投稿類別：自然科學類

篇名：

減九加零回文數

作者：

李駿宏。國立自強國中。國二一班

吳修丞。國立自強國中。國二 3 班

指導老師：

徐彥哲老師

陳禹翔老師

一●前言

一、摘要

回文數，是指 14541 或 729927 這類由左往右讀與由右往左讀一樣的數，則稱為回文數，在本主題中：回文數是指兩數相乘，等於其顛到數相乘的數字。有一個問題：將兩個二位數的數字，其顛倒數相乘在何種狀況下會等於兩原數的積，共通點為何？又有哪些解？若改成其他但相同位數的數字相乘會呈現甚麼規律？若改成位數不同的數字相乘又會呈現甚麼規律呢？我們利用一個多項式表達數字並讓多個式子相乘，並簡化，再進階到以等式連接，運用係數推論出未知數的等式，將找到的規律以表格畫出，分析表格以推論出新表格，利用大量的表格推出規律，再畫出不同位數數字的表格，以及推出其規律。利用 Scratch 製作出簡易的電腦程式，設計出只要輸入位數就能自動鎖定數字範圍，並且能夠自動篩檢數字是否符合此規律的程式、儲存符合的數字、舉出所有符合此規律的數，再次驗證其是否正確。

二、研究動機

某天，我在上探究課時，老師遞了一份關於回文數的文章給我們，當時看到兩串看似雜亂的數字相加後居然富含著規律，有極高的興趣，當時老師給予的文章是關於顛倒數的加減，而我想了想乘法當中是否也有規律存在，我們就不禁感了興趣，開始研究。

三、研究目的

(一)研究兩個不含零的數字跟其顛倒數相乘是否存在規律

(二)利用方程式推論出規律

(三)以電腦程式驗證規律是否正確

(四)找出 N×M 位數共同規則

(五)找出二位數相乘、三位數相乘、二位數乘以三位數的回文數

四、研究設備與器材

紙筆、EXCEL 軟體、WORD 軟體、SCRETCH

五、研究過程或方法

(一)本研究的運算規則如下

1、取兩個不含零的數，例 12、34

2、將兩數相乘且讓其顛倒數相乘，例 12×34 和 34×21

3、找出兩積相同的數字，例 63、48

(二)利用 EXCEL 與 SCRATCH 輸入指令快速找出符合其規律的數字，並觀察結果，找出規律

(三)利用 SCRATCH 驗證找到規律是否正確

二●正文

一、二位數乘以二位數規律之討論

(一)(十位數字為 A、個位數字為 B)二位數 AB，可用 10A+B 表示、其顛倒數可用 10B+A 表示

(二)AB×CD=DC×BA 可以用(10A+B)(10C+D)=(10D+C)(10B+A)表示

(10A+B)	(10D+C)
X) (10C+D)	X) (10B+A)
100AC+10BC+10AD+BD	100BD+10AD+10BC+AC

(三)展開上式可得：

100AC+10AD+10CB+BD=100BD+10BC+10AD+AC

可化簡成：99AC=99BD ⇨ AC=BD

(四)只要符合 AC=BD 即能達成條件

二、三位數乘以二位數規律之討論

(一)(十位數字為 A、個位數字為 B)二位數 AB，可用 10A+B 表示、其顛倒數可用 10B+A 表示；(百位數字為 A、十位數字為 B、個位數字為 C)三位數 ABC，可用 100A+10B+C 表示、其顛倒數可用 100C+10B+A 表示

