

3D 立體連塊列舉頂點、邊、面關係探討之研究 ——以立體五連塊為例

壹、前言

一、研究動機

方形連塊對數學界的喜好者飽受歡迎的研究目標，光是在 Google 搜尋引擎網站查，就有大約二十筆的研究紀錄，像是有變化方法、拼湊方法等等，各種研究都可見在幾何學中的連塊是多麼受歡迎。在四年級時，資優班的老師曾經有讓我們涉獵過連塊，而且大家的玩得很起勁，把連塊拼湊成各種有趣的形狀，玩得不亦樂乎，似乎是連塊散發了正能量。

在網路上有非常多平面方形連塊的文獻資料，並知道俄羅斯方塊是由連塊所延續發明的，才讓我們燃起了有趣的想法，我們想把網路上 2D 的方形連塊轉為 3D，3D 立體方塊比平面方塊還要難的多，我們需要去深入的了解方形連塊的基本定義和比較快的連塊列舉方法，需要排除更多影響連塊數量的重複因素，在列舉方面要有一定的空間概念才能列出立體連塊，以利於我們的研究過程順利。從《神奇酷數學 6》這本書中，數學家們也把平面連塊透過組合、拼湊變成個種新的圖形(如長方形、正方形等)，在《國立臺灣師範大學》的《五方連塊上的一些拼圖遊戲》中，作者寫了很多列舉法則，引發我們強烈的想法。好奇的是，3D 連塊到底用甚麼方法列舉是最快的呢?結果出現後又與平面連塊有什麼差異性?

在做此研究之前，必須充實好知識，瞭解連塊的各種資料，如：定義、列舉方法、數量、頂點、邊數、面數及對稱關係等等，要知道這些資訊，藉以輔助參考，那當然由最簡單的三、四連塊去延伸，但以三連塊來說，平面、立體都僅有兩個連塊，不利於參考，也無法完全確定結果，所以我們決定以四連塊作為其他立體連塊的參考(見圖 1)，再延伸出五連塊，較能證實此研究。

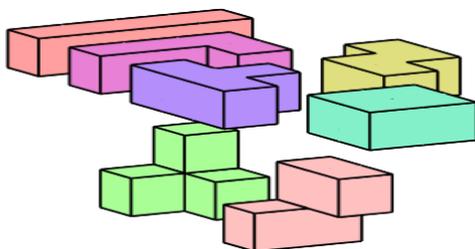


圖 1 所有立體四連塊

二、研究目的

- (一)了解連塊的基本定義以及列舉方法。
- (二)利用窮舉法及刪去法列舉所有立體五連塊造型。
- (三)探討立體四連塊與五連塊頂點、邊、面的數量關係。

貳、正文

一、文獻探討

(一)連塊的基本定義

1.平面連塊

平面連塊是由一個或是多個平面方塊互相連結組成，是一個由平面方塊組成的方塊，也是方塊的二維版本，又稱為四角系統。俄羅斯方塊跟德蘭姆片方的組合問題就是平面連塊的例子(維基百科, 2016)。根據連塊拼拼樂(無日期)網站指出，連塊是經過旋轉、鏡射後仍然不重複的方連塊就是一種獨立連塊。多方塊的矩形拼圖 (Tiling the

rectangle) 是一個有趣而常見的來拼一個矩形(王榴明等人, 無日期)。「四方連塊」

(tetrominoes) 是指四個單位正方形以邊與邊相連接而成, 並扣除圖形旋轉、鏡射, 所形成之五種不同形狀的幾何平面圖形(賴韻如等人, 2015)。五格骨牌(Pentomino), 又稱五連塊、傷腦筋十二塊, 是一種多格骨牌, 每塊以五個全等的正方形連成, 反射或旋轉視作同一種共有十二種, 可以英文字母代表。其謎題, 最早是英國人亨利·杜德耐於 1907 年所發明, 通常用 F、I、L、N、P、T、U、V、W、X、Y、Z (維基百科, 2015)。6 連塊 35 種, 而其中 11 種是正立方體的展開圖(大頭, 2017)。

2.立方連塊:

由一個或是多個立方體互相連結組成, 是一個由立方組成的方塊, 也是平面多連方塊的三維版本。索馬立方跟貝德蘭姆立方的組合問題就是立方連塊的應用(維基百科, 2016)。用兩個正方形立體方塊組合, 有一個立方體的面完全相連, 叫做二連塊。如果鏡射或旋轉都視為相同一種, 則 4 方塊只有 5 片, 5 方塊有 12 片, 6 方塊有 35 片, 7 方塊有 108 片, 8 方塊有 369 片(賴韻如等人, 2015、科學月刊, 2010)。

表 1

平面及立體連塊的數量關係表

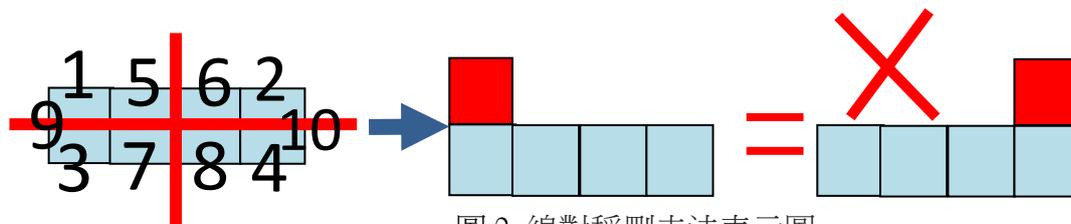
N	名稱	平面連塊種類	立體連塊種類	比值(立體/平面)
1	一連塊	1	1	1
2	二連塊	1	1	1
3	三連塊	2	2	1
4	四連塊	5	7	1.4
5	五連塊	12	23	1.916
6	六連塊	35	112	3.2

資料來源: 維基百科(2015), 多連立方體。取自: <https://goo.gl/b4CCVz>

由表 1 可得知, 除了一到四連塊, 其他 N 連塊的立體連塊都比平面連塊多了 2~3 倍多(多連立方體, 2015), 但在立體連塊與平面連塊的比值數據中, 並沒有發現有特別的規律性, 因此, 本研究在進行連塊關係探討時, 亦不針對比值關係作深入探討。

1.線對稱刪去法

一個圖形上能找出一條直線, 使得圖形沿著此直線對折之後能夠完全重疊, 此種圖形則稱為線對稱圖形, 而對摺的這條直線稱為對稱軸(均一教育平台, 無日期)。所以, 當運用長型四連塊延伸時, 我們會先標示出可延伸的延伸點 1~10(圖 2), 接著標示出對稱軸, 而長型四連塊有兩條對稱軸, 從對稱軸中可以發現, 1 號延伸點與 2 號延伸點沿著對稱軸對折後會重疊, 可見是同一種, 因此 2 號延伸點即可刪去, 同理, 其他重複延伸點也會依照同方法刪掉, 也就是說可以刪除線對稱會重疊的延伸點, 這就是線對稱刪去法。



2.點對稱刪去法

什麼是「對稱點」呢? 拿一個圓形當作例子, 圓形的「對稱點」就是它的「圓心」, 那是在一個圓的中心點, 所以很顯然的, 「對稱點」就是一個圖形的中心點。

「點對稱」的圖形若旋轉 180 度後，還是跟原來的圖形一模一樣，那麼這個圖形就是名副其實的「點對稱」圖形了(數學教師知識庫，2003)。所以，當要運用 Z 型四連塊進行延伸時，我們會先標示出可延伸的延伸點 1~8(圖 3)，接著標示出對稱點，而 Z 型四連塊有一個對稱點，從對稱點中可以發現，1 號延伸點與 2 號延伸點旋轉 180 度後會完全重複，可見是同一種，因此 2 號延伸點即可刪去，同理，其他重複延伸點也會依照同方法刪掉，也就是說可以刪除點對稱中旋轉 180 度後會重複的延伸點，這就是點對稱刪去法。

