投稿類別：自然領域

篇名：

河內塔多根柱通式解


作者：

楊皓程。花蓮縣立壽豐國中。國三智班

李新智。花蓮縣立壽豐國中。國三義班

黃奕誠。花蓮縣立壽豐國中。國三仁班

姜婷煒。花蓮縣立壽豐國中。國二仁班

指導老師：

陳錦松老師

蘇子傑老師

# 壹●前言

## 一、研究動機

二年半前學長姐們看了「猩球崛起[1]」這部電影時，知道了河內塔這個遊戲，我們接續了這個數學習題的探究。也是機緣巧合，書商剛好送了一個三根柱 5 盤的河內塔遊戲道具到學校，就這樣讓我們展開了河內塔的探索之旅。我們就在想，那第一個玩河內塔的人，或沒玩過河內塔的人，怎麼知道自己有走出了最少的步數？如果把可移動的柱子增加，最少的步數會不會有差別？

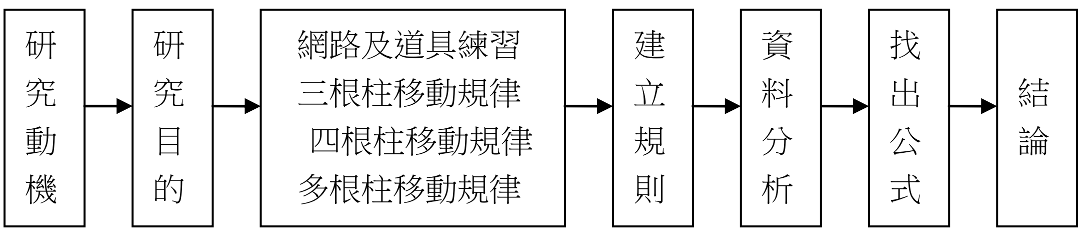
## 二、研究目的

三根柱 64 盤的遊戲，最少步數是 $2^{64}-1$ 步，三根柱的解題過程並沒有難倒我們，雖然我們並沒有真的把 $2^{64}$ 這個數值算出來，但我們發現了河內塔的一些解題關鍵，這股解題的熱情，很自然的擴展到多根柱的公式解。

但老師立刻澆了我們一頭冷水，老師說河內塔多根柱是無解的，很多大學教授都建議國中小科展不要再做河內塔了。而且 Ben Houston & Hassan Masum 在 2004 年發表”Explorations in 4-peg Tower of Hanoi”這篇論文[2]，他們認為四根柱以上的河內塔是百年來無解的。因此，我們研究目的非常清楚明確，就是要解開這百年來的謎團，推導出簡單好用的多根柱公式。

## 三、研究方法與架構

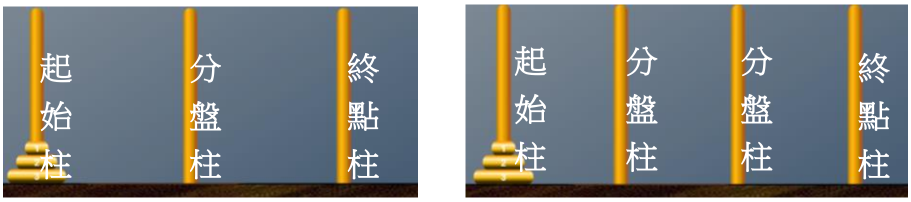
河內塔基本架構是有三根柱子，起始柱子上有大小不同的盤子。遊戲規定一次只能拿起一個盤子，而且小盤一定要放在大盤上。遊戲的最終目標是要把所有的圓盤，都移到最後一根的終點柱上。我們先找出三根柱的走法與規律，之後再找出四根柱，五根柱，六根柱，多根柱的規律。研究架構如下：




（圖一）：研究架構圖（資料來源：本小組自行繪製）

[1]《猩球崛起》是 1968 年的美國科幻片《人猿星球》系列的重拍版，2001 年的《決戰猩球》也是《人猿星球》的重拍版。〈註六〉

[2]〈Explorations in 4-peg Tower of Hanoi〉，Ben Houston & Hassan Masum，2004。〈註五〉




（圖二）三根柱及四根柱每根柱的名稱說明（來源：本小組網路螢幕複製編輯[3]）

## 貳●正文

### 一、三根柱的規律

我們發現要完成河內塔的遊戲，有其規律性。例如要完成5盤的遊戲，必需先在分盤柱上完成4盤，要完成4盤，需先完成3盤，要完成2盤，需先完成1盤。當底盤移到終點柱之後，再重複上述的步驟一次。因此，5盤最少步數是由4盤最少步數乘2再加1；4盤最少步數是3盤最少步數乘2再加1，3盤最少步數是2盤步數乘2再加1，依此類推。 如圖三所示。


