自然科學類

節能減碳！替垃圾車規劃最短路徑

溫仲儒。宜昌國中。七年 7 班

林鼎浚。宜昌國中。七年 7 班

顏崇祐。宜昌國中。七年 6 班

張瑋庭。宜昌國中。七年 2 班

指導老師：

朱惟庸、吳珮甄

壹、前言

每次看到垃圾車穿梭街頭，同一個路段有時會出現兩次，我們想：有沒有可能，垃圾車每天多重複了一些不需要重複行走的路？如果有，不但是浪費能源，對於辛苦的清潔人員而言，也延長不必要的工作時數。所以我們想要研究，有沒有可能讓垃圾車走的路徑縮短些？所以我們的研究目的，是希望能夠找到方法來縮短垃圾車的行走距離。以下是研究流程圖：

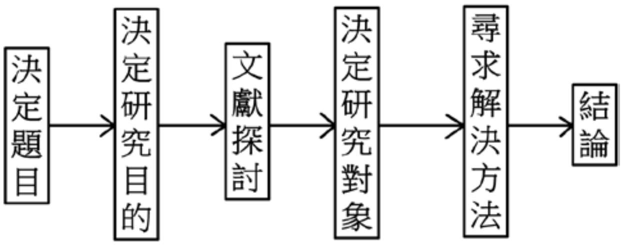


圖 1　研究流程圖
資料來源：研究小組自行繪製

貳、正文

一、　名詞解釋：見右圖 2

(一) 路徑：連接兩端點的線段。

(二) 頂點：連接兩段以上路徑的頂點。

(三) 奇頂點：與頂點連接的路徑有奇數條。

(四) 偶頂點：與頂點連接的路徑有偶數條。

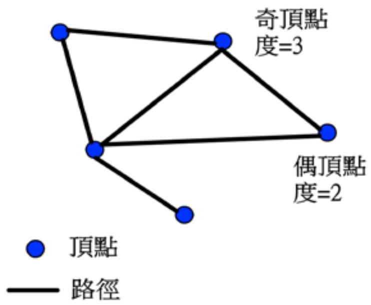


圖 2　路徑圖名詞解釋

二、　文獻探討

(一) 圖的遍歷(一筆畫問題)(岡部恆治與本丸諒，2013)

能不能一筆畫，不重複的走完一張圖上的所有路？從歐拉解決(俄羅斯)柯尼斯堡七橋問題開始。下圖 3 左是柯尼斯堡七橋，中間是示意圖，右邊是簡化圖。

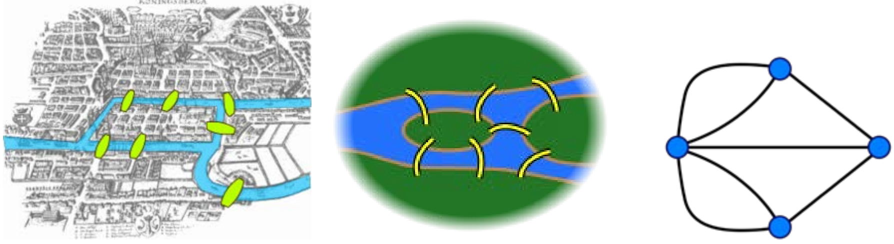


圖 3 柯尼斯堡七橋圖
資料來源：維基百科(2019)

歐拉的結論：要一筆畫畫完七座橋不可能。因為要畫完路徑，每個點都要一進一出，所以必須為偶頂點，而且隨便選一個頂點出發，都可完成。但如果圖中有奇頂點，是否表示一定不能一筆畫完成？不一定。如果這個圖剛好有兩個奇頂點，那麼將其中一個奇頂點當成出發點，最後一定會把圖全部畫完，並停在第二個奇頂點，因此要一筆畫畫出圖且每條路不重複，只能存在 0 或 2 個奇頂點，這樣的圖形稱為歐拉迴路(或歐拉路徑)。而七橋問題圖的 4 個頂點都是奇頂點，所以不能用一筆畫走完。

