能放的環數，試著找出最少移動步數，並推導出公式。

三、研究方法

- (一) 搜尋資源：圖書館、網路資料
- (二) 文獻探討
- (三) 移動策略研究
- (四) 歸納

貳●正文

一、河內塔問題與起源

河內塔是根據一個傳說行程的數學問題：有三根柱子 A、B、C。A 杆上有 N 個 ($N > 1$) 穿孔圓盤，盤的尺寸由下到上依次變小。要求按下列規則將所有圓盤移至 C 杆：

1. 每次只能移動一個圓盤。
2. 大盤不能疊在小盤上面。

問：如何移？最少要移動幾次？

最早發明這個問題的人是法國數學家艾德華·盧卡斯。傳說印度某間寺院有三根柱子，上串六十四個金盤。寺院裡的僧侶依照一個古老的預言，以上述規則移動這些金盤；預言說：當這些盤子移動完畢，世界就會滅亡。這個傳說叫作「梵天寺之塔問題」(Tower of Brahma puzzle)。但不知道是盧卡斯自創的這個傳說，還是他受人啟發。(註一)

若傳說屬實，僧侶們需要 2 64 步，才能完成這個任務；若他們每秒可完成一個金盤的移動，就需要 5849.42 億年才能完成。整個宇宙現在也不過 137 億年。(註二)

二、研究過程

本文主要限定一根柱子可放置的盤子數量，探討最少的移動步數，以下分為三柱與 n 四柱時的狀況。

(一) 柱數為三柱

1. 遊戲規則

物件

(1) 3 根柱子 (A 柱為起始柱，B 柱為最短柱，C 柱為終點)

(2) 7 個大小相異圓盤

(二) 移動過程與限制

1. 一次只允許將套在柱子上最上層的 1 個環，從所在位置移動到別根柱子上，此移動的完成，我們稱為「1 次操作」記為「1 步」。

2. 環號小的須置於環號大的上面。

3. 中間的最短柱至多分別可放 2、3、4 盤，分為三大種狀況。

4. 移法：將所有盤子由大到小放在其中一根柱子，並將所有的盤子移動到另一根柱子。如下：(小數字代表第幾個圓盤)

(三) 最短柱至多可放 2 片圓盤時，

1. 若圓盤有兩片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ，最少移動次數為 3 次

2. 若圓盤有三片，則 ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^3A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ，最少移動次數為 7 次。

3. 若圓盤有四片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^3A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^2C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ，此時最短柱已超過兩個圓盤，所以無法進行下去，五片、六片…亦為如此。

(四) 最短柱至多可放 3 片圓盤時，

1. 若圓盤有兩片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ，最少移動次數為 3 次

2. 若圓盤有三片，則 ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^3A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ，最少移動次數為 7 次。

3. 若圓盤有四片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^3A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^2C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ，
 ${}^4A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^2B \rightarrow A$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^3B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ，
最少移動次數為 15 次。

4. 若圓盤有五片，則 ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^3A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ，
 ${}^4A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^2C \rightarrow A$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^3C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ，

此時最短柱已超過三個圓盤，所以無法進行下去，六片、七片…亦為如此。

(五) 最短柱至多可放 4 片圓盤時，

1. 若圓盤有兩片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ，最少移動次數為 3 次
2. 若圓盤有三片，則 ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^3A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ，最少移動次數為 7 次
3. 若圓盤有四片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^3A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^2C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^4A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^2B \rightarrow A$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^3B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ，最少移動次數為 15 次。
4. 若圓盤有五片，則 ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^3A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^4A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^2C \rightarrow A$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^3C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^5A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^3B \rightarrow A$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^2C \rightarrow A$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^4B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ， ${}^2A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow B$ ， ${}^3A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow A$ ， ${}^2B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow C$ ，最少移動次數為 31 次。
5. 若圓盤有五片，則 ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^3A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^2C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^4A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^2B \rightarrow A$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^3B \rightarrow C$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^5A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^2C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^3C \rightarrow A$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^2B \rightarrow A$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^4C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ， ${}^2A \rightarrow C$ ， ${}^1B \rightarrow C$ ， ${}^3A \rightarrow B$ ， ${}^1C \rightarrow A$ ， ${}^2C \rightarrow B$ ， ${}^1A \rightarrow B$ ，