（圖三）三根柱3盤的移動規律，需2*3+1=7步

（表一）河內塔三根柱的規律（來源：本小組整理）

| 三根柱盤數 ***m*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 最少步數 $\boldsymbol{S_3(m)}$ | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | $2^m-1$ |
| 規律性 1 | 1 | 2*1+1 | 2*3+1 | 2*7+1 | 2*15+1 | 2* $S_3(m\text{-}1)$+1 |
| 步 數 差<br>$\boldsymbol{J_3(m)=S_3(m)-S_3(m-1)}$ | 1<br>（$2^0$） | 2<br>（$2^1$） | 4<br>（$2^2$） | 8<br>（$2^3$） | 16<br>（$2^4$） | $2^{m\text{-}1}$ |
| 規律性 2 | 1 | 1+2 | 1+2+4 | 1+2+4+8 | 1+2+4+8+16 | $\sum_{x=1}^{m} J_3(x)$ |

由上表可知，三根柱$m$盤的最少步數表示為$\boldsymbol{S_3(m)}$，而$n$根柱$m$盤的最少步數表示為$\boldsymbol{S_n(m)}$。而大家熟知的河內塔三根柱 $m$ 盤的最少步數公式是 $2^m-1$。我們發現了兩個重要的規律，這兩個規律是我們要推導出四根柱、五根柱及多根柱最少步數的關鍵。

規律1：是利用前盤（$m-1$盤）最少步數乘2再加1，即：$S_n(m)=2*S_n(m-1)+1$，就可算出$n$根柱$m$盤的最少步數 $\boldsymbol{S_n}(m)$。

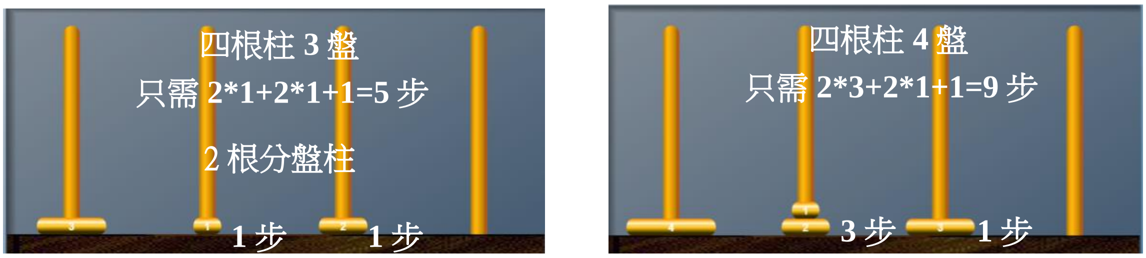
規律2：是用所有步數差$\boldsymbol{J_n(m)}$之和，即：$\sum_{x=1}^{m} J_n(x)$，即可算出$n$根柱$m$盤的最少步數。

[3] 河內之塔網路遊戲，http://home.educities.edu.tw/oddest/math181.htm 〈註七〉

我們發現三根柱的步數差恰好是2的次方數遞增的規律，而且各有1個。基於（規律2）步數差重要規律，我們定義$n$根柱$2^x$步數差的個數為 $D_n(2^x)$。對應三根柱而言，$2^x$步數差的個數為：$D_3(2)=D_3(4)=D_3(8)=D_3(16)=D_3(2^x)=1$