(二) 無向圖的遍歷解決法—郵遞員問題(石田保輝, 宮崎修一，2017)

1. 若圖中有歐拉迴路，則任何一個歐拉迴路即為此問題的解。

2. 若圖中不存在歐拉迴路，其中必存在有奇數個邊的端點，且這類的端點一定大於等於 2 個。因此有些邊需要再重覆一次，使奇數邊的端點變為偶數邊的端點。

3. 以下圖為例：某鎮有 14 條路及編號 1~9 的 9 個路口(邊上數字為成本)，想找最短路徑且每個邊須至少通過一次。

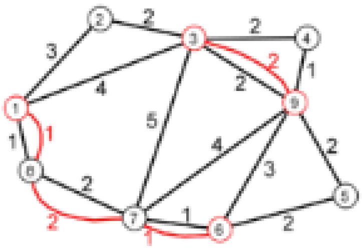


圖 4　郵遞員問題示意圖
資料來源：維基百科(2019)

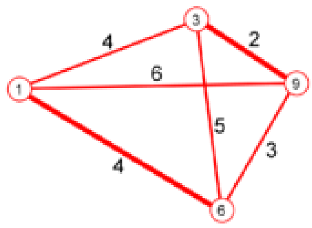


圖 5　郵遞員問題圖(二)
資料來源：維基百科(2019)

(1) 因為 1、3、6、9 為奇點因此這個圖不存在歐拉迴路。因此須讓這些點的其中一邊各重複走一次，使其如同偶點一樣有偶數邊通過。

(2) 又因為重複走一條邊會使其兩端點各增加一條路徑，因此將奇點兩兩配對，例如：1-9、3-6 邊重複，如此就能使圖變成歐拉路徑(每個點皆為偶點，必能一筆畫完成)

(3) 配對方法為將奇點以及路徑(點跟點之間須選用最小成本的路徑)列出，計算每種配對的成本總和，並挑最小成本的使用。例如 1—9 點，如果要連接，可能是 1→3→9，路徑成本為 6，或是 1→6→9，路徑成本為 7，所以 1→9 選擇成本最小的 6，也就是 1→3→9 路徑完成。

(4) 當所有配對完成後，最後任選一個歐拉路徑即為此問題的解答，如以下的端點順序 (1,2,3,4,9,3,1,8,7,3,9,7,6,9,5,6,7,8,1) 即為一解。圖 6 中紅色的部份即為重複的邊。

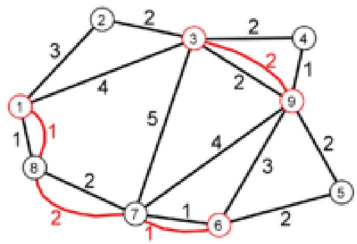


圖 6　郵遞員問題圖(三)
資料來源：維基百科(2019)

(三) 研究對象

以花蓮吉安鄉，車號 946-TH 在宜昌村的晚間巡迴路線為研究對象。巡迴圖如下：

圖 7　吉安鄉宜昌村垃圾清運圖
資料來源：吉安鄉公所清潔隊(2019)網頁，http://clean.ji-an.gov.tw/Introduction/Removal/

(四) 尋求解決方法

1.　簡化圖形：將 946-TH，19:15 開始的路線整理如下圖 8(單位：公里)，並且歸納問題。

圖 8　簡化吉安鄉宜昌村垃圾清運圖
資料來源：研究小組自行繪製

(1) 原本經過頂點依序為：V1→V2→V3→V4→V5→V6→V7→V8→V2→V3→V7→V6→V4→V3→V2→V8→V9→V10→V11→V9→V10→V12→V13→V14→V15→V14→V16→V17→V16→V10→V12→V18→V19→V20→V19→V21→V22→V23→V13→V23→V21→V19→V18。

