投稿類別：自然領域

篇名：
三角形邊角與相似形之探究

作者：
張騰達。花蓮縣立自強國中。七年八班

指導老師：
陳禹翔老師
鄭凱文老師

壹、前言

一、研究動機

我在升國中一年級的暑假，參加校內舉辦的數學營隊，裡面有談到一個角度和的問題，讓我想知道這一題會不會有其他解法？如果是不同角度的話，會有解嗎，解法又是如何？

二、研究目的

(一) 探討這一個題目的其他解法。
(二) 探討這一題使用相似形解法是否可以推廣到其他角度？
(三) 探討這一個題目原本拆成兩個角，那有可能拆成三個角或更多角嗎？

三、 研究方法

這個問題的題目如圖 一：$\angle A + \angle B + \angle C =$？營隊的老師說這一題曾經出現在高中的段考試題，但並非求角度和，他要我們大膽猜測答案是多少，用眼睛看應該是 90 度，後來運算出答案的結果的確是 90 度，課堂上老師用一種解法給我們看，他希望我們自己回家試試看有沒有其他解，也可以用 GSP 軟體來驗證自己的答案對不對，於是我展開了我的研究。

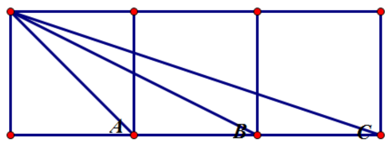

圖 一

圖 一資料來源：研究者繪製

四、 研究架構

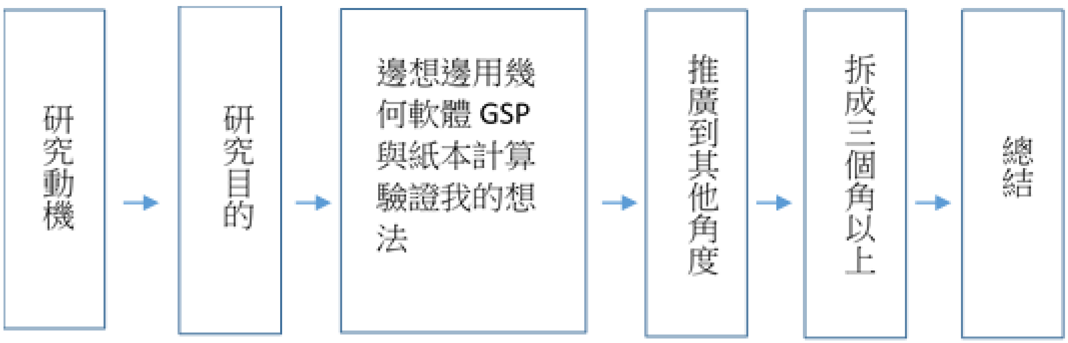

圖 二

圖 二資料來源：研究者繪製

貳、正文

一、探討這一題的解法有下列幾種：

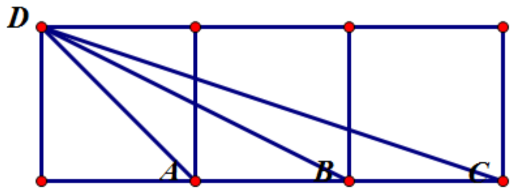

圖 三

圖 三資料來源：研究者繪製

(一) 用相似形來解題（圖 三）

證明過程 ：此圖形為三個正方形組成，因此我們不失一般性假設 $\overline{AB}=1$ 再透過畢氏定理將得到下列邊長：

$$\overline{AD}=\sqrt{2}、\ \overline{BD}=\sqrt{5}、\ \overline{AC}=2、\ \overline{CD}=\sqrt{10}$$

對於 $\triangle$ABD 與 $\triangle$ADC 的邊長比如下：

1. $\triangle$ABD：$\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{AD}=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$
2. $\triangle$ADC：$\overline{AD}:\overline{DC}:\overline{AC}=\sqrt{2}:\sqrt{10}:2=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$

經由 1、2 得知 $\triangle$ABD $\backsim\triangle$ADC（SSS）。
$\therefore\ \angle C=\angle ADB$與外角定理將得到$\angle B+\angle C=\angle A$ 且$\angle A=45°$
故得證 $\angle A+\angle B+\angle C=90°$。