此時最短柱已超過四個圓盤，所以無法進行下去，七片、八片…亦為如此。

二、柱數為四柱

(一) 遊戲規則

1. 物件

(1) 4 根柱子(A 柱為起始柱，B 柱為最短柱，C 柱為普通柱，D 柱為終點柱)

(2) 9 個大小相異圓盤

(二) 移動過程與限制

1. 一次只允許將套在柱子上最上層的 1 個環，從所在位置移動到別根柱子上，此移動的完成，我們稱為「1 次操作」記為「1 步」。
2. 環號小的須置於環號大的上面。
3. 中間的最短柱至多分別可放 2、3、4 片，分為三大種狀況。

4. 移法：因為多了一根柱子，移法也變得更多樣化，所以我們訂定一個規則，就是除了最短柱限制盤數為四片的狀況 C，其他 A.B 兩種狀況，當盤數大於四(因為有四根柱子)時，先將最短柱的最多盤數堆疊完畢，其餘的再移動到終點柱上，最後將短柱上暫時放置的圓盤移動到終點柱。

(三) 最短柱至多可放兩個圓盤時，

1. 若圓盤有兩片，則 ${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$ ，最少移動次數為 3 次
2. 若圓盤有三片，則 ${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$ ，最少移動次數為 5 次。
3. 若圓盤有四片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D,)$
 $({}^1B \rightarrow C, {}^2B \rightarrow D, {}^1C \rightarrow D)$ ，最少移動次數為 9 次
4. 若圓盤有五片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^3A \rightarrow D, {}^4A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow C, {}^5A \rightarrow D,)$
 $({}^3C \rightarrow A, {}^4C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow C, {}^2B \rightarrow D, {}^1C \rightarrow D)$ ，
 最少移動次數 13 次。
5. 若圓盤有六片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C,)$
 $({}^3D \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A,)$
 $({}^5C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow C, {}^2B \rightarrow D, {}^1C \rightarrow D)$ ，
 最少移動次數 21 次。
6. 若圓盤有七片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^3A \rightarrow D, {}^4A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow C, {}^5A \rightarrow D,)$
 $({}^3C \rightarrow A, {}^4C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D, {}^6A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow C, {}^4D \rightarrow A, {}^3C \rightarrow A,)$
 $({}^5D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^4A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow C, {}^7A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow A, {}^4C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D,)$
 $({}^5C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow C, {}^4D \rightarrow A, {}^3C \rightarrow A, {}^6C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D, {}^4A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow C,)$
 $({}^5A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow A, {}^4C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow C, {}^2B \rightarrow D, {}^1C \rightarrow D)$ ，
 最少移動次數 37 次。
7. 若圓盤有七片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C,)$
 $({}^3D \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A,)$
 $({}^5C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^7A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C,)$
 $({}^5D \rightarrow A, {}^3C \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A, {}^6D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D,)$
 $({}^5A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C, {}^8A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A,)$
 $({}^5C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^6C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C,)$
 $({}^5D \rightarrow A, {}^3C \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A, {}^7C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D,)$
 $({}^5A \rightarrow C, {}^3D \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^3A \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^3D \rightarrow A,)$

${}^5C \rightarrow D, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow C, {}^2B \rightarrow D, {}^1C \rightarrow D),$