(2) 計算後，原本總路徑長為 6.16 公里。

(3) 改良條件限制有：(1)V1 進，V18 出。(2)原本的路徑必須經過。

(4) 因為垃圾車走的路都不會太小，所以每一條路口都能迴轉，這是一個無向圖。

(5) 每一條路都要經過，所以這是一筆畫問題。

(6) 一筆畫問題並不考慮進出點的限制，但是本問題的每個迴路畫完後，要考慮進入點到出口點的最短路徑，所以這應當也是最短路徑問題。

2. 圖形分類。拆解路線成數個封閉迴路，在每個封閉迴路完成最短路徑一筆畫。封閉迴路有圖 9 中三類：

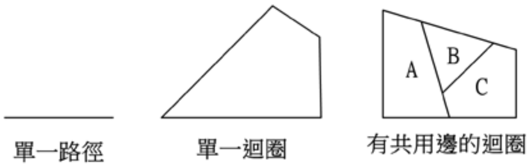


圖 9 迴圈類別

(1) 單一路徑：無須考慮一筆畫問題。如果路徑的其中一端是死路，又不是進出點的話，這種路徑一進一出需要把長度乘 2。

(2) 單一迴圈：無須考慮一筆畫問題，只要考慮入口點到出口點的最短路徑問題。

(3) 有共用邊的迴圈：要考慮一筆畫問題以及進入點與出口點的最短路徑問題。

3. 這是無向圖的一筆畫問題，已經有郵遞員問題的解法，可以把圖所有路徑走完。

4. 因為一筆畫問題畫完會回到起點，所以要考慮入口點到出口點的最短路徑問題。舉例如下：

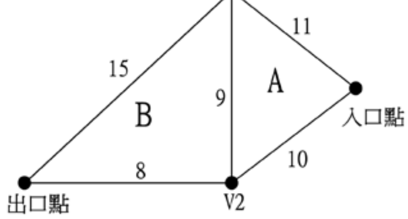


圖 10 一筆畫之最短路徑

圖 10 用郵遞員問題解法計算後，結果是重複 V1⟷V2 路徑就能走完全部且成本最小的路徑，成本為 10+8+15+9+9+11=62。但是若規定結束的地方一定要是出口點的話，還要再走入口→V2→出口點才能出去，故總路徑成本為 10+8+15+9+9+11+10+8 =80；但是若是選擇重複 V1⟷入口點與 V2→出口點，此時的總路徑成本為 10+9+11+11+15+8+8 =72<80，由上可知，因為進出口限制，郵遞員問題解法未必能解