二、四根柱的規律及分盤法

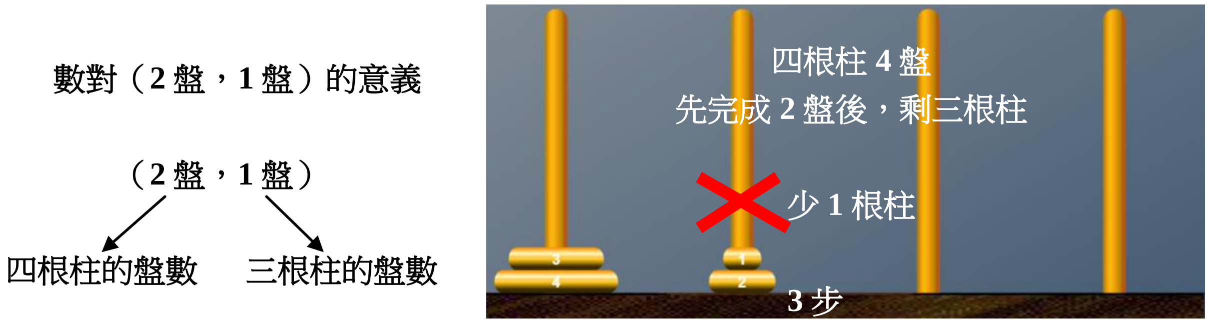
四根柱的河內塔也有其規律性，我們發現最少的步數有明顯的減少，原因為多一根柱，就可以將圓盤先分配在2根分盤柱上，不同於三根柱只能將圓盤分在1根分盤柱上。例如要完成3盤的遊戲，就不需要先完成2盤，可以先將2盤分成1盤和1盤，寫成數對（1盤，1盤）。因為1盤只需1步，所以四根柱的3盤只需$S_4(3)$=2*1+2*1+1=5步（規律1）即可完成。同理，要完成4盤的遊戲，可以先將3盤分成2盤和1盤，寫成數對（2盤，1盤）。因為四根柱的2盤需3步，1盤只需1步，最少步數為$S_4(4)$ =2*3+2*1+1=9步（規律1）。




（圖四）四根柱有2根分盤柱，可減少很多步數

而5盤的遊戲，就不需先完成4盤，可以先將4盤分成3盤和1盤，寫成數對（3盤，1盤）。因為四根柱的3盤需5步，1盤只需1步，所以最少步數為$S_4(5)$ =2*5+2*1+1=10+2+1=13步（規律1），增加的盤數依此類推。

我們發現分盤方式也有其規律，能減少很多步數的試驗。就數對（2盤，1盤）的敘述而言，前面的2盤是對應於四根柱的最少步數，而後面的1盤是對應於三根柱的最少步數。因為先完成2盤之後，就少一根柱可分盤，而後面的1盤等同於三根柱的步數。圖示如下：




（圖五）四根柱分盤的數對意義說明

由上可知，只要依據上列的分盤「敘述」，我們就可以快速的找出最少步數的分盤規律，可以大量減少不同分盤方式的步數試驗。我們試著將四根柱1~10盤用上述的分盤「敘述」找出各盤所對應的最少步數，結果發現了一個簡單易懂的分盤規則，說明於表二。

（表二）四根柱1~10盤的分盤規律（有2根分盤柱，所以會有2個2步差）

| 四根柱盤數 ***m*** | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | （0 盤，0 盤） | （1 盤，0 盤） | （1 盤，1 盤） |
| 分盤說明 | 不用分盤 | 只能先分 1 盤 | 各分 1 盤步數最少 |
| 規律 1 | 2*0+1 | 2*1+1 | 2*1+2*1+1 |
| 最少步數 $S_4(m)$ | 1 | 3 | 5 |
| 步數差 $J_4(m)$ | 1 | 2 | 2 |

| 四根柱盤數 ***m*** | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | （2 盤，1 盤） | （3 盤，1 盤） | （3 盤，2 盤） 在三根柱增加盤數 |
| 分盤說明 | 先從四根柱增盤 | 先從四根柱增盤 | 四根柱的 3 盤增為 4 盤時步數差為 4<br>三根柱的 1 盤增為 2 盤時步數差為 2 |
| 規律 1 | 2*3+2*1+1 | 2*5+2*1+1 | 2*5+2*3+1 |
| 最少步數 $S_4(m)$ | 9 | 13 | 17 |
| 步數差 $J_4(m)$ | 4 | 4 | 4 |

| 四根柱盤數 ***m*** | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | （4 盤，2 盤） | （5 盤，2 盤） | （6 盤，2 盤） | （6 盤，3 盤） |
| 規律 1 | 9 步<br>2*9+2*3+1 | 13 步<br>2*13+2*3+1 | 17 步<br>2*17+2*3+1 | 7 步<br>2*17+2*7+1 |
| 分盤說明 | 2 步差用完<br>換 $J_4(m)$=4<br>先從四根柱增盤 | 先從四根柱增盤 | 先從四根柱增盤 | $J_4(m)$=4 用完<br>換 $J_3(m)$=4<br>最後在三根柱增盤 |
| 最少步數 $S_4(m)$ | 25 | 33 | 41 | 49 |
| 步數差 $J_4(m)$ | 8 | 8 | 8 | 8 |

我們依據這樣的推導規律，只要依序填入前盤的最少步數，就能將四根柱64盤每盤的最少步數整理出來。其中，我們將數對（*r* 盤，*s* 盤），簡化為（*r*，*s*）。由規律2可知，四根柱10盤的步數也等於所有步數差之和=1*1+2*2+4*3+8*4=49步。