最少移動次數 69 次。

(四) 最短柱至多可放三個圓盤時，

1. 若圓盤有兩片，則 ${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$ ，最少移動次數為 3 次。
2. 若圓盤有三片，則 ${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$ ，最少移動次數為 5 次。
3. 若圓盤有四片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow D, {}^3A \rightarrow B, {}^2D \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^4A \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^3B \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1A \rightarrow D)$ ，最少移動次數為 11 次。
4. 若圓盤有五片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow D, {}^3A \rightarrow B, {}^2D \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^4A \rightarrow C, {}^5A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^3B \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1A \rightarrow D)$ ，最少移動次數為 13 次。
5. 若圓盤有六片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow D, {}^3A \rightarrow B, {}^2D \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^4A \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C, {}^4D \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^5C \rightarrow D, {}^4A \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^3B \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1A \rightarrow D)$ ，最少移動次數為 17 次。
6. 若圓盤有七片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow D, {}^3A \rightarrow B, {}^2D \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^4A \rightarrow C, {}^5A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow D, {}^6A \rightarrow C, {}^4D \rightarrow A, {}^5D \rightarrow C, {}^4A \rightarrow C, {}^7A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow D, {}^5C \rightarrow A, {}^4D \rightarrow A, {}^6C \rightarrow D, {}^4A \rightarrow C, {}^5A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^3B \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1A \rightarrow D)$ ，最少移動次數為 25 次。
7. 若圓盤有八片，則 $({}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow D, {}^3A \rightarrow B, {}^2D \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B), ({}^4A \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C, {}^4D \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^5C \rightarrow D, {}^4A \rightarrow D, {}^7A \rightarrow C, {}^4D \rightarrow C, {}^5D \rightarrow A, {}^4C \rightarrow A, {}^6D \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C, {}^4D \rightarrow C, {}^8A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^5C \rightarrow D, {}^4A \rightarrow D, {}^6C \rightarrow A, {}^4D \rightarrow C, {}^5D \rightarrow A, {}^4C \rightarrow A, {}^7C \rightarrow D, {}^4A \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C, {}^4D \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^4C \rightarrow A, {}^5C \rightarrow D, {}^4A \rightarrow D), ({}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^3B \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1A \rightarrow D)$ ，最少移動次數為 41 次。

(五) 最短柱至多可放四個圓盤時，

1. 若圓盤有兩片，則 ${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$ ，最少移動次數為 3 次
2. 若圓盤有三片，則 ${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^2C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$ ，最少移動次數為 5 次。
3. 若圓盤有四片，則 ${}^1A \rightarrow C, {}^2A \rightarrow B, {}^1C \rightarrow B, {}^3A \rightarrow C, {}^4A \rightarrow D, {}^3C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow C, {}^2B \rightarrow D, {}^1C \rightarrow D$ ，最少移動次數為 9 次

4. 若圓盤有五片，則(${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow C, {}^4A \rightarrow B, {}^3D \rightarrow B,$
 ${}^1C \rightarrow D, {}^2C \rightarrow B, {}^1D \rightarrow B$)，(${}^5A \rightarrow D$)，(${}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^1A \rightarrow C,$
 ${}^3B \rightarrow A, {}^4B \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D, {}^1C \rightarrow B, {}^2C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$)，
 最少移動次數為 19 次
5. 若圓盤有六片，則(${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow C, {}^4A \rightarrow B, {}^3D \rightarrow B,$
 ${}^1C \rightarrow D, {}^2C \rightarrow B, {}^1D \rightarrow B$)，(${}^5A \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^5C \rightarrow D$)，(${}^1B \rightarrow A,$
 ${}^2B \rightarrow C, {}^1A \rightarrow C, {}^3B \rightarrow A, {}^4B \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D, {}^1C \rightarrow B, {}^2C \rightarrow D,$
 ${}^1B \rightarrow D$)，最少移動次數為 21 次
6. 若圓盤有七片，則(${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow C, {}^4A \rightarrow B, {}^3D \rightarrow B,$
 ${}^1C \rightarrow D, {}^2C \rightarrow B, {}^1D \rightarrow B$)，(${}^5A \rightarrow D, {}^6A \rightarrow C, {}^5D \rightarrow C, {}^7A \rightarrow D,$
 ${}^5C \rightarrow A, {}^6C \rightarrow D, {}^5A \rightarrow D$)，(${}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^1A \rightarrow C, {}^3B \rightarrow A,$
 ${}^4B \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D, {}^1C \rightarrow B, {}^2C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$)，
 最少移動次數為 25 次。
7. 若圓盤有八片，則(${}^1A \rightarrow B, {}^2A \rightarrow C, {}^3A \rightarrow D, {}^1B \rightarrow C, {}^4A \rightarrow B, {}^3D \rightarrow B,$
 ${}^1C \rightarrow D, {}^2C \rightarrow B, {}^1D \rightarrow B$)，(${}^5A \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^5C \rightarrow D, {}^7A \rightarrow C,$
 ${}^5D \rightarrow A, {}^6D \rightarrow C, {}^5A \rightarrow C, {}^8A \rightarrow D, {}^5C \rightarrow D, {}^6C \rightarrow A, {}^5D \rightarrow A,$
 ${}^7C \rightarrow D, {}^5A \rightarrow C, {}^6A \rightarrow D, {}^5C \rightarrow D$)，(${}^1B \rightarrow A, {}^2B \rightarrow C, {}^1A \rightarrow C,$
 ${}^3B \rightarrow A, {}^4B \rightarrow D, {}^3A \rightarrow D, {}^1C \rightarrow B, {}^2C \rightarrow D, {}^1B \rightarrow D$)，
 最少移動次數為 33 次。