決我們的研究問題。

5. 結合郵遞員問題與歐拉迴路的想法：

因為歐拉迴路，容許兩個奇數點在圖中，此時要一筆畫完成，這兩個奇數點必定是起始點和結束點。利用這個想法，結合郵遞員問題，對於進出點，我們這樣處理：

(1) 如果進出點是本身是奇數點，不列入郵遞員問題的路徑討論頂點，也就是說，保持原狀，不加重複的路徑。

(2) 如果進入點或出口點本身是偶數點，以郵遞員問題加入重複路徑時，這個點也要列入討論。也就是說，一定要增加路徑變成奇數點。

(五) 解決方法一

1. 簡化圖形如下：

2. 圖形特徵類別

(1) 單一路徑：V1→V2、V8→V9、V14→V15、V16→V17、V19→V20。其中 V14→V15、V16→V17 和 V19→V20 是死路。

(2) 沒有和其它迴路共用相鄰邊的迴路：D 迴路。

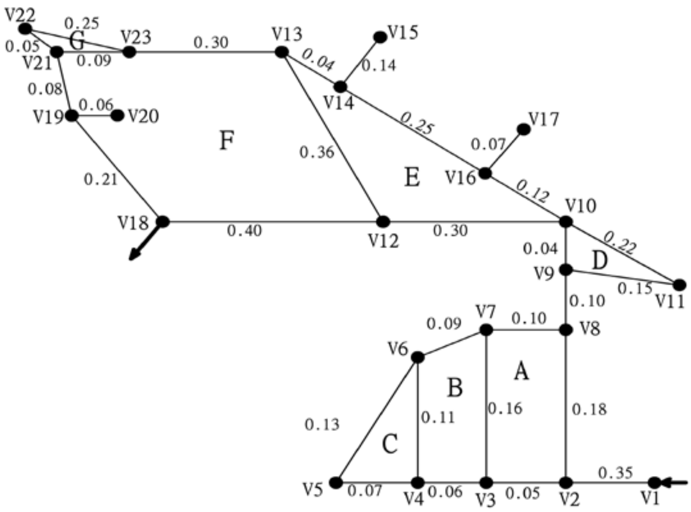


圖 11　宜昌村垃圾車路徑距離圖

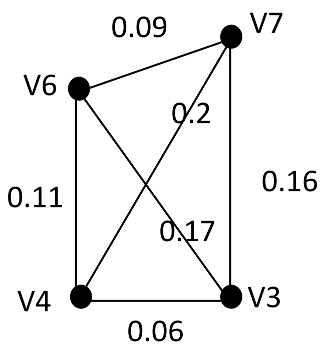
(3) 和其它迴路有共用邊：A 迴路、B 迴路、C 迴路、E 迴路、F 迴路、G 迴路。把有共用邊的迴路合併在一起後，合成(A、B、C)迴路與(E、F、G)迴路。

演算法

3.

(1) 以 ABC 迴圈為例：

I. 奇點為 V3、V4、V6、V7，偶點為 V2、V5、V8，將奇點及之間最小成本路徑列出如右圖：



II. V4-V7 找最低成本的路徑為 V4-V6-V7=0.11+0.9=0.2，V3-V6 為 V3-V4-V6=0.06+0.11=0.17。

III. 所有配對： V3-V4、V6-V7=0.06+0.09=0.15 / V3-V6、V4-V7=0.17+0.2=0.37 / V3-V7、V4-V6=0.16+0.11=0.27 =>選用成本最低的 V3-V4、V6-V7，代表這兩條路會重複走。

IV. 找解：V2-V3-V4-V3-V7-V6-V4-V5-V6-V7-V8-V2，總成本為原所有路徑加總+重複成本=0.95+0.15=1.1。

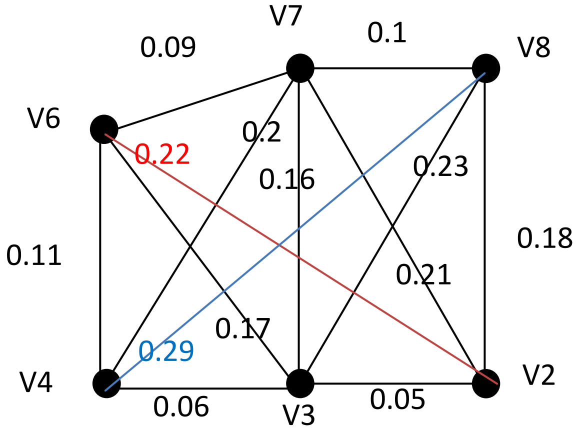
V. 但必須從 V8 出去才能連接到其它迴圈，因此再增加 V2-V8=>1.1+0.18=1.28。