(二)ABC×DE=ED×CBA 可以用

(100A+10B+C) (10D+E)=(10E+D) (100C+10B+A)表示

展開成：1000AD + 100AE + 100BD + 10BE + 10CD + CE=

AD + 10AE + 10BD + 100BE + 100CD + 1000CE

移項後：999AD+90AE+90BD=999CE+90BE+90CD

並化簡:111AD+10AE+10BD=111CE+10BE+10CD

(三)推論出達到 AD=CE、BD+AE=BE+CD 這兩個條件，即可達成目標

三、三位數乘以三位數規律之討論

(一)(百位數字為 A、十位數字為 B、個位數字為 C)三位數 ABC，可用 100A+10B+C 表示、其顛倒數可用 100C+10B+A 表示

(二)ABC×DEF=FED×CBA 可以用

(100A+10B+C)(100D+10E+F)= (100F+10E+D)(100C+10B+A)表示

展開成：

10000AD+1000AE+100AF+1000BD+100BE+10BF+100CD+10CE+CF=

AD+10AE+100AF+10BD+100BE+1000BF+100CD+1000CE+10000CF

移項後：

9999AD+990AE+990BD=9999CF+990BF+990CF

化簡成：

101AD+10AE+10BD=101CF+10BF+10CF

(三)推論出達到 AD=CF、BD+AE=BF+CE 這兩個條件，即可達成目標

四、四位數乘以三位數規律之討論

(一)(百位數字為 A、十位數字為 B、個位數字為 C)三位數 ABC，可用 100A+10B+C 表示、其顛倒數可用 100C+10B+A 表示；(千位數字為 A、百位數字為 B、十位數字為 C、個位數字為 D)四位數 ABCD，可用 1000A+100B+10C+D 表示、其顛倒數可用 1000D+100C+10B+A 表示

(二)ABC×DEFG=GFED×CBA 可以用

(100A+10B+C)(1000D+100E+10F+G)=

(1000G+100F+10E+D)(100C+10B+A) 表示

展開成：

100000AD + 10000AE + 1000AF + 100AG + 10000BD + 1000BE + 100BF + 10BG + 1000CD + 100CE + 10CF + CG=

AD + 10 AE + 100AF + 1000AG + 10BD + 100BE + 1000BF + 10000BG + 100CD + 1000CE + 10000CF + 100000CG

移項後：

99999AD+9990AE+9990BD+900AF+900BE+900CD=

99999CG+9990CF+9990BG+900CE+900BE+900AG

化簡成：

11111AD+1110AE+1110BD+100AF+100BE+100CF=

11111CG+1110CF+1110BG+100CE+100BE+100AG

(三)推論出達到 AD=CG、AE+BD=CF+BG、AF+BE+CF=BE+CE+AG 這三個條件，即可達成目標

五、四位數乘以四位數規律之討論

(一)(千位數字為 A、百位數字為 B、十位數字為 C、個位數字為 D)四位數 ABCD，可用 1000A+100B+10C+D 表示、其顛倒數可用 1000D+100C+10B+A 表示

(二)(1000A+100B+10C+D)(1000E+100F+10G+H)=

(1000D+100C+10B+A)(1000H+100G+10F+E)

展開：

1000000AE+1000000AF + 10000AG + 1000AH + 100000BE + 10000BF + 1000BG + 100BH + 10000CE + 1000CF + 100CG + 10CH + 1000DE + 100DF + 10DG +DH=AE + 10AF + 100AG + 1000AH + 10BE + 100BF + 1000BG + 10000BH + 100CE + 1000CF + 10000CG + 100000CH +

1000DE + 10000DF+100000DG + 100000DH

移項後：

999999AE+99990BE+99990AF+9900BF+9900CE+9900AG=

999999DH+99990DG+99990CH+9900CG+9900DF+9900BH

化簡成：

10101AE+1010BE+1010AF+100CE+100BF+100AG=

10101DH+1010DG+1010CH+100DF+100CG+100BH

(三)推論出達到 AE=DH、BE+AF=DG+CH、CE+BF+AG=DF+CG+BH 這三個條件，即可達成目標

六、N 位數乘以 N 位數規律之討論

(一)依照二位數乘以二位數、三位數乘以三位數、四位數乘以四位數的規律可判斷出第一個數的第一位乘以第二個數的第一位會等於第一個數的最後一位乘以第二個數的最後一位

例：四位數乘以四位數規律 AE=DH

(二)將第一個數字第一位數字設為 A1、第二位設為 A2、第 N 位設為 AN 再將第二個數字第一位設為 B1、第二位設為 B2、第 N 位設為 BN

例：四位數乘以四位數等於

(1000A1+100A2+10A3+A4)(1000B1+100B2+10B3+B4)=

(1000A4+100A3+10A2+A1)(1000B1+100B2+10B3+B4)

(三)依照順序製作表格，以四位數乘以四位數的表格為例(表一)

表一

(三)每一種類型的條件左上角(A1B1)必定得等於右下角(ANBN)

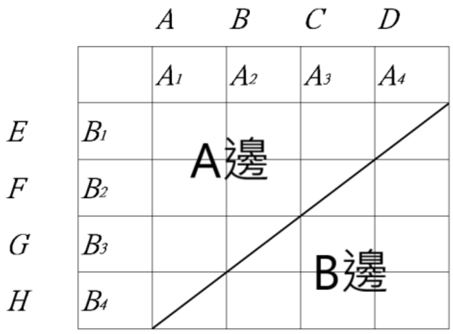
(四)發現從右上角(ANB1)到左下角(A1BN)中間的數字會因移項而抵銷，以表二為例。中間空白位置將會被抵銷，因此可以不考慮，此線命