(二) 利用等腰直角三角形來解題（圖 四）

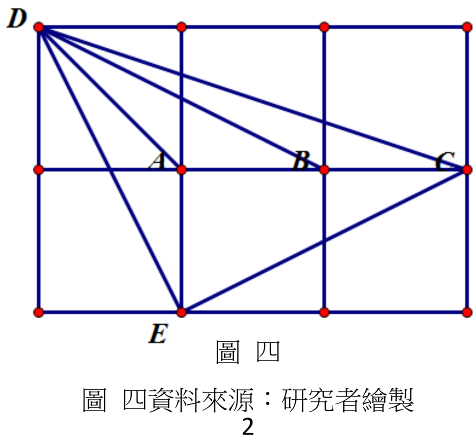

圖 四

圖 四資料來源：研究者繪製

證明過程：先將三個正方形做延伸並連接$\overline{CE}$ 與 $\overline{DE}$ 兩直線如圖三，此圖形皆為正方形組成，因而不失一般性假設 $\overline{AB}=1$ 與畢氏定理將得到下列邊長：

$$\overline{DE}=\overline{EC}=\sqrt{5} \text{ 與 } \overline{CD}=\sqrt{10}$$

▵ CDE 的邊長比為

$$\begin{aligned}\overline{CE}:\overline{DE}:\overline{CD} &= \sqrt{5}:\sqrt{5}:\sqrt{10}\\ &= 1:1:\sqrt{2}\end{aligned}$$

∴ ▵ CDE 為等腰直角三角形，又 ▵ BDF ≅▵ CEA（SSS）

∴ ∠B = ∠ACE

∴ ∠B + ∠C = ∠ECD = 45°

故得證 ∠A + ∠B + ∠C = 90°

(三) 用餘弦函數(cos)來解

$\angle A=45°$，$\angle B+\angle C=?$

$$\begin{aligned}&\cos(B+C)\\ &=\cos B\cos C-\sin B\sin C\\ &=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\\ &=\frac{5}{\sqrt{50}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\therefore \angle B+\angle C=45° \Rightarrow \angle A+\angle B+\angle C=90°$

(四) 用正弦函數(sin)來解題

$\angle A=45°$，$\angle B+\angle C=?$

$$\begin{aligned}&\sin(B+C)\\ &=\sin B\cos C+\cos B\sin C\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\\ &=\frac{5}{\sqrt{50}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\therefore \angle B+\angle C=45° \Rightarrow \angle A+\angle B+\angle C=90°$

(五) 用正切函數 tan 來解題

$\angle A = 45°$，$\angle B + \angle C = ?$

$$\tan(B + C)$$
$$= \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}$$
$$= 1$$
$$\therefore \angle B + \angle C = 45° \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 90°$$

二、探討這個題目裡的相似三角形

根據前文五種面向的探討，針對相似形的解題方式，將會得到我們都是先透過邊長比的關係再進行角度的計算，那麼如果相似形真的成立的狀況下，我們將探究其邊與邊的關係。

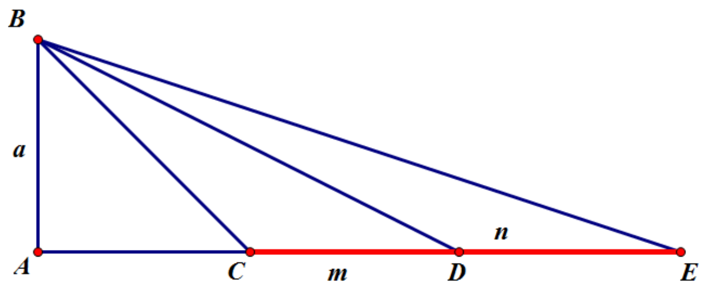

圖 五

圖 五資料來源：研究者繪製

(一) 觀察：

1、 給定 $a = 1$、$\angle A = 90°$、$\triangle$ BDF 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$且 $m < \overline{CB}$。如果 $\Delta BCD \sim \Delta BEC$ 那麼