VI. 將奇點 V3 、V4 、V6 、V7 變成偶點 (其中一邊重複走次)以及 V2 、V8 變成奇點 (其中一邊重複走次)=> 將此 6 點兩兩配對，找出最低成本路徑。

4. 實際計算如下：

(1) 列出 6 點及其之間的最小路徑圖：

V2-V3-V4-V6=0.22
V2-V3-V7=0.21
V3-V4-V6=0.17
V3-V2-V8=0.23
V4-V6-V7=0.2
V4-V3-V2-V8=0.29



配對	成本
V2-V3、V4-V6、V7-V8	0.26
V2-V3、V4-V7、V6-V8	0.44
V2-V3、V4-V8、V6-V7	0.43
V2-V4、V3-V6、V7-V8	0.38
V2-V4、V3-V7、V6-V8	0.46
V2-V4、V3-V8、V6-V7	0.43
V2-V6、V3-V4、V7-V8	0.38
V2-V6、V3-V7、V4-V8	0.67
V2-V6、V3-V8、V4-V7	0.65
V2-V7、V3-V4、V6-V8	0.46
V2-V7、V3-V6、V4-V8	0.67
V2-V7、V3-V8、V4-V6	0.55
V2-V8、V3-V4、V6-V7	0.33
V2-V8、V3-V6、V4-V7	0.55
V2-V8、V3-V7、V4-V6	0.45

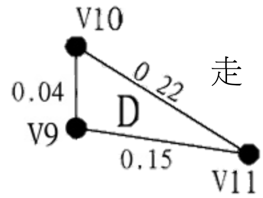
可看出 V2-V3、V4-V6、V7-V8 為最小成本，因此此三段路程需重複

解：V2-V8-V7-V3-V2-V3-V4-V6-V5-V4-V6-V7-V8=>總成本為原所有路徑加總+重複成本=0.95+0.26=1.21<1.28

(2) 繼續計算 D 迴路(V9 始 V10 末)：

奇點無，偶點為 V9、V10、V11

因為要將 D 迴圈中的 V9、V10(始終點)變成奇點(其中一邊重複走一次)=>形成有兩個奇點的歐拉路徑=V9-V10 需重複



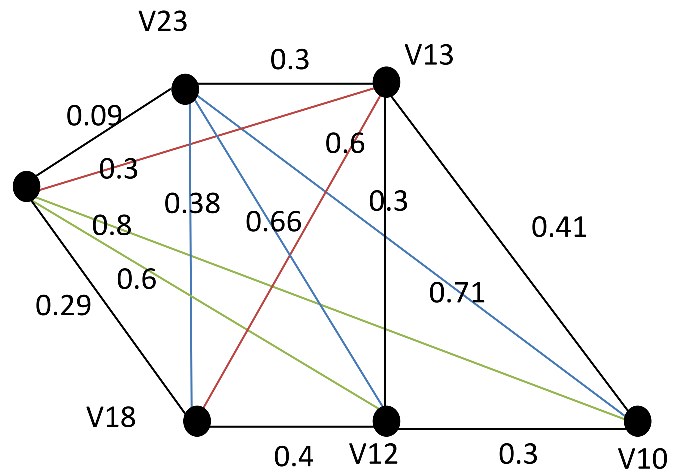
解：V9-V11-V10-V9-V10=0.45

(3) 繼續計算 EFG 迴圈(V10 始 V18 末)：

奇點為 V12、V13、V21、V23，偶點為 V10、V14、V15、V16、V17、V18、V19、V20、V22，(V14-V15、V16-V17、V19-V20 路線必定進出各一次，故當作偶點) ，因為要將 EFG 迴圈中的奇點 V12、V13、V21、V23 變成偶點(其中一邊重複走一次)，將 V10、V18(始終點)變成奇點(其中一邊重複走一次)=>形成有兩個奇點的歐拉路徑=>將此 6 點兩兩配對，找出最低成本路徑。

(4) 列出 6 點及其之間的最小路徑圖：

V10-V12-V18=0.7
V18-V19-V21=0.29
V21-V23-V13=0.39
V21-V23-V13-V14-V16-V10=0.8
V21-V19-V18-V12=0.69
V23-V21-V19-V18=0.38
V23-V13-V12=0.66
V23-V13-V14-V16-V10=0.71
V13-V23-V21-V19-V18=0.68