三、五根柱的規律及最佳分盤法：

五根柱的河內塔也和四根柱一樣有其規律性，因為五根柱有3根分盤柱，需要的步數減少更多。依據（圖五）四根柱分盤的數對說明方式，也同樣可對應到五根柱。圖示如下：

**數對（4 盤，1 盤，1 盤）的意義**

**（4 盤，1 盤，1 盤）**

**五根柱的盤數**　　**三根柱的盤數**

**四根柱的盤數**


（圖六）五根柱7盤的分盤數對意義說明

因此，數對（4盤，1盤，1盤）的「敘述」為：五根柱的4盤與四根柱的1盤及三根柱的1盤。最小步數$S_5(7)$ =2*7+2*1+2*1+1=19步。依據上述分盤規律，及四根柱分盤的經驗，

簡單易懂的分盤規則，說明於表三。我們將五根柱1~12盤的步數整理如下，其中我們將數對（*q* 盤，*r* 盤，*s*盤），簡化為 （*q*，*r*，*s*）。

（表三）五根柱1~12盤的分盤規律（有3根分盤柱，所以會有3個2步差）

| 五根柱盤數 ***m*** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | (0 盤，0 盤，0 盤) | (1 盤，0 盤，0 盤) | (1 盤，1 盤，0 盤) | (1 盤，1 盤，1 盤) |
| 規律 1 | 2*0+1 | 2*1+1 | 2*1+2*1+1 | 2*1+2*1+2*1+1 |
| 最少步數 $S_5(m)$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 步數差 $J_5(m)$ | 1 | 2 | 2 | 2 |

| 五根柱盤數 ***m*** | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | （2，1，1） | （3，1，1） | （4，1，1） | （4，2，1） |
| 規律 1 | ↓3 步<br>2*3+2*1+2*1+1 | ↓5 步<br>2*5+2*1+2*1+1 | ↓7 步<br>2*7+2*1+2*1+1 | ↓ 3 步<br>2*7+2*3+2*1+1 |
| 分盤說明 | $D_5(2)$=3（3 個）<br>先從五根柱增盤 | 先從五根柱增盤 | 先從五根柱增盤 | $D_4(2)$=2（2 個）<br>接著從四根柱增盤 |
| 最少步數 $S_5(m)$ | 11 | 15 | 19 | 23 |
| 步數差 $J_5(m)$ | 4 | 4 | 4 | 4 |

| 五根柱盤數 ***m*** | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | （4，3，1） | （4，3，2） | （5，3，2） | （6，3，2） |
| 規律 1 | ↓5 步<br>2*7+2*5+2*1+1 | ↓ 3 步<br>2*7+2*5+2*3+1 | ↓11 步<br>2*11+2*5+2*3+1 | ↓15 步<br>2*15+2*5+2*3+1 |
| 分盤說明 | 從四根柱增盤 | $D_3(2)$=1（1 個）<br>最後從三根柱增盤 | $J_5(m)$=2 用完<br>換 $J_5(m)$=4 | $D_5(4)$=6（6 個）<br>可用到 11~16 盤 |
| 最少步數 $S_5(m)$ | 27 | 31 | 39 | 47 |
| 步數差 $J_5(m)$ | 4 | 4 | 8 | 8 |