$$m \times n = 2 = 2 \times 1^2$$

2、 給定 $a = 2$、$\angle A = 90°$、$\triangle BDF$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 且 $m < \overline{CB}$。如果 $\Delta BCD \sim \Delta BEC$ 那麼

$$m \times n = 8 = 2 \times 2^2$$

3、 給定 $a = 3$、$\angle A = 90°$、$\triangle BDF$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 且 $m < \overline{CB}$。如果 $\Delta BCD \sim \Delta BEC$ 那麼

$$m \times n = 18 = 2 \times 3^2$$

透過以上觀察，我猜測下列事實

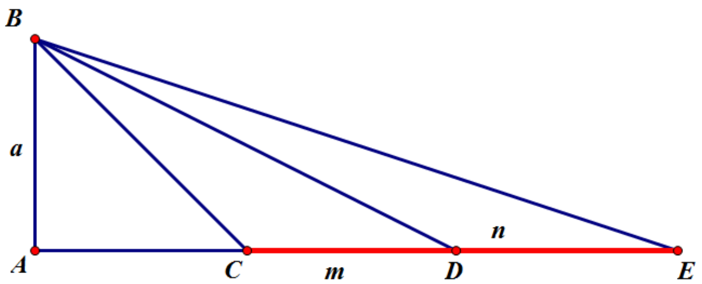

圖 六

圖 六資料來源：研究者繪製

(二) 猜測一（圖 六）

給定任意 $a > 0$、$\angle A = 90°$、$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 且 $m < \overline{CB}$。如果 $\Delta BCD \sim \Delta ECB$ 那麼 $m \times n = 2 \times a^2$。

(三) 證明：

令 $\Delta BCD \sim \Delta ECB$ 且 $\angle A = 90°$

則$\overline{BC}:\overline{CD} = \overline{EC}:\overline{CB}$

我們知道$\overline{BC} = \overline{CB} = \sqrt{2}a$

所以

$$\sqrt{2}a : \overline{CD} = \overline{EC} : \sqrt{2}a$$

$$\Rightarrow \quad \overline{CD} \times \overline{EC} = 2 \times a^2$$

$$\Rightarrow \quad m \times n = 2 \times a^2$$

上述的證明讓我們想更進一步的想知道，如果我們僅有邊與邊的關係是否能反推兩者是相似形，下面的步驟我們將給出猜測與證明

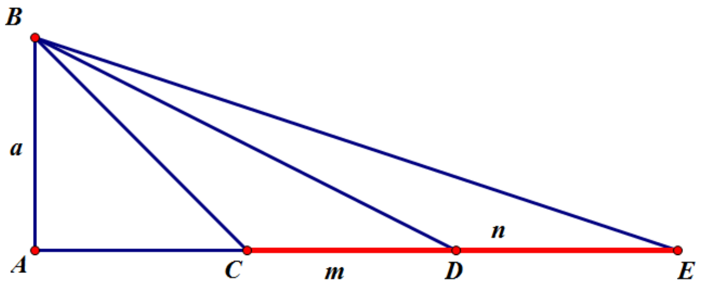

圖 七

圖 七參考資料：研究者繪製

(四) 猜測二（圖 七）

給定任意 $a>0$、$\angle A=90°$、$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD}=m$ 與 $\overline{CE}=n$ 。如果 $m\times n=2\times a^2$ 那麼

$$\Delta BCD\sim\Delta ECB$$

(五) 證明

令 $m\times n=2\times a^2$ 則 $n=(2\times a^2)/m$

且因 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，所以 $\overline{BC}=\sqrt{2}a$

分別對於 ΔBCD 與 ΔECB 的邊長比如下

$$\begin{aligned}
&(1)\triangle BCD： & \overline{BC}:\overline{CD} &= \sqrt{2}a:m\\
&(2)\triangle ECB： & \overline{EC}:\overline{CB} &= n:\sqrt{2}a\\
& & &= (2\times a^2)/m:\sqrt{2}a\\
& & &= \sqrt{2}a:m\\
& & &= \overline{BC}:\overline{CD}
\end{aligned}$$