配對	成本
V10-V12、V13-V18、V21-V23	1.07
V10-V12、V13-V21、V18-V23	1.07
V10-V12、V13-V23、V18-V21	0.89
V10-V13、V12-V18、V21-V23	0.9
V10-V13、V12-V21、V18-V23	1.48
V10-V13、V12-V23、V18-V21	1.36
V10-V18、V12-V13、V21-V23	1.15
V10-V18、V12-V21、V13-V23	1.69
V10-V18、V12-V23、V13-V21	1.75
V10-V21、V12-V13、V18-V23	1.54
V10-V21、V12-V18、V13-V23	1.5
V10-V21、V12-V23、V13-V18	2.14
V10-V23、V12-V13、V18-V21	1.36
V10-V23、V12-V18、V13-V21	1.5
V10-V23、V12-V21、V13-V18	2.08

可看出 V10-V12、V13-V23、V18-V21 為最小成本，因此此三段路程需重複解：

V10-V16-V17-V16-V14-V15-V14-V13-V12-V18-V19-V20-V19-V21-V22-V23—V13-V23-V21-V19-V18=>總成本為原所有路徑加總+重複成本(V14-V15 這類路徑+V10-V12、V13-V23、V18 -V21)=2.72+(0.27+0.89)=3.88

(5) 因此總路徑為 V1-V2+ABC 迴圈+V8-V9+D 迴圈+EFG 迴圈 =0.35+1.21+0.1+0.45+3.88 =5.99(Km)<6.16(Km)

(六) 解決方法二

1. 演算法

(1) 尋找需要處理的頂點，就是奇頂點，以及進出點為偶頂點。

(2) 找尋最長路徑所連結的頂點，開始郵遞員問題演算，就是連接所有的待處理頂點。從最長路徑所連結的頂點開始找，是為了避免重覆此路徑造成總成本增加。

(3) 找該頂點所有路徑與虛擬路徑中，最低成本的路徑，將該最低成本路徑重複連接，連接後表示該頂點已經處理完畢。

(4) 再找圖中剩下路徑成本最高連線的端點，重複上述(1)、(2)、(3)步。其中，已經連接重複路徑的點，在下一次找最短路徑時，因為已經成為偶數點或進口或出口奇數點，所以不再列入下一次的虛擬路徑找尋。