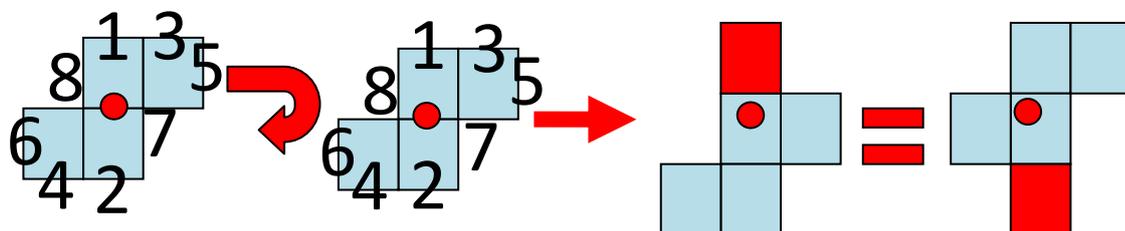


圖 3 點對稱刪去法表示圖

二、研究流程

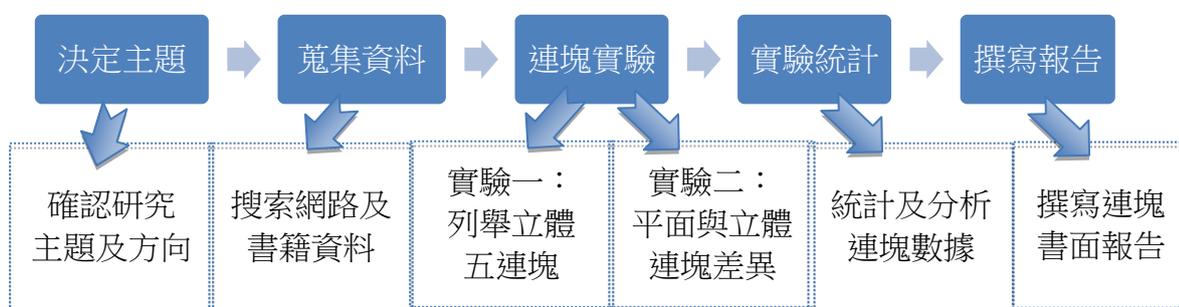


圖 4 研究流程圖

由圖 4 可得知，我們的實驗一共分成五個研究階段，各階段說明如下：第一階段是決定主題；一開始上課時，老師請我們回家想主題，最後經過別人提供建議後，決定立體連塊為暫定的大方向，最後，在經過跟老師討論之後決定利用最平凡的平面四連塊的頂點、邊、面，來對照立體五連塊的奧秘。

第二階段為蒐集網路及書籍資料；我利用搜尋引擎地毯式的搜索有關於連塊的定義、由來、列舉方法等相關資料，並到文化局圖書館、書店等地方蒐集書中的資料；再透過整理後，我對連塊又有了更進一步的了解。

第三階段為列舉立體連塊的實驗部分，也是整個研究最重要的核心；首先的第一個實驗，我們利用我們一起去買的連塊教具開始拼湊所有平面及立體的連塊，並延伸至立體的連塊，在事前，我們已經利用維基百科查到連塊數量，因此沒有列不完的問題，也沒有多列及少列的問題；第二個實驗則是我們利用平面的四~五連塊，去和列好的立體四~五連塊進行頂點、邊、面進行比對。

而第四階段則和上一階段為伍，第四階段是實驗的統計及分析，我將最後的實驗結果繪製成表格，並利用數學的和、差、積、商、平均等等進行統計及分析，並得出一個結論。

最後一個階段為撰寫報告的部分，我們將所有文獻資料以及實驗結果、統計結果、及分析結果全部彙整，寫成書面論文報告，並撰寫結論及建議。希望大家能對連塊有更多的認識，更能從此愛上數學。

三、研究方法與對象

本研究採取窮舉法及刪去法，而研究對象為平面連塊及立體連塊。首先，我們先將基本的立體四連塊列舉出來，接著利用立體四連塊去延伸到立體五連塊，在延伸的過

程，一定會列有翻轉之後會重複的連塊，所以要把重複地(含鏡射、翻轉)連塊都需刪掉，刪完後數據需與表 1 進行核對，無誤後才能繼續進行實驗。列舉完之後，為了要看出頂點、邊、面各個數據中間的和、差、積、商關係，必須把平面、立體連塊的每項數據都一字排開列出，再核對平面、立體連塊的差異，如總數量關係、頂點數量關係、邊的數目關係、面的數量關係等等，以及找出平面連塊及立體連塊自身的關係在進行比較，最後，就可以把資料彙整，即完成本連塊列舉實驗。

四、研究工具

本研究使用到的工具有最主要的對象連塊、拍攝連塊及結果紀錄的照相機，以及統計、分析實驗結果和撰寫報告的電腦，請見表 2：

表 2

研究工具表

名稱	電腦	連塊	照相機
圖示			
用途	統計、分析實驗結果及撰寫報告	本研究的實驗對象	記錄研究過程及將實驗結果紀錄

五、研究結果及討論

(一)立體四連塊延伸立體五連塊延伸結果

依照賴韻如等人(2013)及科學月刊(2010)所述，用兩個正方形立體方塊組合，有一個立方體的面完全相連，叫做二連塊。如果連塊翻面或旋轉都視為相同一種。再依照我自己四年級時所上過的課程，刪減方式可分為線對稱、點對稱。所以在列舉過程，我會先將立體四連塊列出，再一一列出立體五連塊。

以下在所有延伸點皆會標註數字。接下來，會一一說明重複的延伸點，並加上該連塊的圖片並說明，旋轉部分皆為順向。最後在立體五連塊延伸圖中直接把不重複的數字標上去，重複的直接劃掉。

1.T 型連塊延伸

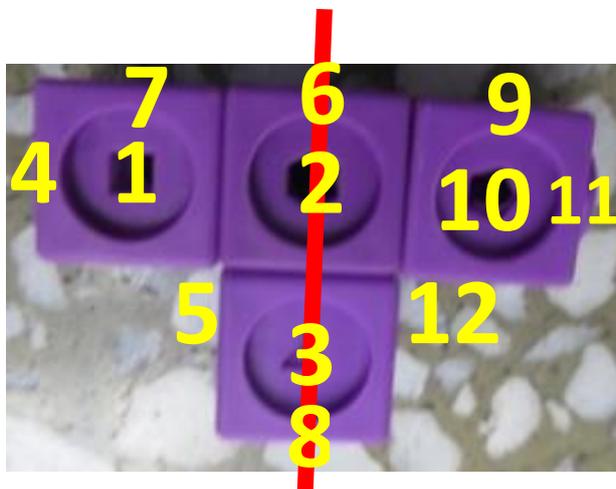


圖 5-1 T 型連塊延伸點前視標示圖

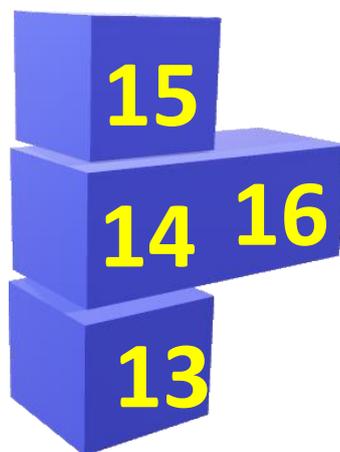


圖 5-2 T 型連塊延伸點後視標示圖

(1)T1、T10、T13、T15 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

T1	T13	說明
		以 T1 連塊作為基準，T10 連塊為 T1 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊，T13 連塊為 T1 連塊上下翻轉 180 度的重複連塊，而最後的 T15 連塊則是上下翻轉 180 度再前後鏡射 180 度後的重複連塊。
T10	T15	
		

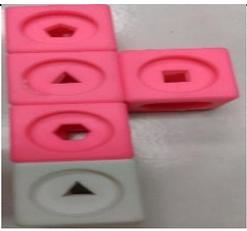
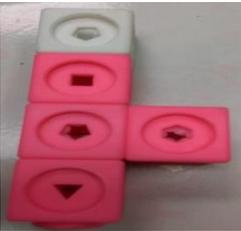
(2)T4、T11 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

T4	T11	說明
		以 T4 連塊作為基準，T11 連塊為 T4 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。

(3)T7、T9 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

T7	T9	說明
		以 T7 連塊作為基準，T9 連塊為 T7 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。

(4)T5、T12 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

T5	T12	說明
		以 T5 連塊作為基準，T12 連塊為 T5 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。