又 $\angle BCD$ 為共用角，故得證

$$\Delta BCD\sim\Delta ECB\ \text{(SAS)}$$

結合猜想一與猜想二我將進行以下實作，在相似形的條件較不容易在電腦軟體上實現，因而轉向作固定邊與邊關係在確認是否為相似形。

(六) 實作

我用 GSP 畫了一些圖，設定$mn=2$，也得到了$\Delta BCD \sim \Delta BEC$的方式：如圖 八，這兩種情況都符合$m:l=l:n$。

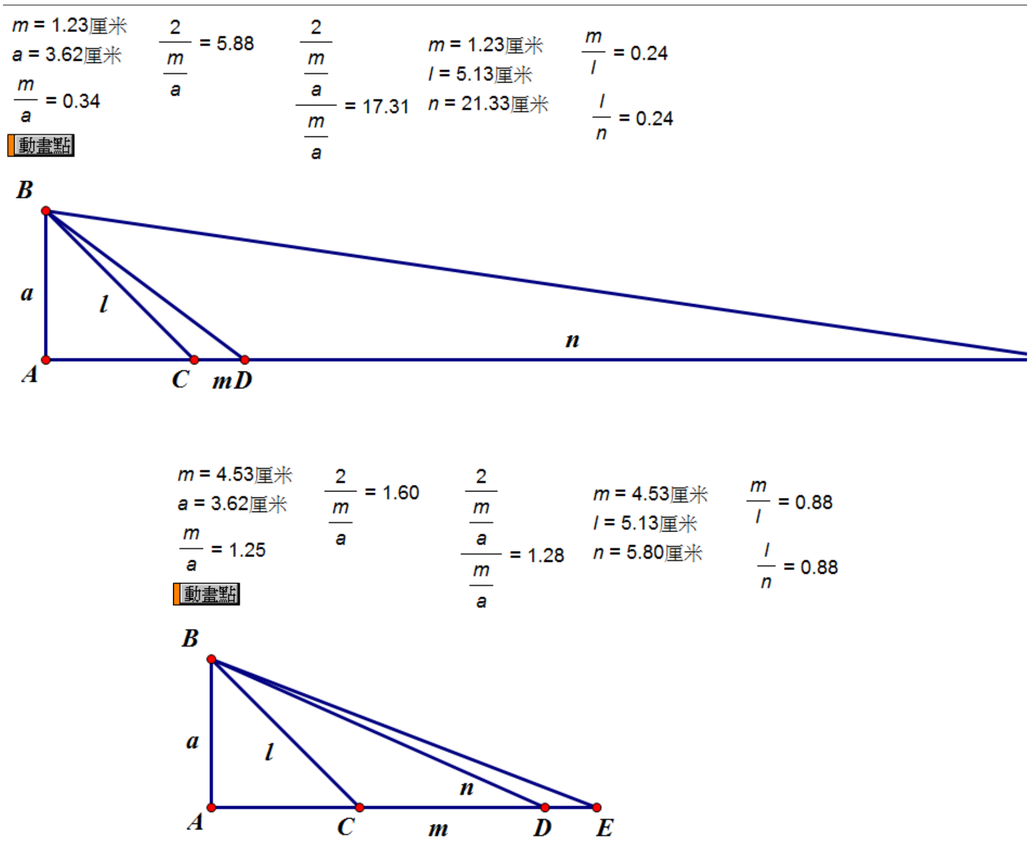

圖 八

圖 八資料來源：研究者繪製

三、 用相似的概念來看不是45°時的情況

(一) 觀察：

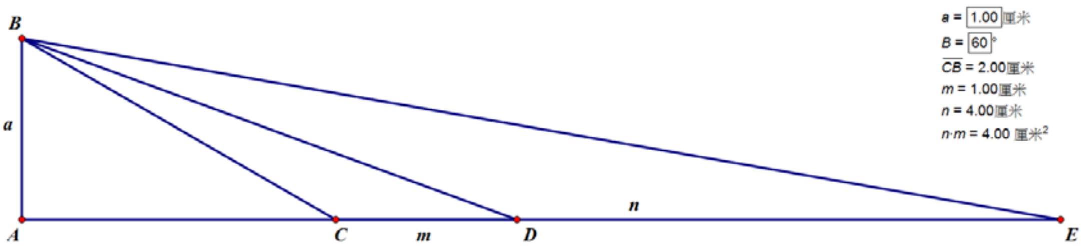

圖 九

圖 九資料來源：研究者繪製

給定 $a=1$、$\angle B=60°$、ΔABC 為直角三角形、令 $\overline{CD}=m$ 與 $\overline{CE}=n$且 $m<\overline{CB}$，如