(5) 最後剩下的兩個待處理點，直接連接。

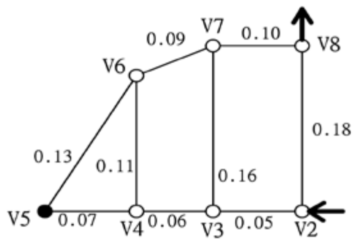
2. 圖形分類與路徑成本計算

(1) 圖形特徵類別：請參照第六節。

(2) 單一路徑之路徑成本
單一路徑總路徑成本為：0.35+0.1+0.28+0.14+0.12=0.99。

(3) D 迴路成本：V9 進，V10 出，屬於單一迴路，路徑成本為 0.04+0.22+0.15+0.04=0.45。

(4) (A、B、C)迴路成本



I. 將奇數點挑出來如圖，圖中○表示是待處理的頂點，●是已經處理好的頂點。
因為最長路徑是 V2⟷V8 的 0.18，任選 V2 或 V8 處理，先選 V8。

II. 計算 V8 與所有待處理頂點連接路徑成本，發現 V8⟷V7 的成本最低=0.10 如下圖 12。粗實線部分將重複連接。

III. 重複連接 V7⟷V8 如下圖 13。

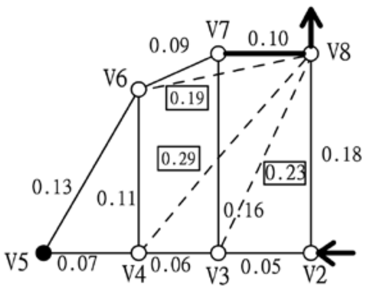


圖 12

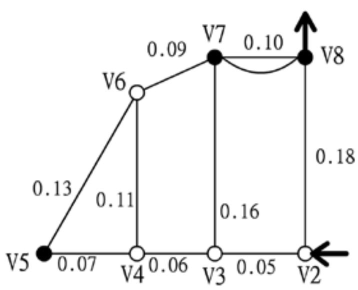


圖 13

IV. 待處理頂點連接的最長路徑，是 V2 連接的 0.18，所以要處理 V2 頂點。處理結果如下圖 14，發現路徑成本 V2⟷V3=0.05 最小，粗實線部分將重複連接。

V. 重複連接 V2⟷V3 如下圖 15。

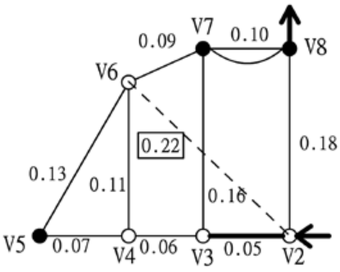


圖 14

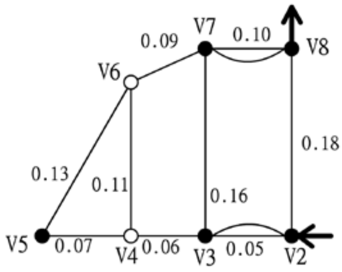


圖 15

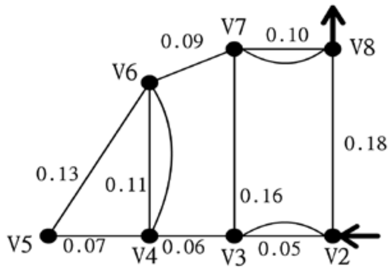


圖 16

VI. 因為只剩下 V4、V6 兩個待處理頂點，直接連接 V4 與 V6 如圖 16：

VII. 全部處理完畢，路徑走法為 V2→V3→V7→V8→V2→V3→V4→V5→V6→V4→V6→V7→V8。總長度為：

圖 16

0.05+0.16+0.10+0.18+0.05+0.06+0.07+0.13+0.11+0.11+0.09+0.10=1.21

(5) (E、F、G)迴路成本

I. 將奇數點挑出來如圖 17，圖中○表示是待處理的頂點，●是已經處理好的頂點。

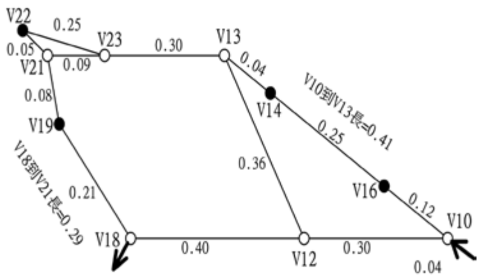


圖 17

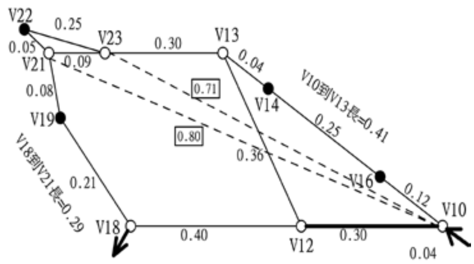


圖 18

因為最長路徑是 V10⟷V13 的 0.41，可以選擇 V10 或 V13 處理，先選擇 V10。