(5)T2、T14 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

T2	T14	說明
		以 T2 連塊作為基準，T14 連塊為 T2 連塊上下翻轉 180 度的重複連塊。

(6)T3、T16 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

T3	T16	說明
		<p>以 T3 連塊作為基準，T16 連塊為 T3 連塊上下翻轉 180 度的重複連塊。</p>

(7)T 型五連塊延伸結果：



圖 6 T 型連塊延伸圖

經由上述的整理可以得出，T9~T16 共計八個連塊與其他連塊重複，留下連塊 T1~T8(如圖 6)，因此，T 型連塊延伸的五連塊共計剩下八個。

2.O 型連塊延伸

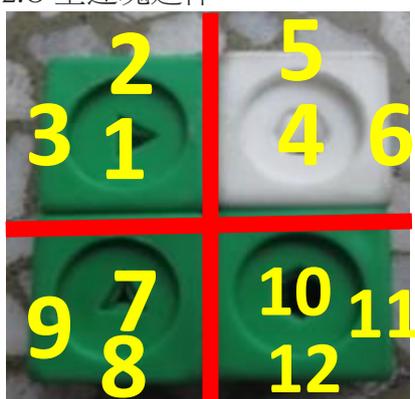


圖 7-1 O 型連塊延伸點前視標示圖

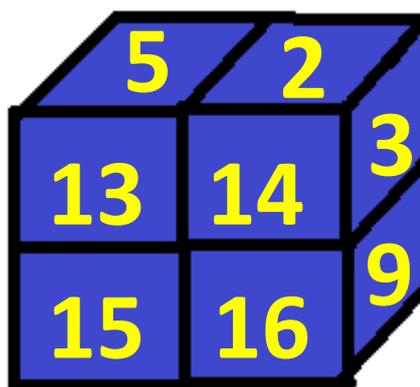
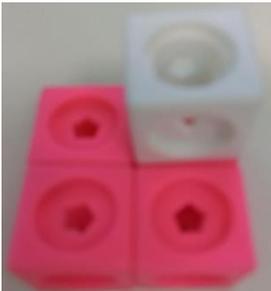
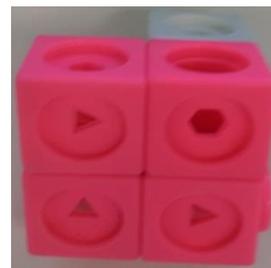
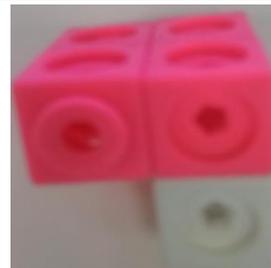
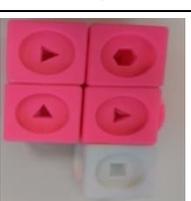


圖 7-2 O 型連塊延伸點後視標示圖

(1)O1、O4、O7、O10、O13、O14、O15、O16 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

O1	O4	O7	說明
			<p>以 O1 為基準，其他型則是分別因旋轉或鏡射後會與 O1 相同：</p> <p>1.旋轉：O4 為 O1 旋轉 90 度，O10 為 O1 旋轉 180 度，O7 為 O1 旋轉 270 度。</p> <p>2.上下鏡射：O13 為 O1 上下鏡射。</p> <p>3.上下鏡射後旋轉：O14 為 O1 上下鏡射後旋轉 90 度，O15 為 O1 上下鏡射後旋轉 180 度，O16 為 O1 上下鏡射旋轉 270 度。</p>
O10	O13	O14	
			
O15	O16		
			

(2)O2、O3、O5、O6、O8、O9、O11、O12 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

O2	O3	O5	說明
			<p>以 O2 為基準，其他連塊則是分別因旋轉或鏡射後會與 O2 相同：</p> <p>旋轉：O6 為 O2 旋轉 90 度，O12 為 O2 旋轉 180 度，O9 為 O2 旋轉 270 度。</p> <p>鏡射：O5 為 O2 左右鏡射，O8 為 O2 前後鏡射。</p> <p>鏡射後旋轉：O3 為 O2 前後鏡射後旋轉 90 度，O11 為 O2 前後鏡射後旋轉 270 度。</p>
O6	O8	O9	
			
O11	O12		
			

(3)O 型五連塊延伸結果：



圖 8 O 型連塊延伸圖

由上述的整理可以得出，O4、O7、O10、O13、O14、O15、O16、O3、O5、O6、O8、O9、O11、O12 共計十四個連塊與其他連塊重複，留下連塊 O1(如圖 8)，因此，O 型連塊延伸的五連塊共計僅有剩下兩個。

3.Z 型連塊延伸

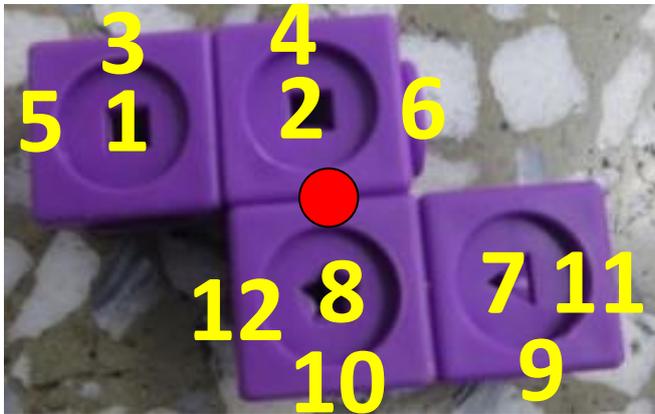


圖 9-1 Z 型連塊延伸點正面標示圖

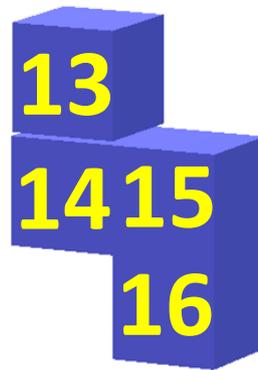


圖 9-2 Z 型連塊延伸點反面標示圖

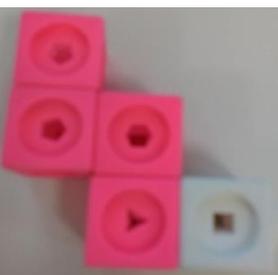
(1)Z1、Z7、Z13、Z16 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

Z1	Z7	說明
		<p>以 Z1 連塊作為基準，Z7 連塊為 Z1 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊，Z13 連塊為 Z1 連塊上下翻轉 180 度的重複連塊，而最後的 Z16 連塊則是上下翻轉 180 度再順向旋轉 180 度後的重複連塊。</p>
Z13	Z16	
		

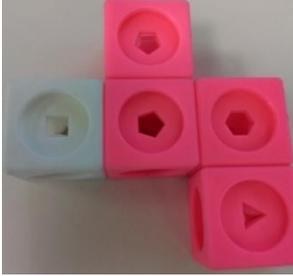
(2)Z2、Z8、Z14、Z15 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

Z2	Z8	說明
		<p>以 Z2 連塊作為基準，Z8 連塊為 Z2 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊，Z14 連塊為 Z2 連塊上下翻轉 180 度的重複連塊，而最後的 Z15 連塊則是上下翻轉 180 度再順向旋轉 180 度後的重複連塊。</p>
Z14	Z15	
		

(3)Z3、Z9 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

Z3	Z9	說明
		<p>以 Z3 連塊作為基準，Z9 連塊為 Z3 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(4)Z4、Z10 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

Z4	Z10	說明
		<p>以 Z4 連塊作為基準，Z10 連塊為 Z4 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(5)Z5、Z11 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

Z5	Z11	說明
		<p>以 Z5 連塊作為基準，Z11 連塊為 Z5 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(6)Z6、Z12 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

Z6	Z12	說明
		<p>以 Z6 連塊作為基準，Z12 連塊為 Z6 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(7)Z 型五連塊延伸結果：

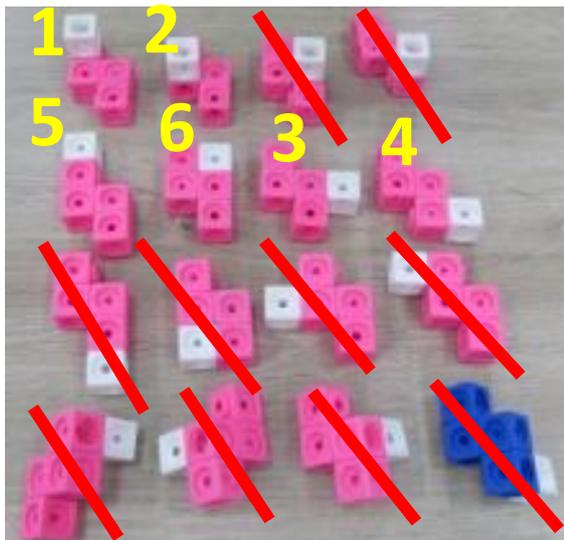


圖 10 Z 型連塊延伸圖

經由上述的整理可以得出，Z7、Z13、Z16、Z8、Z14、Z15、Z9、Z10、Z11、Z12 共計十個連塊與其他連塊重複，留下連塊 Z1~Z6(如圖 10)，因此，Z 型連塊延伸的五連塊共計剩下六個。