圖 九。如果 $\Delta BCD \sim \Delta BEC$ 那麼

$$m \times n = 4$$

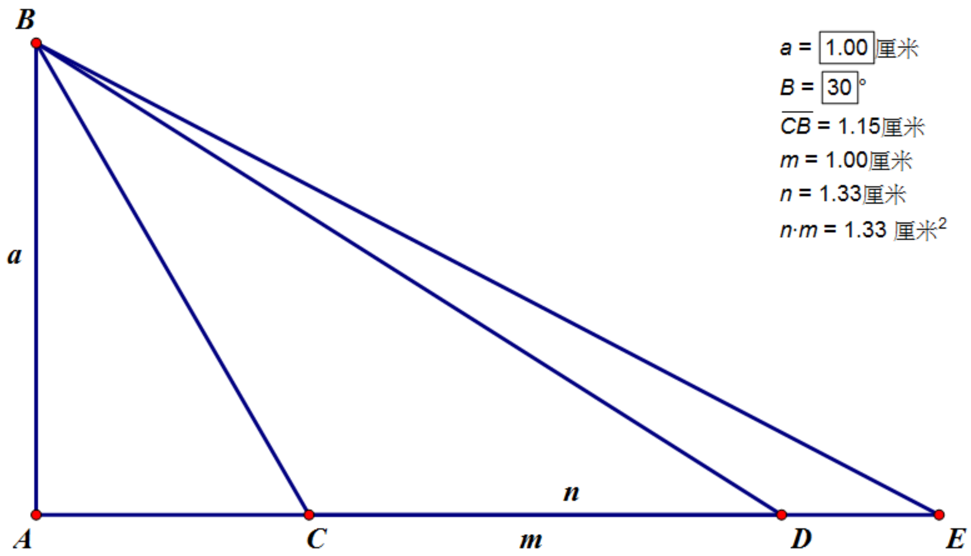

圖 十

圖 十資料來源：研究者繪製

甲、給定 $a = 1$、$\angle B = 30°$、$\triangle$ BDF 為直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$且 $m < \overline{CB}$，如圖 十。如果 $\Delta BCD \sim \Delta BEC$ 那麼

$$m \times n = \frac{4}{3}$$

透過以上觀察，我猜測下列事實

(二) 猜測一：

給定 $a = 1$、$\angle B$ 為任意角且 $\triangle ABC$ 為直角三角形、令 $\overline{CD} = m\overline{CE} = n$、$\overline{CB} = k$ 且 $m < \overline{CB}$。如果 $\Delta BCD \sim \Delta BEC$ 那麼

$$m \times n = k^2$$

(三) 證明：

令 $\Delta BCD \sim \Delta ECB$ 且 $\angle B = \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，對於 $\triangle ABC$透過正弦定理可得到

$$k = \overline{CB} = \frac{1}{\sin(90° - \theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

與

$$\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{EC}:\overline{CB}$$
$$\Rightarrow\quad \overline{CD}\times\overline{EC}=\overline{BC}\times\overline{CB}$$
$$\Rightarrow\quad \overline{CD}\times\overline{EC}=k^2$$
$$\Rightarrow\quad \overline{CD}\times\overline{EC}=1/\cos^2(\theta)$$
$$\Rightarrow\quad \mathrm{m}\times n=1/\cos^2(\theta)$$

經由證明我們除了得到

$$\mathrm{m}\times\mathrm{n}=k^2$$

在老師的提醒過程中，引入了正弦定理，我們的猜想與給定的關係更為顯著，猜想更可以改為如下：

給定 $\mathrm{a}=1$、$\angle\mathrm{B}$ 為任意角且 $\triangle\mathrm{ABC}$ 為直角三角形、令 $\overline{CD}=\mathrm{m}\overline{CE}=\mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m}<\overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD}\sim\Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m}\times\mathrm{n}=1/\cos^2(\theta)$$