我們依據這樣的推導規律，將五根柱64盤每盤的最少步數整理出來。由規律2可知，五根柱12盤的步數也等於所有步數差之和=1*1+2*3+4*6+8*2=47步。

四、六根柱的規律及最佳分盤法：

六根柱的河內塔也和五根柱一樣有其規律性，可以將圓盤分配在4根柱上。依據（圖六）五根柱分盤的數對說明方式，也同樣可對應到六根柱。圖示如下：

**數對（5 盤,1 盤,1 盤,1 盤）的意義**

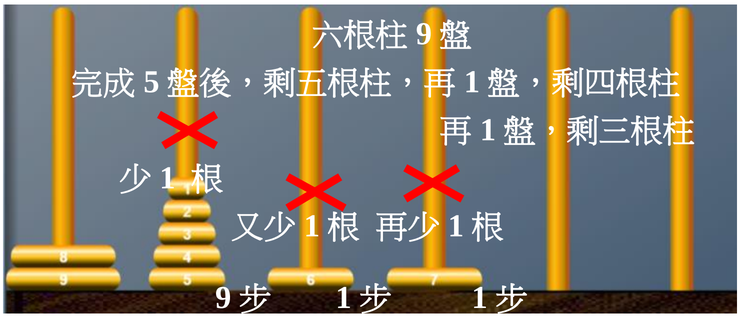
**（5 盤， 1 盤， 1 盤， 1 盤）**

**六根柱的盤數**

**五根柱的盤數**

**四根柱的盤數**

**三根柱的盤數**




（圖七）六根柱分盤的數對意義說明

我們將六根柱1~15盤的步數整理如表四，其中我們將數對簡化為 （*p*，*q*，*r*，*s*）。

（表四）六根柱1~5盤的分盤規律（有4根分盤柱，所以會有4個2步差）

| 六根柱盤數 *m* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | | (1,0,0,0) | (1,1,0,0) | (1,1,1,0) | (1,1,1,1) |
| 規律 1 | | 2*1+1 | 2*1+2*1+1 | 2*1+2*1+2*1+1 | 2*1+2*1+2*1+2*1+1 |
| 最少步數 $S_6(m)$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 步數差 $J_6(m)$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| 六根柱盤數 *m* | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | (2,1,1,1) | (3,1,1,1) | (4,1,1,1) | (5,1,1,1) |
| 規律 1 | 2*3+2*1+2*1+2*1+1 | 2*5+2*1+2*1+2*1+1 | 2*7+2*1+2*1+2*1+1 | 2*9+2*1+2*1+2*1+1 |
| 最少步數 $S_6(m)$ | 13 | 17 | 21 | 25 |
| 步數差 $J_6(m)$ | 4 | 4 | 4 | 4 |

| 六根柱盤數 *m* | **10** | **11** | **12** |
|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | (5,**2**,1,1) | (5,**3**,1,1) | (5,**4**,1,1) |
| 規律 1 | 2*9+2*3+2*1+2*1+1 | 2*9+2*5+2*1+2*1+1 | 2*9+2*7+2*1+2*1+1 |
| 最少步數 $S_6(m)$ | 29 | 33 | 37 |
| 步數差 $J_6(m)$ | 4 | 4 | 4 |

| 六根柱盤數 *m* | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|
| 盤數最佳分法 | (5,4,**2**,1) | (5,4,**3**,1) | (5,4,3,**2**) |
| 規律 1 | 2*9+2*7+2*3+2*1+1 | 2*9+2*7+2*5+2*1+1 | 2*9+2*7+2*5+2*3+1 |
| 最少步數 $S_6(m)$ | 41 | 45 | 49 |
| 步數差 $J_6(m)$ | 4 | 4 | 4 |

我們依據這樣的推導規律，將六根柱64盤每盤的最少步數整理出來。由規律2可知，六根柱15盤的步數也等於所有步數差之和=1*1+2*4+4*10=49步。

## 參●結論

### 一、多根柱步數差的規律

我們找出了多根柱的規律，發現每多一盤的步數差，有 2 的次方的規律。我們將 2 的次方步數差個數分析如下，發現四根柱的 4 步差個數等於三~四根柱的 2 步差個數之和(紅色框)。

| 步數差數(個) / 柱數 | 1步差個數 | 2步差個數 | 4步差個數 | 8步差個數 | 16步差個數 | 32步差個數 | 64步差個數 | 128步差個數 | 256步差個數 | 512步差個數 | 1024步差個數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 三根柱 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 四根柱 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 五根柱 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | | | | |
| 六根柱 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | | | | |

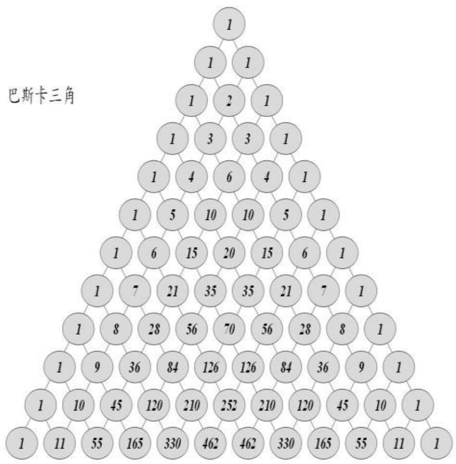
依此類推，五根柱的 8 步差個數等於三~五根柱的 4 步差個數之和（藍色框），我們發現了步數差個數的規則。例如：$D_6(16)=D_3(8)+D_4(8)+D_5(8)+D_6(8)=1+4+10+20=35$ 個，如上圖綠色框所示。算式表示為：$\boldsymbol{D_n}(2^x)=\sum_{y=3}^{n} D_y(2^{x-1})$。依據上述規則，我們將上表擴充到十根柱，製成表五。因此，只要依據規律 2 的方法，將 $m$ 盤所有（2 的次方步數差）*（$2^x$ 的步數差個數）相加起來，就能算出多根柱最少步數的公式。