4.I 型連塊延伸



圖 11-1 I 型連塊延伸點前視標示圖

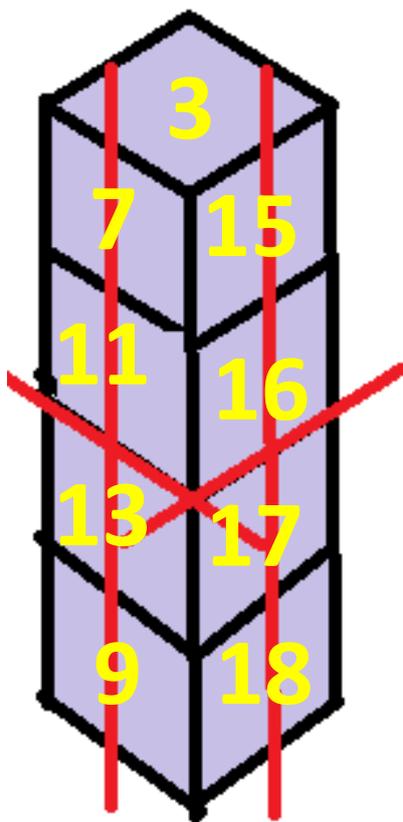
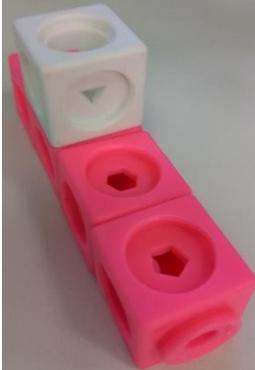
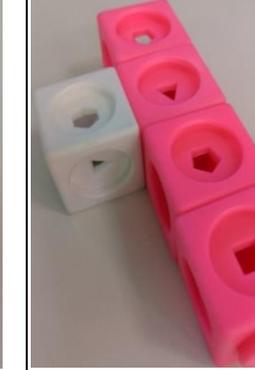


圖 11-2 I 型連塊延伸點後視標示圖

(1) I1、I4、I7、I8、I9、I10、I15、I18 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

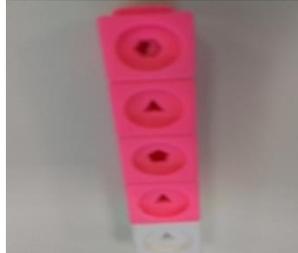
I1	I4	I7	I8
			
I9	I10	I15	I18
			
說明			
<p>以 I1 連塊作為基準，I4 連塊為 I1 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊，I7 連塊為 I1 連塊向右翻轉 90 度的重複連塊，I8 連塊為 I1 連塊向左翻轉 90 度的重複連塊，I9 連塊為 I1 連塊向右翻轉 90 度再前後鏡射的重複連塊，I10 連塊為 I1 連塊向左翻轉 90 度再前後鏡射的重複連塊，I15 連塊為 I1 連塊向右翻轉 180 度的重複連塊，I18 連塊為 I1 連塊向右翻轉 180 度再前後鏡射的重複連塊，</p>			

(2) I2、I5、I11、I12、I13、I14、I16、I17 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

I2	I5	I11	I12
			
(見下頁)			

I13	I14	I16	I17
			
說明			
<p>以 I2 連塊作為基準，I5 連塊為 I2 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊，I11 連塊為 I2 連塊向右翻轉 90 度的重複連塊，I12 連塊為 I2 連塊向左翻轉 90 度的重複連塊，I13 連塊為 I2 連塊向右翻轉 90 度再前後鏡射的重複連塊，I14 連塊為 I2 連塊向左翻轉 90 度再前後鏡射的重複連塊，I16 連塊為 I2 連塊向右翻轉 180 度的重複連塊，I17 連塊為 I2 連塊向右翻轉 180 度再前後鏡射的重複連塊。</p>			

(3)I3、I6 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

I3	I6	說明
		<p>以 I3 連塊作為基準，I6 連塊為 I3 連塊順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(4)I 型五連塊延伸結果：



圖 12 I 型連塊延伸圖

由上述的整理可以得出，I4、I7、I8、I9、I10、I15、I18、I5、I6、I11、I12、I13、I14、I16、I17、I6 共計十五個連塊與其他連塊重複，留下連塊 I1、I2、I3(見圖 12)，因此，I 型連塊延伸的五連塊共計僅有剩下三個。

5.L 型連塊延伸



圖 13-1 L 型連塊延伸點前視標示圖

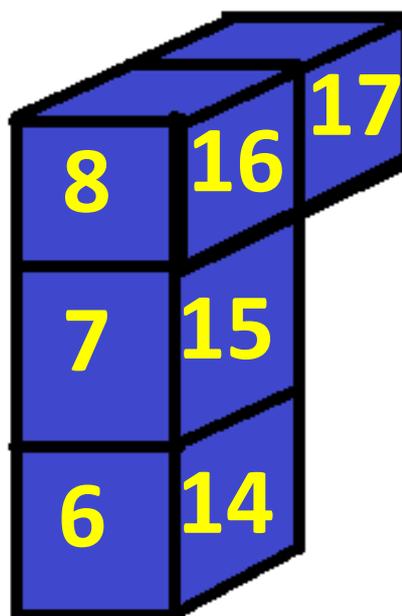
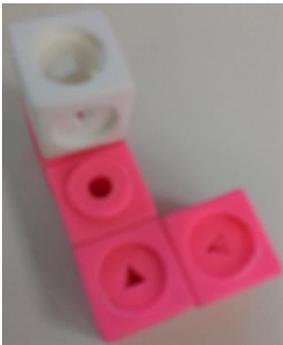
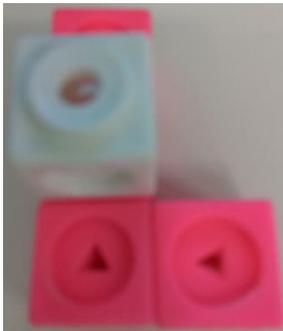


圖 13-2 L 型連塊延伸點後視標示圖

(1)L1、L14 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

L1	L14	說明
		<p>以 L1 連塊作為基準，L14 連塊為 L1 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。</p>

(2)L2、L15 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

L2	L15	說明
		<p>以 L2 連塊作為基準，L15 連塊為 L2 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。</p>

(3)L3、L16 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

L3	L16	說明
		<p>以 L3 連塊作為基準，L16 連塊為 L3 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。</p>

(4)L4、L17 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

L4	L17	說明
		<p>以 L4 連塊作為基準，L17 連塊為 L4 連塊前後鏡射 180 度的重複連塊。</p>

(5)L 型五連塊延伸結果：

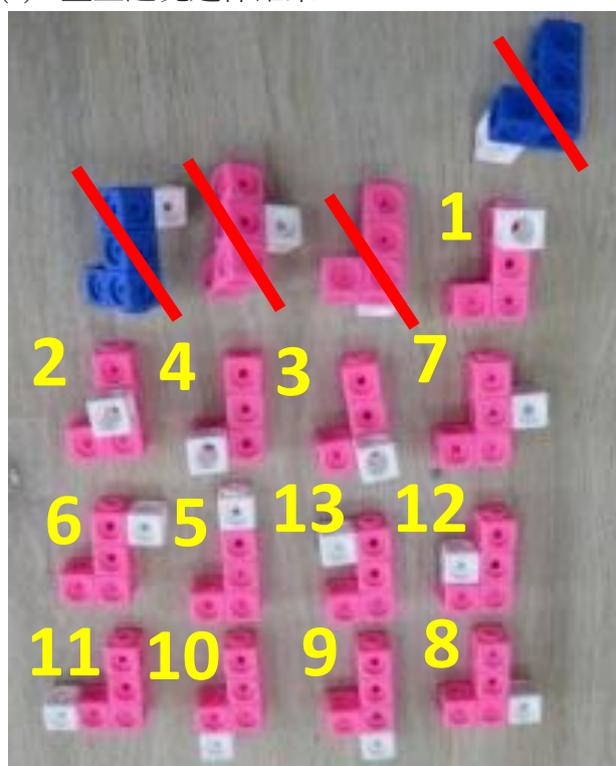


圖 14 L 型連塊延伸圖

經由上述的整理可以得出，L14、L15、L16、L17 共計四個連塊與其他連塊重複，留下連塊 L1~L13(如圖 14)，因此，L 型連塊延伸的五連塊共計剩下十三個。