		A	B	C	D
		A_1	A_2	A_3	A_4
E	B_1	A_1B_1	A_2B_1	A_3B_1	A_4B_1
F	B_2	A_1B_2	A_2B_2	A_3B_2	A_4B_2
G	B_3	A_1B_3	A_2B_3	A_3B_3	A_4B_3
H	B_4	A_1B_4	A_2B_4	A_3B_4	A_4B_4

名為交界線，在交界線的左邊稱為 A 邊，在交界線的右邊稱為 B 邊，以表三為例。

		A	B	C	D
		A_1	A_2	A_3	A_4
E	B_1	A_1B_1	A_2B_1	A_3B_1	
F	B_2	A_1B_2	A_2B_2		A_4B_2
G	B_3	A_1B_3		A_3B_3	A_4B_3
H	B_4		A_2B_4	A_3B_4	A_4B_4

表二



表三

(五)在 A、B 邊一條斜線(平行交界線)為一組，同樣個數的組須相等，因此列出下列式子：

A1+XB1+Y=AN-XBN-Y，N-2≧X+Y=K≧0，X 和 Y 為正整數或零且小於等於 N-2，符合這個條件即可達成目標

(六)每一組的 K 值代表有 K+1 個數字在這組等式一邊，也代表為 X+Y 的定值

六、N 位數乘以 N+1 位數規律之討論

(一)依照二位數乘以三位數、三位數乘以四位數的規律可判斷出第一個數的第一位乘以第二個數的第一位會等於第一個數的最後一位乘以第二個數的最後一位，例：三位數乘以四位數規律 AD=CG

(二)將第一個數字第一位數字設為 A1、第二位設為 A2、第 N 位設為 AN 再將第二個數字第一位設為 B1、第二位設為 B2、第 N+1 位設為 BN+1

例：三位數乘以四位數

(100A1+10A2+A3)(1000B1+100B2+10B3+B4)=

(100A3+10A2+A1)(1000B1+100B2+10B3+B4)

(三)依照順序製作表格，以三位數乘以四位數的表格為例(表四)

A B C

	K 值	A1	A2	A3
D	B1	0	1	2
E	B2	1	2	2
F	B3	2	2	1
G	B4	2	1	0

表四

(四)發現交界線與與 N 位數乘以 N 位數不一致，但依然保留在交界線的左邊稱為 A 邊，在交界線的右邊稱為 B 邊。

(五)與 N 位數乘以 N 位數規律一致，A1+XB1+Y=AN-XBN-Y，N-1≧X+Y=K≧0，X 和 Y 為正整數或零且不能等於 N，符合這個條件即可達成目標

(六)每一組的 K 值代表有 K+1 個數字在這組等式一邊，也代表為 X+Y 的定值

(七)與 N 位數乘以 M 位數規律相比，無不需考慮的部分

七、N 位數乘以 M 位數規律之討論

(一)利用表格找出不須考慮的格子存在條件，當 N 與 M 的差為二的倍數或零，則會有不需考慮的格子，因此推出(N+M)/2-2≧X+Y=K≧0，也可以通用:A1+XB1+Y=AN-XBN-Y

例如: 4 位數乘以 2 位數規律

(1000A+100B+10C+D)(10E+1F)=(1000D+100C+10B+A)(10F+E)

展開：

10000AE+1000AF+1000BE+100BF+100CE+10CF+10DE+DF=

AE+10AF+10BE+100BF+100CE+1000CF+1000DE+10000DF

移項後：

9999AE+990AF+990BE=990CF+990DE+9999DF

化簡成:

101AE+10AF+10BE=10CF+10DE+101DF

推論出達到 AE=DF、AF+BE=CF+DE 這兩個條件，即可達成目標

(二)依照找到的規律 1≧X+Y≧0，A1+XB1+Y=AN-XBN-Y 推出達到 AE=DF，AF+BE=CF+DE 這兩個條件，即可達成目標(表五)

		A	B	C	D
	K 值	A1	A2	A3	A4
E	B1	0	1	X	1
F	B2	1	X	1	0

表五

(三)若無不須考慮的格子，則可推出(N+M)/2-1≧X+Y=K≧0

例如: 5 位數乘以 2 位數規律

(10000A+1000B+100C+10D+E)(10F+G)=

(10000E+1000D+100C+10B+A)(10G+F)

展開：

100000AF+10000AG+10000BF+1000BG+1000CF+100CG+100DF+10DG+10EF+EG=

100000EG+10000EF+10000DG+1000DF+1000CG+100CF+100BG+10BF+10AG+AF

移項後：

999999AF+9990AG+9990BF+900BG+900CF=

99999EG+9990EF+9990DG+900DF+900CG

化簡成:

111111AF+1110AG+1110BF+100BG+100CF=

11111EG+1110EF+1110DG+100DF+100CG

推論出達到 AF=EG、AG+BF=EF+GE、BG+CF=DF=CG 這三個條件，即可達成目標

(四)依照找到的規律 1≧X+Y≧0，A1+XB1+Y=AN-XBN-Y 推出達到 AF=EG，AG+BF=EF+GE，BG+CF=DF=CG 這三個條件，即可達成目標(表六)

		A	B	C	D	E
	K 值	A1	A2	A3	A4	A5
F	B1	0	1	2	2	1
G	B2	1	2	2	1	0

表六

八、利用 SCRATCH 驗證及運算出符合條件的數字

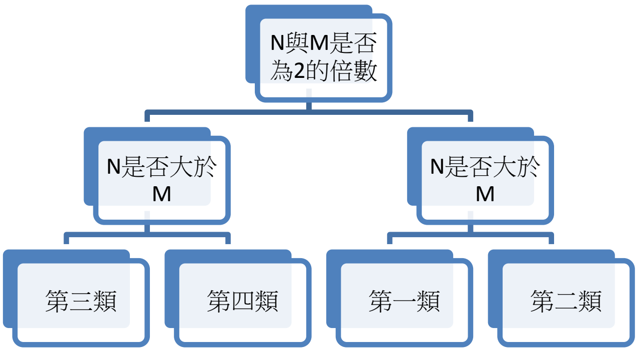
(一)利用 N 與 M 的關係進行分類，當 N>M 時分到第一類，反之 N<M 則分到第二類，若 N=M 則分到第三類(圖一)(圖二)

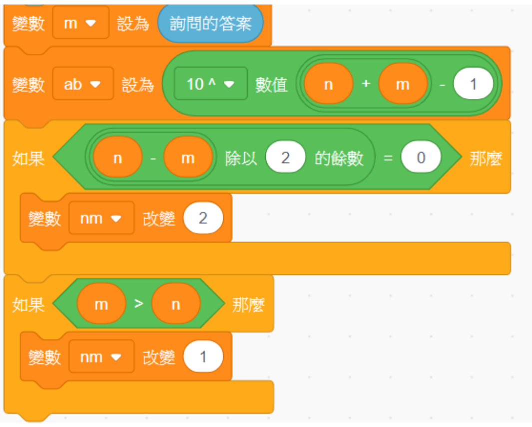
(二)第一類的規律 X 最大值>Y 最大值，且 K 最大值為(N+M+1)/2-1

(三)第二類的規律 Y 最大值>X 最大值，且 K 最大值為(N+M+1)/2-1

(四)第三類的規律 X 最大值>Y 最大值，且 K 最大值為(N+M)/2-2

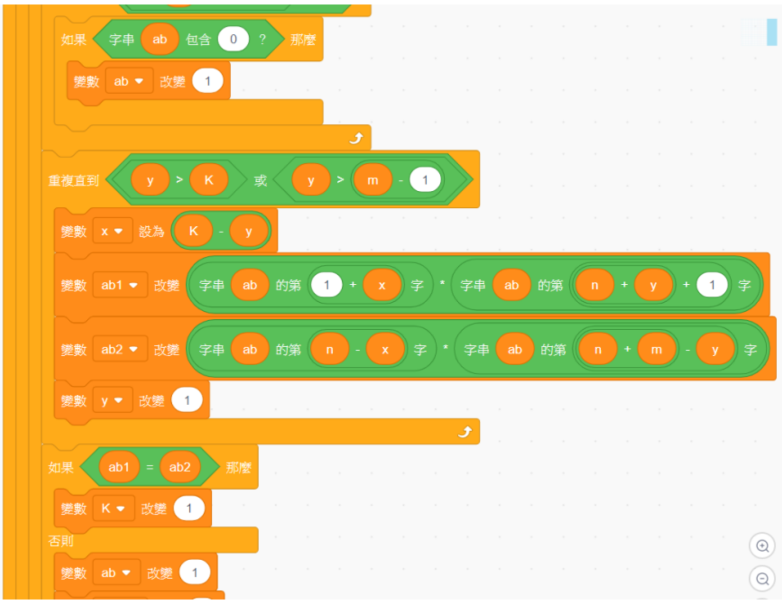
(五)第四類的規律 Y 最大值>X 最大值，且 K 最大值為(N+M)/2-2





圖一　　　　　　　　　　　　　　　圖二

(六)程式描述:先設定 N 與 M 的值，經由分析 N 與 M 的關係，進行分類，接著將規律套入，但因 SCRATCH 無提供方程式的多組解運算，因此我們控制了 K 與其中一個未知數(圖三)，再將每一類的規律打入，並且將 X 或 Y 添加了自動增加的功能，就可以算出 X+Y=K 的多組解，再將多組解帶入，從10^{N+M-1}開始帶入，若不符合則把數字加 1，再次套入運算，重複直到10^{N+M}-1。