## 二、巴斯卡三角形

我們發現，不同柱數的步數差$\boldsymbol{D_n}(2^x)$個數規律，讓（表五）形成了一個巴斯卡三角形[4]。所以我們只要把這個三角形所構成的數值用公式表示出來，就可以解開三根柱以上的公式解。

（表五）河內塔多根柱步數差個數的規律

| 步數差數(個) \ 柱數 | 1步差個數 | 2步差個數 | 4步差個數 | 8步差個數 | 16步差個數 | 32步差個數 | 64步差個數 | 128步差個數 | 256步差個數 | 512步差個數 | 1024步差個數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 三根柱 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 四根柱 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 五根柱 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 |
| 六根柱 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | 286 |
| 七根柱 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 715 | 1001 |
| 八根柱 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 2002 | 3003 |
| 九根柱 | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | 3003 | 5005 | 8008 |
| 十根柱 | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | 6435 | 11440 | 19448 |




（圖八）表五構成了一個巴斯卡三角形

我們搜集相關資料，找出了用組合數來表示步數差個數的方法。解題方法說明如下：對於 $n$ 根柱而言，我們設定一個 $a$ 值，做為組合數的第一個參數，且令 $a=n-3$。設定另一個 2 的次方數 $x$ 值，做為組合數的第二個參數。經過我們的演算，所有巴斯卡三角形的數值可表示的組合數為：$\boldsymbol{D_n}(2^x)=C_a^{a+x}=\dfrac{(a+x)!}{a!\,x!}$ （其中$x$！中文敘述為 $x$ 階層，演算法則為：$3!=3*2*1$，$5!=5*4*3*2*1$，但組合數規定$0!=1$，所以$C_a^a=1$，$C_0^a=1$）。

例如：六根柱32步差的個數，即$D_6(32)=D_6(2^5)$，可用組合數表示為：$C_3^8$（$a=6-3=3$；$2^x=32$，$x=5$），即$D_6(32)=C_3^8=\dfrac{8!}{3!5!}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ 。同理，八根柱64步差的個數，即$D_8(64)=D_8(2^6)=C_5^{11}=\dfrac{11!}{5!6!}=\dfrac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$ 。