6.左旋型連塊延伸

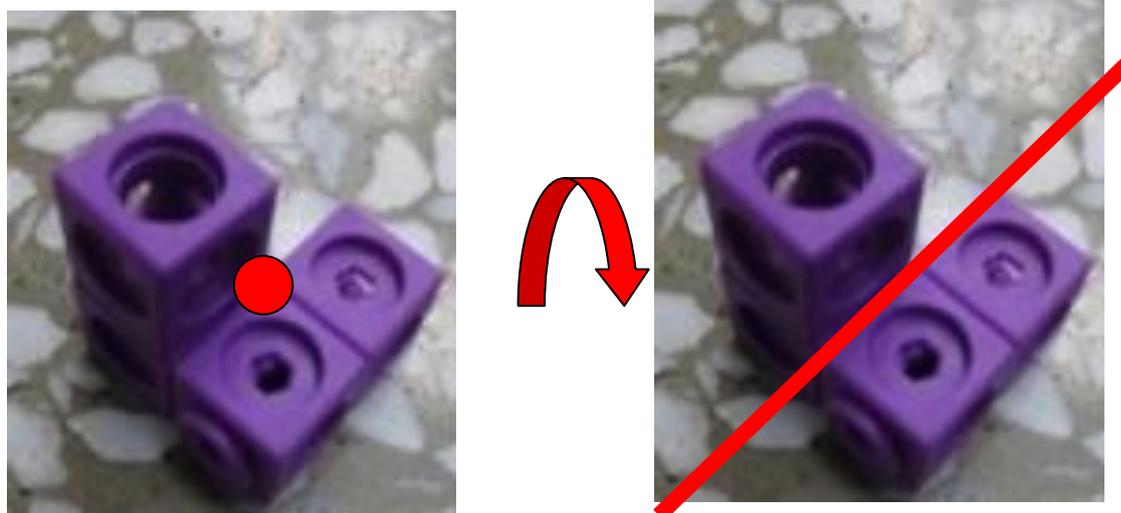


圖 15 左旋型連塊點對稱標示圖

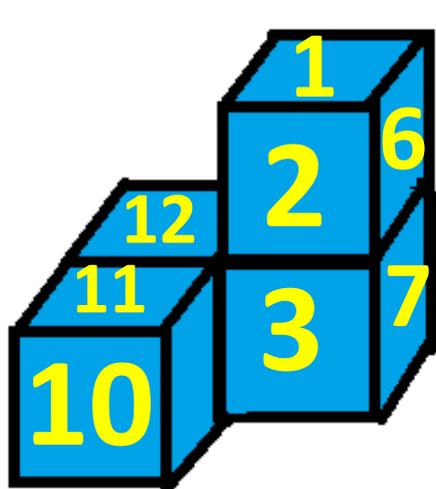


圖 16-1 左旋型連塊前視圖

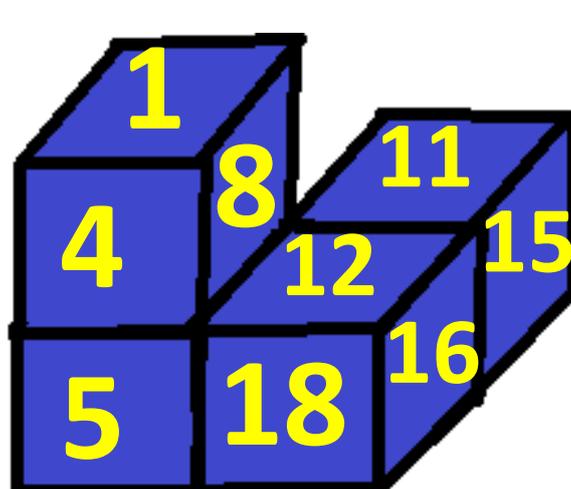


圖 16-2 左旋型連塊後視圖：

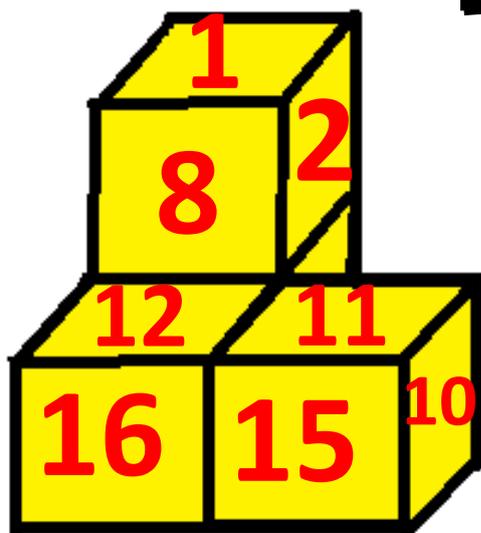


圖 16-3 左旋型連塊左視圖

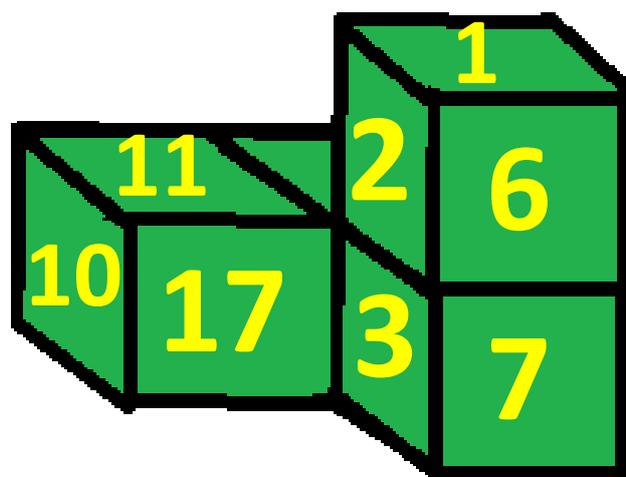


圖 16-4 左旋型連塊右視圖：

註:因左旋型為文字敘述，並非代號，所以下面的解釋當中皆以 A 型連塊代替。

(1)A1、A10 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A1	A10	說明
		<p>以 A1 連塊作為基準，A10 連塊為 A1 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(2)A2、A11 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A2	A11	說明
		<p>以 A2 連塊作為基準，A11 連塊為 A2 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(3)A3、A12 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A3	A12	說明
		<p>以 A3 連塊作為基準，A12 連塊為 A3 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(4)A4、A13 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A4	A13	說明
		<p>以 A4 連塊作為基準，A13 連塊為 A4 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(5)A5、A14 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A5	A14	說明
		<p>以 A5 連塊作為基準，A14 連塊為 A5 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(6)A6、A15 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A6	A15	說明
		<p>以 A6 連塊作為基準，A15 連塊為 A6 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(7)A7、A16 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A7	A16	說明
		<p>以 A7 連塊作為基準，A16 連塊為 A7 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(8)A8、A17 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