參●結論

一、柱數為三柱

在不同的短柱環數限制下，不同的盤數，搬動最少次數如下表：

搬動盤數 短柱最多盤數	2	3	4	5	6	7
2	3	7	X	X	X	X
3	3	7	15	X	X	X
4	3	7	15	31	X	X

可得下列搬動的重要結論

- (一) 大盤不能放在有限制片數的柱上。
- (二) 如果我們將其中一根柱子縮短，使那根柱子最多能夠容納的盤子變少。
- (三) 大盤上的片數多限制的片數 1 片，就無法運作。因為只有 3 根柱，當將最大盤移動到另一柱時，其他盤必定是疊在一起的，所以若限制柱的片數為 n ，則最多片數為 $n+1$ ， $n+2$ 便不可運作。

二、柱數為四柱

在不同的短柱環數限制下，不同的盤數，搬動最少次數如下表：

搬動盤數 短柱最多盤數	2	3	4	5	6	7	8
2	3	5	9	13	21	37	69
3	3	5	11	13	17	25	41
4	3	5	9	19	21	21	33

可得下列搬動的重要結論

- (一) 若用先將固定盤樹的柱子填滿的方法移動，因為占滿了一根，還剩下三根，所以圓盤數的多寡，不影響能否移動所有圓盤到終點柱上，不管多少的圓盤都是可行的。
- (二) 圓盤數量大於 4 時，移動到終點柱上的次數，是(短柱至多圓盤數在四柱時移動的次數)+(所有圓盤數-短柱至多圓盤數 在三柱時的移動次數)+(短柱至多圓盤數在四柱時移動的次數。因為四柱時，移動的選擇多了一根柱子，固可減少移動次數，但使用先將最短柱填滿的方法，會只剩下三根柱子，因此利用所有柱子數-短柱至多圓盤數 的移動次數 再三柱時所能移動得最少次數，最後在加上將在短柱上的一開始暫時置放的圓盤的移動次數，就可以得到上表。
- (三) 使用同樣先將最短柱填滿的方法，雖然短柱可放的盤數變多，但移動次數不一定較少。就像是總共盤數為四片時，短柱最多盤數為三片的狀況，步數比短柱限制

為兩片及四片時來的多；以及總共盤數為六片時，短柱最多盤數為三片的狀況，步數比短柱最多盤數為兩片及四片的狀況來的多。

肆●引註資料與參考資料

一、維基百科。2016年3月1日。取自

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B1%89%E8%AF%BA%E5%A1%94>

二、林福來等六人 (2015)。高中數學第二冊。台南市：南一。

三、黃祈昌、田慈安、陳福誌、王文忻 (2010)。中華民國第 50 屆中小學科學展覽國中組數學---作品「 n 柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找」。