依據上述的定義，我們將（表五）的所有數值，用組合數表示成（表六）。

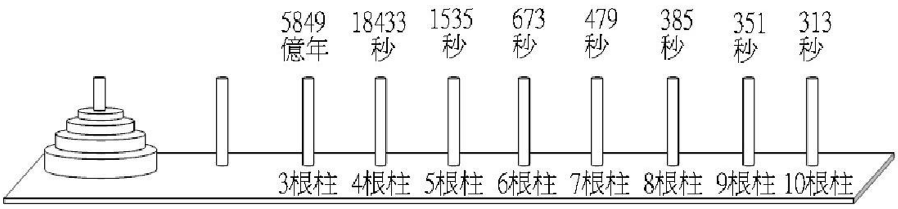
---

[4] 巴斯卡三角形的公式解，http://jishus.org/?p=598 〈註八〉

（表六）河內塔巴斯卡三角形的數值表示法

| 步數差數(個) ＼ 柱　數 | 1 步差個數 $2^0$ | 2 步差個數 $2^1$ | 4 步差個數 $2^2$ | 8 步差個數 $2^3$ | 16 步差個數 $2^4$ | 32 步差個數 $2^5$ | 64 步差個數 $2^6$ | 128 步差個數 $2^7$ | 256 步差個數 $2^8$ | 512 步差個數 $2^9$ | 1024 步差個數 $2^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ 值 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 三根柱 $a$=0 | $C_0^0$ 1 | $C_0^1$ 1 | $C_0^2$ 1 | $C_0^3$ 1 | $C_0^4$ 1 | $C_0^5$ 1 | $C_0^6$ 1 | $C_0^7$ 1 | $C_0^8$ 1 | $C_0^9$ 1 | $C_0^{10}$ 1 |
| 四根柱 $a$=1 | $C_1^1$ 1 | $C_1^2$ 2 | $C_1^3$ 3 | $C_1^4$ 4 | $C_1^5$ 5 | $C_1^6$ 6 | $C_1^7$ 7 | $C_1^8$ 8 | $C_1^9$ 9 | $C_1^{10}$ 10 | $C_1^{11}$ 11 |
| 五根柱 $a$=2 | $C_2^2$ 1 | $C_2^3$ 3 | $C_2^4$ 6 | $C_2^5$ 10 | $C_2^6$ 15 | $C_2^7$ 21 | $C_2^8$ 28 | $C_2^9$ 36 | $C_2^{10}$ 45 | $C_2^{11}$ 55 | $C_2^{12}$ 66 |
| 六根柱 $a$=3 | $C_3^3$ 1 | $C_3^4$ 4 | $C_3^5$ 10 | $C_3^6$ 20 | $C_3^7$ 35 | $C_3^8$ 56 | $C_3^9$ 84 | $C_3^{10}$ 120 | $C_3^{11}$ 165 | $C_3^{12}$ 220 | $C_3^{13}$ 286 |
| 七根柱 $a$=4 | $C_4^4$ 1 | $C_4^5$ 5 | $C_4^6$ 15 | $C_4^7$ 35 | $C_4^8$ 70 | $C_4^9$ 126 | $C_4^{10}$ 210 | $C_4^{11}$ 330 | $C_4^{12}$ 495 | $C_4^{13}$ 715 | $C_4^{14}$ 1001 |
| 八根柱 $a$=5 | $C_5^5$ 1 | $C_5^6$ 6 | $C_5^7$ 21 | $C_5^8$ 56 | $C_5^9$ 126 | $C_5^{10}$ 252 | $C_5^{11}$ 462 | $C_5^{12}$ 792 | $C_5^{13}$ 1287 | $C_5^{14}$ 2002 | $C_5^{15}$ 3003 |
| 九根柱 $a$=6 | $C_6^6$ 1 | $C_6^7$ 7 | $C_6^8$ 28 | $C_6^9$ 84 | $C_6^{10}$ 210 | $C_6^{11}$ 462 | $C_6^{12}$ 924 | $C_6^{13}$ 1716 | $C_6^{14}$ 3003 | $C_6^{15}$ 5005 | $C_6^{16}$ 8008 |
| 十根柱 $a$=7 | $C_7^7$ 1 | $C_7^8$ 8 | $C_7^9$ 36 | $C_7^{10}$ 120 | $C_7^{11}$ 330 | $C_7^{12}$ 792 | $C_7^{13}$ 1716 | $C_7^{14}$ 3432 | $C_7^{15}$ 6435 | $C_7^{16}$ 11440 | $C_7^{17}$ 19448 |

上表說明如下，以十根柱為例，1 步差有 1 個，2 步差有 8 個，4 步差有 36 個，即 $D_{10}(4)=36=C_7^9$；8 步差有 120 個，即 $D_{10}(8)=120=C_7^{10}$，，依此類推。因此，十根柱 64 盤所需的時間$=2^0*C_7^7+2^1*C_7^8+2^2*C_7^9+2^3*19=313$ 秒（因為 1+8+36+19=64），合計 5 分 13 秒。我們將三根柱至十根柱 64 盤，所需的時間圖示如下，我們的發現比國內相關研究更容易上手[5]：




（圖九）三根柱至十根柱64盤的最少步數

三、多根柱公式（$n \geq 3$）

接著，我們將多根柱的公式推導如下：若有$n$根柱（$n \geq 3$），$m$個圓盤，所求的最少步數為 $S_n(m)$。定義：$a=n-3$，$x$為2的次方值，我們需要先算出盤數 $m$ 會落在那個 $2^x$ 的步數差中。所以要先求出大於等於盤數$m$的最小 $k$ 值（$k=x$），然後代入 $S_n(m)$ 的通式解。

[5]〈柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係〉，44 屆高中科學展覽，22 頁。〈註二〉〈n 柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找〉，中華民國第 51 屆中小學科學展覽（國中組）。〈註四〉

步驟一：求 $k$值

$k$值公式：$m \le \sum_{x=0}^{k} C_a^{a+x}$，先求大於等於$m$的最小 $k$ 值。即第 $m$ 盤會落在 $2^k$ 步數差中。

步驟二：將 $k$值代入公式解

最少的步數$S_n(m)$等於（每個 $2^x$ 的步數差）*（步數差的個數$C_a^{a+x}$）之和，通式解整理為：

$n$ 柱 $m$ 盤公式：$S_n(m) = \sum_{x=0}^{k} 2^x C_a^{a+x} - 2^k\left(\sum_{x=0}^{k} C_a^{a+x} - m\right)$