A8	A17	說明
		<p>以 A8 連塊作為基準，A17 連塊為 A8 連塊往前翻轉 90 度再順向旋轉 180 度的重複連塊。</p>

(9)A 型五連塊延伸結果：

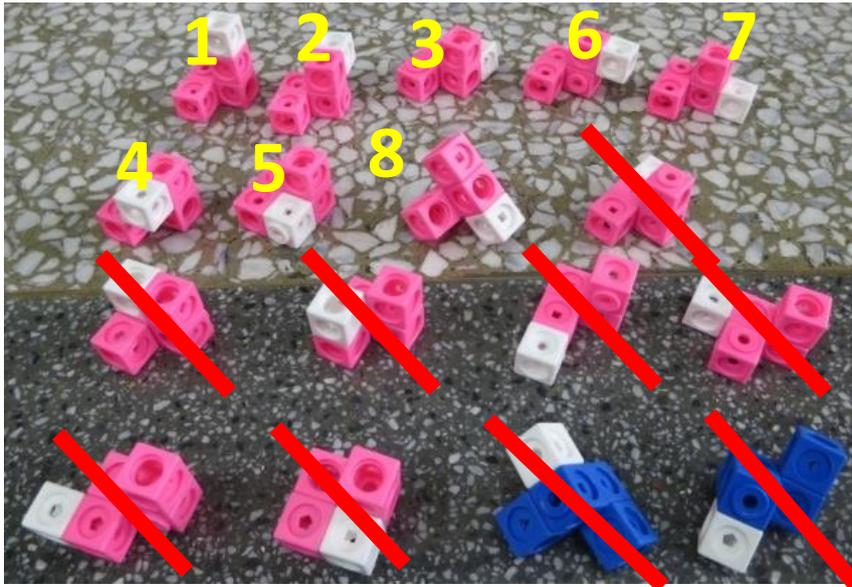


圖 17 左旋型連塊延伸圖

經由上述的整理可以得出，A9~A17 共計九個連塊與其他連塊重複，留下連塊 A1~A8(如圖 17)，因此，A 型連塊延伸的五連塊共計剩下八個。

7.分支型連塊延伸

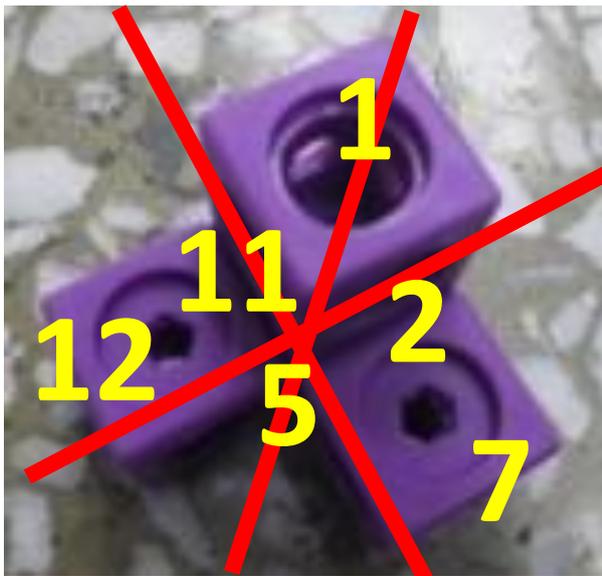


圖 18-1 分支型連塊延伸點前視標示圖

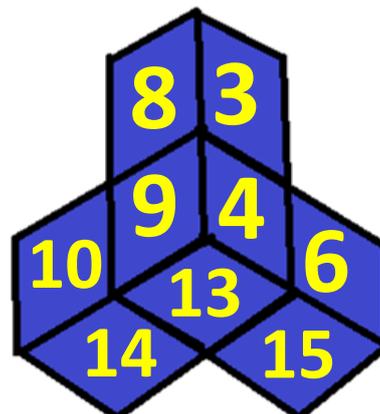
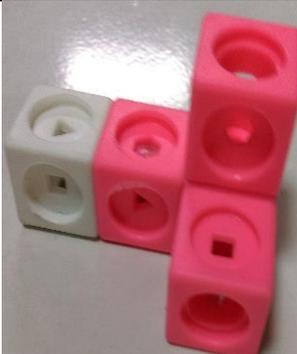


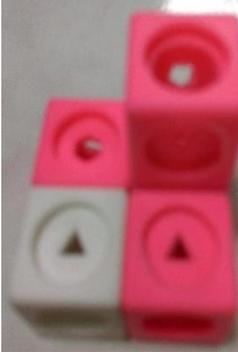
圖 18-2 分支型連塊延伸點標示(後視圖)

註:因分支型為文字敘述，並非代號，所以下面的解釋當中皆以 B 型連塊代替。

(1)B1、B7、B12 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

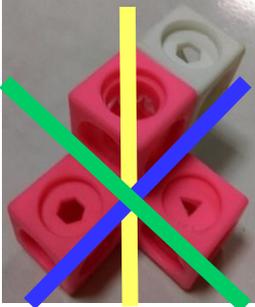
B1	B7	B12	說明
			<p>以 B1 連塊作為基準，B7 連塊為 B1 連塊往右翻轉 90 度再順向旋轉 90 度的重複連塊，B12 連塊為 B1 連塊往後翻轉 90 度再逆向旋轉 90 度的重複連塊。</p>

(2) B2、B5、B11 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

B2	B5	B11	說明
			<p>以 B2 連塊作為基準，B5 連塊 B2 連塊往右翻轉 90 度再順向旋轉 90 度的重複連塊，B11 連塊為 B2 連塊往後翻轉 90 度再逆向旋轉 90 度的重複連塊。</p>

(3) B3、B6、B8、B10、B14、B15 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

註：此組重複連塊因較難表示，因此設定三條對稱軸分別為 X、Y、Z，X 為黃軸，Y 為綠軸，Z 為藍軸。

B3	B6	B8	說明
			<p>以 B3 連塊作為基準，B6 連塊為 B3 連塊 Z 軸鏡射的重複連塊，B8 連塊為 B3 連塊 X 軸鏡射的重複連塊，B10 連塊為 B3 連塊往後翻轉 90 度再逆向旋轉 90 度的重複連塊，B14 連塊為 B3 連塊往右翻轉 90 度再逆向旋轉 90 度的重複連塊，B15 連塊為 B3 連塊 Y 軸鏡射的重複連塊。</p>
B10	B14	B15	
			

(4) B4、B9、B13 連塊延伸點經過鏡射、旋轉皆為同一種

B4	B9	B13	說明
			<p>以 B4 連塊作為基準，B9 連塊為 B4 連塊往後翻轉 90 度再逆向旋轉 90 度的重複連塊，B13 連塊為 B4 連塊往右翻轉 90 度再順向旋轉 90 度的重複連塊。</p>

(5)B 型五連塊延伸結果：

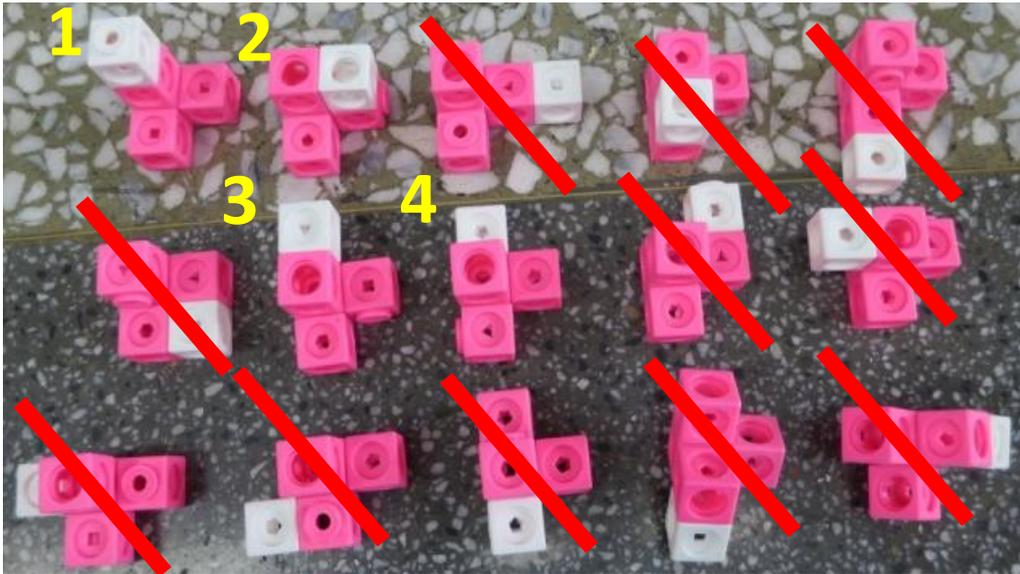


圖 19 分支型連塊延伸圖

經由上述的整理可以得出，B5~B15 共計十一個連塊與其他連塊重複，留下連塊 B1、B2、B3、B4(如圖 19)，因此，B 型連塊延伸的五連塊共計剩下四個。

8.連塊延伸總整理

以上就是所有立體四連塊延伸五連塊的結果，為了便於表示及紀錄，我將左旋型連塊及分支型連塊分別表示為 A 和 B，其餘則為 T、O、Z、I、L。立體五連塊的延伸結果總計四十五個(見下圖)，分別為 T1~T8、O1~O2、Z1~Z6、I1~I3、L1~L13、A1~A9、B1~B4，而根據維基百科——多連立方體(2015)指出，立體五連塊共計有二十三個，因此有二十二個連塊與其他連塊經過鏡射、翻轉會重複。