II. 計算 V10 與所有待處理頂點連接路徑成本，發現 V10⟷V12 的成本最低=0.30 如上圖 18。粗實線部分將重複連接。

III. 重複連接 V10⟷V12 如下圖 19。

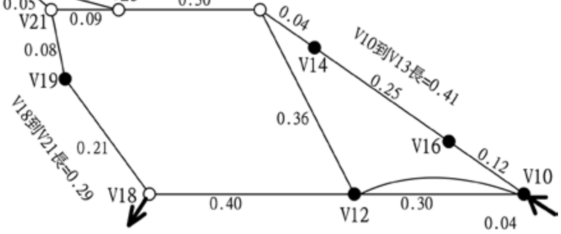


圖 19

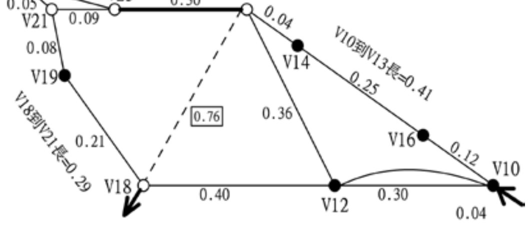


圖 20

IV. 待處理頂點連接的最長路徑，是 V13 連接的 0.41，所以要處理 V13 頂點。處理結果如上圖 20，發現路徑成本 V13⟷V23=0.30 最小，粗實線部分將重複連接。

V. 重複連接 V13⟷V23 如下圖 21。

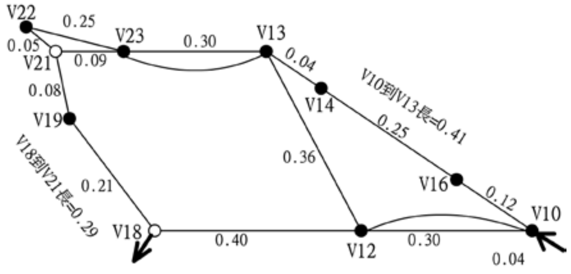


圖 21

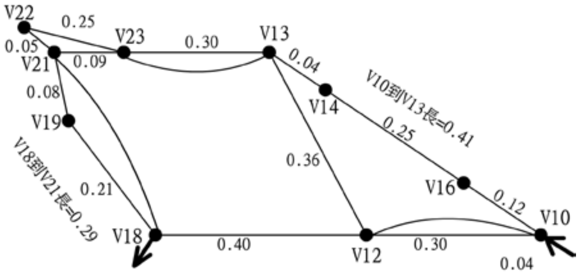


圖 22

VI. 因為只剩下 V18、V21 兩個待處理頂點，直接連接 V18 與 V21 如下圖：

VII. 全部處理完畢。路徑走法為：V10→V13→V12→V10→V12→V18→V21→V22→V23→V13→V23→V21→V18。總長度為：
0.41+0.36+0.30+0.30+0.40+0.29+0.05+0.25+0.30+0.30+0.09+0.29=3.34

(6) 綜合(1)~(5)，總路徑成本為：0.99+0.45+1.21+3.34=5.99。此結果與方法一相同。

參、結論

1. 利用數學方法，確實能夠改善實際生活中所遭遇的問題。
2. 解決方法一可以找到最佳解，但如果要討論的奇數點多，配對的係數將會遽增，電腦的使用，使這種方法可以實現。
3. 解決方法二是改良作法，即使要處理的點變多，也不會花太多時間。但受限於時間，無法確定是否能通用於所有類型問題，有待未來加以驗證改進。
4. 若能擴大討論垃圾車路徑範圍，能省下不少垃圾車路徑長度。

肆、引註資料

岡部恆治、本丸諒(2013)。**3 小時讀通幾何**。新北市：世茂。

石田保輝, 宮崎修一(2017)。**演算法圖鑑：26 種演算法 + 7 種資料結構，人工智慧、數據分析、邏輯思考的原理和應用全圖解**。台北市：臉譜。

維基百科—圖的遍歷。2019 年 9 月 15 日，取自
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%BE%E7%9A%84%E9%81%8D%E5%8E%86

吉安鄉公所清潔隊—吉安鄉垃圾車路線圖之宜昌村。2019 年 9 月 15 日，取自
http://clean.ji-an.gov.tw/Introduction/Removal/