圖三

九、利用代數證明所發現的規律

(一)已知在找到的規律中，右邊 K 值相同的多組解或一組解(X、Y)相加會等於左邊 K 值相同的多組解或一組解(解的數量會相同)。(表七)

	A1	A2	A3	A4	A5	……	AN
B1	0	1	2	3	4		
B2	1	2	3	4			
B3	2	3	4				
B4	3	4					
B5	4						
……							
BM							0

表七

三●結論

一、N 位數乘以 N 位數規律

A1+XB1+Y=AN-XBN-Y，N-2≧X+Y=K≧0，因有重疊的格子，所以 K 的最大值少 1，且 K 值相同的格子相加需相等

二、N 位數乘以 N+1 位數規律

A1+XB1+Y=AN-XBN-Y，N-1≧X+Y=K≧0，因無重疊的格子，所以 K 的最大值不變，且 K 值相同的格子相加都需相等

三、N 位數乘以 M 位數規律

若 N 與 M 的差為二的倍數則 A1+XB1+Y=AN-XBN-Y，(N+M)/2-2≧X+Y=K≧0，因有重疊的格子所以 K 最大值少 1，若不為二的倍數則 A1+XB1+Y=AN-XBN-Y，(N+M)/2-1≧X+Y=K≧0，K 值相同的格子相加都需相等

四、二位數乘以二位數特殊解

總共有 56 個(表八)

1242	2396	3269	4248	6324	8436
1263	2421	3486	4368	6348	8634
1284	2463	3621	4632	6423	9313
1362	2484	3642	4696	6469	9326
1393	2631	3684	4821	6843	9623
1482	2693	3931	4842	6932	9646
2124	2841	3962	4863	6964	
2136	3126	4128	6213	8214	
2148	3139	4212	6239	8412	
2364	3246	4236	6312	8424	

表八

五、三位數乘以二位數特殊解

總共有 34 個(表九)

12462	24231	36231	42396	62143	69352	86374
12693	24693	36462	46352	63132	82154	93143
13682	26341	39341	48231	63264	84132	93286
21264	28451	39682	48462	64253	84264	96253
21396	31286	42132	48693	68473	84396	

表九

六、三位數乘三位數特殊解

總共有 184 個(表十)

112422	133993	223966	244663	312426	336844	411228	442122	486342	642369	684243	864234	993133
112633	134862	224211	244884	312639	339311	412428	442366	488221	644223	688443	866334	993266
112844	142482	224633	246321	314826	339622	413628	442488	488442	644669	693132	882144	996233
113622	143682	224844	246963	321246	341286	421248	443688	488663	648423	693264	884122	996466
113933	144882	226311	248421	321369	342486	422112	446322	622113	662133	699332	884244	
114822	211224	226933	264231	322446	344886	422336	446966	622339	662399	699664	884366	
122442	211336	228411	264693	322669	366221	422448	448211	624213	663122	822114	886344	
122663	211448	231264	266331	324846	366442	423648	448422	624639	663244	824214	933113	
122884	213624	231396	266993	331266	366884	426312	448633	628413	663488	826314	933226	
123642	213936	233664	268431	331399	369321	426936	462132	633112	664233	842124	936213	
123963	214824	233996	284241	332466	369642	428412	462396	633224	664699	844112	936426	
124842	221244	234864	286341	332699	396231	431268	466332	633448	668433	844224	963123	
132462	221366	241284	288441	334866	396462	432468	466996	639312	669322	844336	963246	
132693	221488	243684	311226	336211	399331	433668	468432	639624	669644	846324	966223	
133662	223644	244221	311339	336422	399662	441288	482142	642123	682143	862134	966446	

表十

四●引註資料

一、國中數學第二冊(101 年 2 月)第一章:二元一次聯立方程式康軒出版社

二、中華民國第四十七屆中小學科學展覽會運用因數分析法揭開自然數大爆炸的奧秘。

三、梁培基。回文數與回文數幻方。數學傳播，41 卷 2 期，80-95