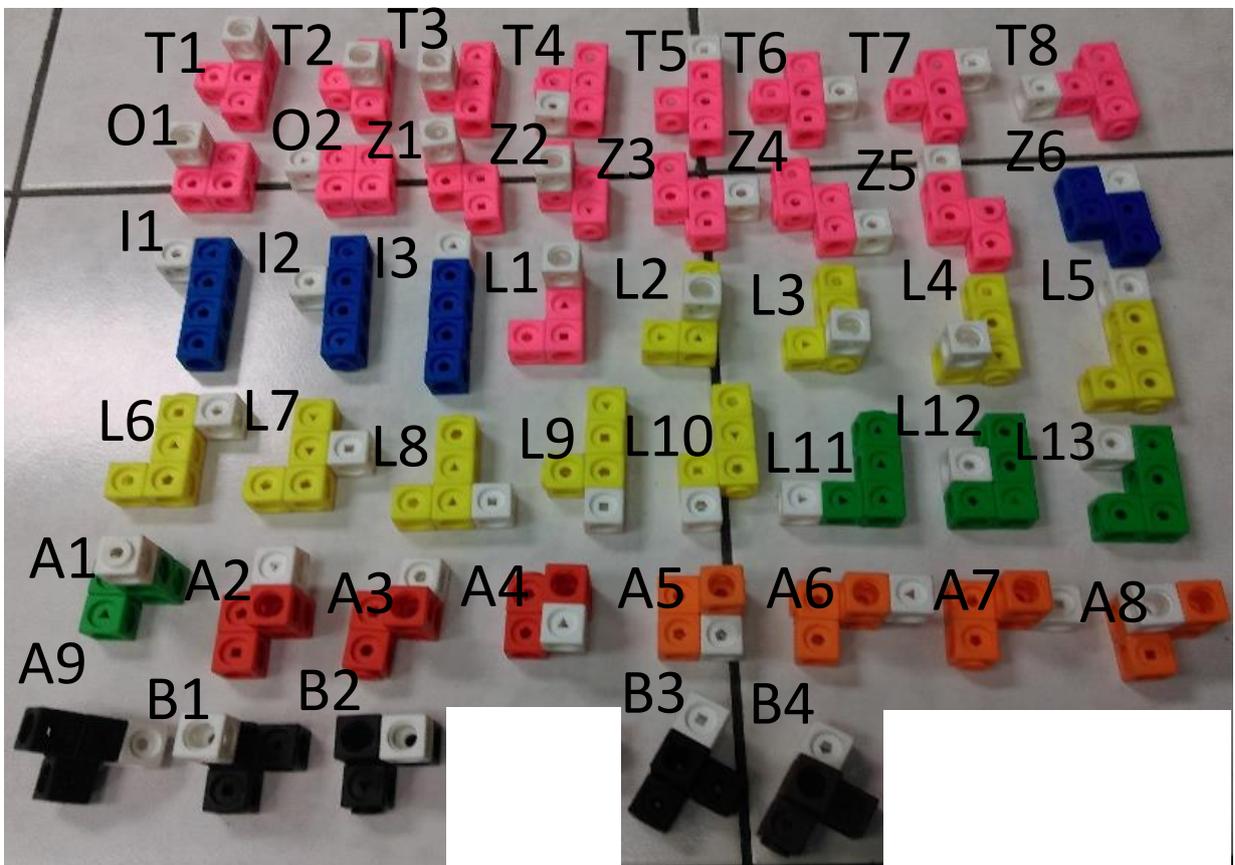


圖 20 A、B、T、O、Z、I、L 型連塊總延伸圖

從圖 20 可得知，七種立體四連塊的延伸，仍有重複的連塊，刪去結果及過程如下：

- (一)T1、L2、A7 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (二)T2、B4 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (三)T3、A9 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (四)T4、O2、Z6、L12 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (五)T5、I2、L9 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (六)T7、Z3、L7 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (七)T8、L8 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (八)O1、A5、A8、B2 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (九)Z1、A6 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (十)Z2、A3、B3 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (十一)Z5、L10 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (十二)I1、L5 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (十三)L3、B1 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種
- (十四)L4、A1 連塊經過鏡射、旋轉皆為同一種

以上就是連塊刪去的最後結果及過程，最後，不重複的連塊分別是 T1、T2、T3、T4、T5、T6、T7、T8、O1、Z1、Z2、Z4、Z5、I1、I3、L1、L3、L4、L6、L11、L13、A4、A6，共計二十三個立體五連塊，與原先的文獻資料合乎；我們也在刪去立體五連塊的過程當中學到了一個又快速又好的方法：只要從延伸的白色連塊一路延伸下去，看看往各個方向可以延伸出甚麼不一樣的四連塊，再用此四連塊去找出一樣的立體五連塊，就可以有效率地找出重複的連塊了，比起一個連塊一個連塊比對要快的許多。

(二)立體四連塊與五連塊二者關係探討

1.列舉立體四連塊與五連塊二者頂點、邊、面數量

接下來，就是要分析頂點、面、邊的關係了，首先，我們會先把所有立體四連塊及立體五連塊的頂點數、邊數、面數全部列出，在分析立體四連塊及立體五連塊之間的關係，則立體四連塊的頂點數、邊數、面數請見下表。

表 3

立體四連塊頂點、邊、面數量一覽表

四連塊編號	頂點數量	邊的數量	面的數量
T	12	26	18
O	8	20	16
Z	12	26	18
I	8	24	18
L	10	24	18
A	12	26	18
B	13	27	18

(1)在頂點的部分 O 和 I 都是長方體，所以都是 8 個頂點，而 T 型連塊和 Z 型連塊則是外面三個連塊都有四個頂點，所以是 $4 \times 3 = 12$ 而 B 型連塊的支點又多了一個頂點，所以 B 型連塊有 13 個頂點。Z 型連塊和 A 型連塊則都是外面的兩個連塊有 4 個頂點，內側的兩個連塊則個有 2 個連塊，所以是 $4 + 2 + 2 + 4 = 12$ ，共有 12 個頂點。最後的 L 連塊則為 $4 + 2 + 4 = 10$ ，共有 10 個頂點。

(2)在邊的部分，I 型連塊及 O 型連塊是兩種長方體，I 型連塊邊數算法是 $4 \times 4 + 4 + 4 = 24$ ，O 型連塊邊數算法是 $2 \times 4 \times 2 + 4 = 20$ ，而 Z 型連塊、L 型連塊和 A 型連塊則一樣是一條線型的特性，外側連塊會有 8 個邊，內側則是 Z 有 5 個邊，I、L 則有 4 個邊。所以 Z 型連塊是 $8 + 8 + 5 + 5 = 26$ 、L 型連塊和 A 型連塊都是 $8 + 8 + 4 + 4 = 24$ ，而 T 型連塊及 B 型連塊都是分支連塊，所以在外側的三個連塊都有 8 個邊，而 T 型連塊的支點有 2 個邊，B 型連塊的支點有

3 個邊，T 型連塊為 $8+8+8+2=26$ ，B 型連塊為 $8+8+8+3=27$ 。

(3)最後，在面的數量部分，僅有 O 型四連塊的面數為 16 個面，其餘都為 18 個面，原因是因為 O 形型四連塊是一個包覆型的形狀，所以每個連塊都會被蓋住兩個面，而每個連塊有 6 個面，所以 $24-8$ 只剩下 16 個面，而其他的連塊則分為一條線型及分支型，一條線型的 Z、I、L、A 連塊中，外側的兩個連塊只被覆蓋一個面，內側的兩個連塊則是被覆蓋兩個連塊， $24-(2+2+1+1)=18$ ，共計 18 個面，而最後的分支連塊中，支點被外面的其他三個連塊所覆蓋，所以被覆蓋了三個面，而外面的連塊則被覆蓋一個面，所以 $24-(3+1+1+1)=18$ ，也是 18 個面。