（其中$2^k\left(\sum_{x=0}^{k} C_a^{a+x} - m\right)$為超出 $m$ 盤的數值，需要扣除）

例如：10根柱有150盤，先求出 $k$ 值：

步驟一：求$k$值

$150 \le \sum_{x=0}^{x=k} C_7^{7+x}$，150≤1+8+36+120，得$k$ =3，即第150盤落在$2^3$的步數差中。

代入公式：

步驟二：$S_n(m) = \sum_{x=0}^{k} 2^x C_a^{a+x} - 2^k\left(\sum_{x=0}^{k} C_a^{a+x} - m\right)$

$$S_{10}(150) = \sum_{x=0}^{3} 2^x C_7^{7+x} - 2^3\left(\sum_{x=0}^{3} C_7^{7+x} - 150\right)$$

$$=1*1+2*8+4*36+8*120-8*(165-150)$$

$$=1+16+144+960-120=1001\text{步}$$

四、結論與貢獻

二年半前學長姐接觸河內塔的偶然，已找出了一個解題的架構，我們接手之後，也傳承了學長姐的精神，在不斷的努力與推展之下，解開了Ben Houston & Hassan Masum所說的百年歷史謎團，他們認為四根柱以上的河內塔是無解的。將近三年來的用心研究，我們找出了多根柱分盤的規律性，所發現的規律1，是解開河內塔多根柱最少步數的基礎核心，簡單易懂。

河內塔多根柱研究所需面對的最大問題就是分盤方式有太多種，如何找出最佳的分盤法，就是解開多根柱河內塔的關鍵。我們找出了最少「步數差」的依序分盤方式，很容易就建構出了一個巴斯卡三角形數列，利用規律2的想法推導出公式。而 $2^x$ 步數差個數的表示法，$D_n(2^x) = C_a^{a+x}$（$a=n-3$），更是我們解出多根柱公式的創意發想。我們的貢獻整理如下：

(一)最基本的演算法解題：我們用土法鍊鋼的方式，找出了一種四根柱的最佳分盤法，這是推導多根柱最少步數的核心基礎。沒有繁雜的算式推導與演算，只要具備國二所學的數列與級數的觀念就能理解，容易讓初學者實際操作，比國內外相關研究更容易上手。

(二)$n$根柱$m$盤的通式解：我們找出來的是$n$柱$m$盤公式通式解。不同於國內外相關研究，對於不同柱數會有對應的柱數公式。且$n$根柱公式，需先找出 $n-1$根柱的公式。

(三)巴斯卡三角形的應用：三角形內的數列，我們應用的方式不同於其他相關研究的「遞迴」結構，我們改以組合數來表示巴斯卡三角形內的數值。這也是我們的通式解能獨立操作，沒有要算五根柱公式需先算出四根柱公式，四根柱公式需先算出三根柱公式的問題。這也是我們的通式解簡潔明白的原因。

(四)提供多根柱網頁程式：因為我們所推導出的公式簡單好操作，所以很容易用java語法將河內塔多根柱的公式寫成網頁程式，不需遞迴的反覆計算。可提供相關研究者參考！

(五)多根柱通式解：$n\geq3$，先求出$m$盤落在那個$2^x$步數差之$k$值。($n=3$時也可用這公式)

$k$值公式：$m\leq\sum_{x=0}^{k}C_a^{a+x}$（其中$a=n-3$）　通式解：$S_n(m)=\sum_{x=0}^{k}2^xC_a^{a+x}-2^k\left(\sum_{x=0}^{k}C_a^{a+x}-m\right)$

肆●引註資料


一、圖書資料

註一、〈河內塔的起源〉，九章出版社。

註二、〈柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係〉，四十四屆中小學科學展覽（高中組）。

註三、〈n柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找〉，中華民國第51屆中小學科學展覽（國中組）。

註四、〈河內塔多根柱探討〉，103年花蓮縣國中小扶輪盃小論文競賽（國中組自然領域）。

註五、“ Explorations in 4-peg Tower of Hanoi ” ，Ben Houston & Hassan Masu（2004）。

二、網路資料

註六、維基百科—猩球崛起
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%8C%BF%E4%BA%BA%E7%88%AD%E9%9C%B8%E6%88%B0%EF%BC%9A%E7%8C%A9%E5%87%B6%E9%9D%A9%E5%91%BD

註七、河內之塔網路遊戲　http://home.educities.edu.tw/oddest/math181.htm

註八、巴斯卡三角形的公式解　http://jishus.org/?p=598