相同的想法我們也希望能就由已知邊與邊關係與得知 $\triangle\mathrm{ABC}$ 中非直角的其中一角角度，是否也能找回相似形，因而做了以下猜想

(四) 猜測二：

給定 $\mathrm{a}=1$、$\angle\mathrm{B}$ 為任意角且 $\triangle\mathrm{ABC}$ 為直角三角形、令 $\overline{CD}=\mathrm{m}\overline{CE}=\mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m}<\overline{CB}$。如果 $\mathrm{m}\times\mathrm{n}=1/\cos^2(\theta)$ 那麼

$$\Delta\mathrm{BCD}\sim\Delta\mathrm{BEC}$$

(五) 證明：

令$\mathrm{a}=1$且$\mathrm{m}\times\mathrm{n}=1/\cos^2(\theta),\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

且因$\triangle\mathrm{ABC}$為直角三角形，又因 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=1/\cos\theta$，所以 $\overline{BC}=1/\cos\theta$

分別對於$\triangle\mathrm{BCD}$與$\triangle\mathrm{ECB}$的邊長比如下:

(1) $\triangle\mathrm{BCD}$: $\overline{BC}:\overline{CD}=1/\cos\theta:m$

(2) $\triangle\mathrm{ECB}$: $\overline{EC}:\overline{CB}=n:1/\cos\theta$

$$=\mathrm{mn}:\mathrm{m}/\cos\theta$$
$$=1/cos^2\theta:m/\cos\theta$$
$$=1/\cos:\mathrm{m}$$

藉由 (1)、(2) 與 $\angle BCD$ 為共用角我們證明了$\Delta BCD \sim \Delta BEC$

(六) 實作：

我用 GSP 畫了一些圖，設計一個角度可改變的程式，
設定$mn = k^2$(圖 十一)，最後還是有$\Delta BCD \sim \Delta ECB$的結果

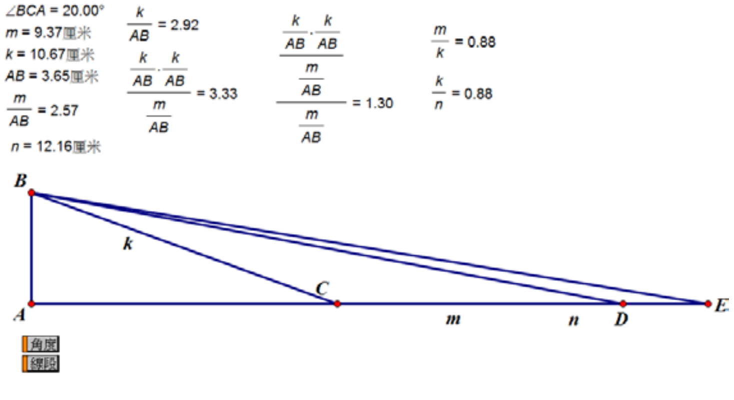

圖 十一

圖 十一資料來源：研究者繪製

参、結論

一、給定任意 $a > 0$、$\angle A = 90°$、ΔABC 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 。$m \times n = 2 \times a^2$若且為若$\Delta BCD \sim \Delta ECB$。

二、 給定 $a = 1$、$\angle B$ 為任意角、ΔABC 為直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 。$m \times n = 1/\cos^2(\theta)$若且為若$\Delta BCD \sim \Delta BEC$。

三、 在猜想中我們都多了 $m < \overline{CB}$ 這個條件，是因為我們在實作過程中發現當 $m = \overline{CB}$ 時，ΔBCD 與 ΔECB 將會完全重和，$m > \overline{CB}$ 時 $m > n$ 將會與圖形不符，故加上此條件。但沒有這條件完全不影響我們的猜想，由$m \times n$ 會是一個定值也可得知。

肆、引注資料

一、亞瑟・班傑明(2017)。**數學大觀念**。貓頭鷹出版。

二、三角函數-維基百科。2017 年取自
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0

三、三角函數六邊形。2017 年取自
http://www.xxdao.com/320000/310061.shtml