接下來則是 23 個立體五連塊的頂點、邊、面數量，數據如下：

表 4

立體五連塊頂點、邊、面數量一覽表

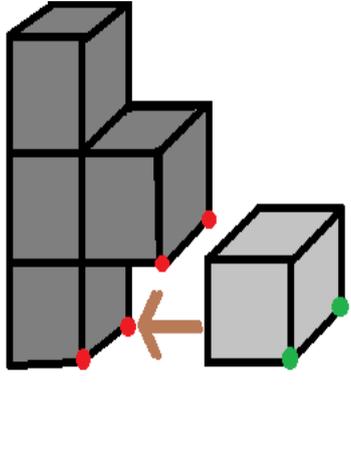
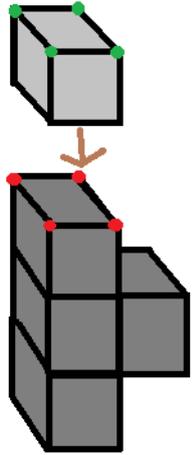
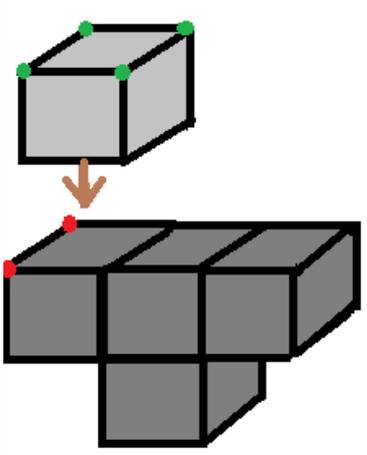
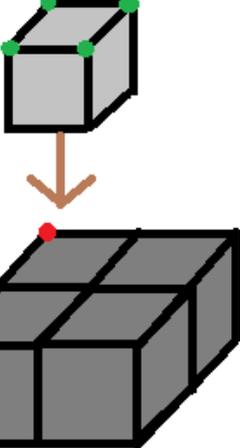
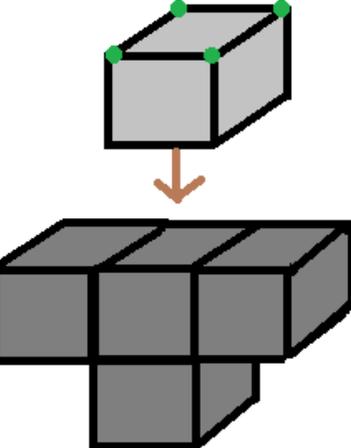
五連塊編號	頂點數量	邊的數量	面的數量
T1	14	31	22
T2	16	32	22
T3	14	33	22
T4	10	25	20
T5	12	30	22
T6	16	32	22
T7	14	31	22
T8	12	30	22
O1	11	26	20
Z1	14	29	22
Z2	15	30	22
Z4	14	29	22
Z5	12	28	22
I1	10	29	22
I3	8	28	22
L1	12	29	22
L3	13	30	22
L4	12	30	22
L6	12	29	22
L11	10	28	22
L13	12	28	22
A2	14	31	22
A4	14	31	22

2. 立體四連塊與五連塊頂點、邊、面數量關係

(1)在頂點的部分，頂點的延伸種類分為五種，分別為原頂點數-4+2、原頂點數-4+4、原頂點數-2+4、原頂點數-1+4、原頂點數-0+4。而表 5 為五種延伸情況的對照圖，紅點為被覆蓋住的頂點，綠點為延伸連塊的新頂點。

表 5

五連塊頂點數延伸示意圖

種類	原頂點數-4+2	原頂點數-4+4	原頂點數-2+4
示意圖			
種類	原頂點數-1+4	原頂點數-0+4	
示意圖			

(1)第一種通常是因為連塊在轉角，才會覆蓋住原本的四個頂點，本身卻只暴露出 2 個頂點，代表的立體五連塊編號是 $T4(12-4+2=10)$ 。

(2)第二種情況通常是新連塊連著外面的連塊延伸，覆蓋住原本的四個頂點，本身又再加上四個頂點，代表的立體五連塊有 $T5(12-4+4=12)$ 、 $T8(12-4+4=12)$ 、 $Z5(12-4+4=12)$ 、 $I3(8-4+4=8)$ 、 $L11(10-4+4=10)$ 。

(3)第三種通常都是新連塊延伸在原本外面的連塊，覆蓋住了 2 個頂點，但本身又再增加 4 的頂點，代表的立體五連塊有 $T1(12-2+4=14)$ 、 $T3(12-2+4=14)$ 、 $T7(12-2+4=14)$ 、 $Z1(12-2+4=14)$ 、 $Z4(12-2+4=14)$ 、 $I1(8-2+4=10)$ 、 $L1(10-2+4=12)$ 、 $L4(10-2+4=12)$ 、 $L6(10-2+4=12)$ 、 $L13(10-2+4=12)$ 、 $A2(12-2+4=14)$ 、 $A4(12-2+4=14)$ 。

(4)第四種通常都是連塊延伸在中間的連塊上，覆蓋住中間連塊的一個頂點，自己再增加 4 個頂點，代表的立體五連塊有 $O1(8-1+4=11)$ 、 $Z2(12-1+4=15)$ 、 $L3(10-1+4=13)$ 。

(5)最後一種通常都是延伸在延伸在平面連塊的支點上面，不覆蓋到任何原本的頂點，而本身在加上四個頂點，代表的連塊有 $T2(12-0+4=16)$ 、 $T6(12-0+4=16)$ 。

(二)在邊數的部分，延伸則分為兩種：新連塊連接兩面、新連塊連接一面，新連塊連接兩面的只有 $T4$ ，新連塊連接一面的則是剩下的所有連塊；而新連塊連接一面又分為四種。

1.第一種連接了兩個面，代表的連塊只有 $T4$ ，新連塊覆蓋住了六個邊，而自身又再增加五條邊，所以比原先的邊數少 1。

2.第二種新連塊連接一面的代表立體五連塊則是剩下的所有 22 個連塊，新連塊連接一面的第一種是此種連塊只會覆蓋住自身的 4 個邊，所以新連塊會多出 8 個邊。

3.如果新連塊延伸在 Z、I、L、A 的中間或 O 的上方，則新連塊會覆蓋原本的兩條邊，所以是原邊數-2+8。

4.T、Z、I、L、A 的外側連塊則是原邊數-3+8。

5.T 的支點則是原連塊-1+8。

(三)在面的部份和立體四連塊一樣，除了從 O 型連塊延伸的 O1 是 20 個面之外，還有一個例外，T4 連塊因為和 O2 連塊一樣，所以從 O 型連塊延伸的只有 20 個面，其他的連塊都為 22 個面。

參、研究結論及建議

一、研究結論

(一)本研究使用了窮舉法，共計發現了十二種平面五連塊，十一種立體五連塊，共計二十三種立體五連塊。

(二)在四連塊延伸五連塊的部分，雖有一些延伸的變化關係，但並沒有發現較規律性的數據關係。

(三)因為只有 O 形四連塊的每個連塊都被覆蓋兩個面，所以只要基礎型是 O 型的 T4、O1 都僅有 20 個面。

二、研究建議

(一)因為本次研究和實驗受到時間的侷限，因此只有做立體五連塊的分析，希望在未來的時間，可以更進一步往立體六連塊發展。

(二)本報告的圖是較難讓人閱讀，像是照片背景不恰當、手繪圖過於簡陋等等，如果有機會，可以利用 3D 繪圖軟體繪製連塊，以便讓讀者可以更清楚的了解此研究。

(三)本研究僅有探討頂點、邊、面的數量關係，未來還可加入角數，並且在頂點數部分增加凹角及尖角的可能性，可能會有更新奇的發現。

(四)在查文獻資料時，我發現其實近年來已經很少人會接觸連塊數學，希望我國可以除了基本課程之外，可添加更多更多元的課程，讓很多主題式數學更加的被推廣。

肆、引註資料:

維基百科 (2016)。Category:多連塊。取自

<https://zh.wikipedia.org/wiki/Category:%E5%A4%9A%E9%80%A3%E5%A1%8A>

維基百科 (2015)。五格骨牌。取自

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%94%E6%A0%BC%E9%AA%A8%E7%89%8C>

維基百科 (2015)。多連立方體。取自

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E9%80%A3%E7%AB%8B%E6%96%B9%E9%AB%94>

李鈺祺 (2013)。五方連塊上的一些拼圖遊戲。取自 <http://hdl.handle.net/11296/exaz8g>

賴韻如、莊芳儀、黃雅琳、田丞晏、陳義翔(2009)。五方連塊之乾坤大挪移

武功祕笈。取自 <http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/080403.pdf>

大頭(2015)。請問正方形七連塊有多少種?。取自

<https://tw.answers.yahoo.com/question/index?qid=20070104000016KK10640>

王玉珍、陳榴明(無日期)。連塊拼拼樂。取自

<http://mathseed.ntue.edu.tw/10%E9%AB%98%E9%9B%84%E5%B8%82%E9%B9%BD%E5%9F%95%E5%9C%8B%E5%B0%8F%E9%99%B3%E6%A6%B4%E6%98%8E.pdf>

均一教育平台(無日期)。線對稱圖形的定義。取自

<https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-grade-5-a/m3sdb-c/v/AolhiGZd-bs>

簡瑞真(2003)。數學教師知識庫。取自

http://mtedu.utaipei.edu.tw/mathweb/showtopic.asp?TOPIC_ID=1578&Forum_id=51&page=1&sdt

科學月刊(2010)。多方塊的謎題。取自
http://scimonth.blogspot.tw/2010/12/blog-post_1360.html