投稿類別:自然科學

篇名:

三角形三邊外接正方形與正三角形後性質的探討

作者:

張業叡。花蓮縣立自強國民中學。八年八班。

指導老師:

陳禹翔老師

壹、前言

一、研究動機

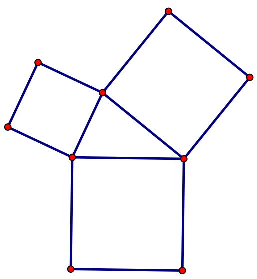
之前參加一個寒假的數學營隊中，老師在上課時講到了有關畢氏定理的一種題目，並外接正方形，之後老師將直角三角形改成任意三角形進行外接的動作，發現了許多性質，所以我想透過這次的小論文，想辦法找出新的性質，並且加以統整。

二、研究目的

1.發掘此圖形連線後所產生的性質，並加以證明。
2.統整並分類這些性質。
3.討論如果外接圖形改成正三角形，是否也有類似性質。
4.討論如果外接圖形改成半圓形，有沒有其他的性質。

三、研究方法

(一)做一任意三角形。
(二)以三角形三邊為邊長，向外做出正方形(如圖一)　。
(三)將任意頂點連線，並從中觀察其性質。
(四)將外圍圖形改成三角形，觀察其性質。
(五)將外圍圖形改成任一圖形，並觀察其性質。



圖一

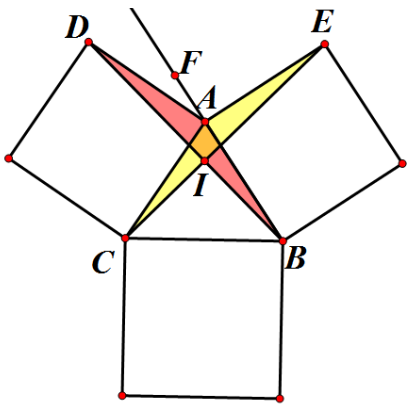
貳、正文

(一)、外接正方形

1.長度性質 0

性質(1)

連接 E、C，D、B　，則$\triangle ABE \cong \triangle ADC$ 。



圖二

證明：

做$\overrightarrow{BA}$輔助線

則$\angle FAD = \angle AEB + \angle ABE$ (外角定理)

$\because \overline{AE} = \overline{AD}, \overline{AC} = \overline{AB}, \angle CAE = \angle DAB$

$\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS 全等)

性質(2)

連接 E、C，D、B，則$\angle$DIE = 90°。

證明 ：

由性質一得知

ΔABD $\cong$ ΔACE

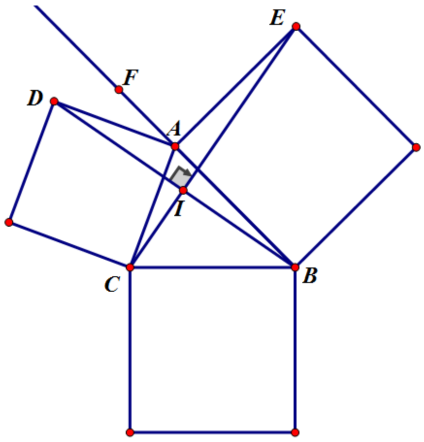
$\because$ $\angle$DAF = $\angle$ADB + $\angle$ABD(外角定理)

且$\angle$DAF + $\angle$FAE

= $\angle$ADB + $\angle$AEB + $\angle$DIE (外角定理)

$\therefore$ $\angle$FAE = $\angle$DIE = 90°。

得證。



圖三

性質(3)：

連接 E、C，D、B，H、G，則 A、I、B、G、E 共圓。

證明

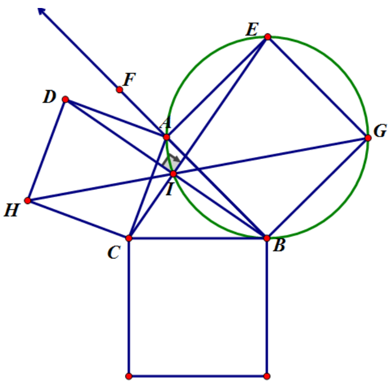
由性質二得知

$\because$ $\angle$DIE = 90°

$\therefore$ $\angle$EIB + $\angle$EGB = 180°

$\Rightarrow$A、I、B、G、E 共圓。

得證。



圖四

性質(4)：

連接 E、C，D、B，H、G，則$\overline{EB}, \overline{DC}, \overline{HG}$ 三線段共點。

證明：

由性質三得知

A、I、B、G、E 共圓

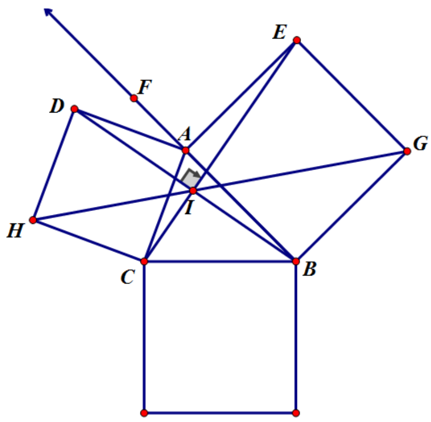
$\therefore$ $\angle$AIG = 90° (圓周角)

同理可證$\angle$AIH = 90°

$\because$ $\overline{HG}$為一直線

$\therefore$ $\overline{EB}, \overline{DC}, \overline{HG}$ 三線段共點。

得證。



圖五

性質(5)

連接 D、G，A、E，則$\frac{\overline{DG}}{\overline{AE}} = \sqrt{2}$。

證明:

做輔助線$\overline{DB}, \overline{BG}$

$\because \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \sqrt{2}$ (等腰直角三角形)

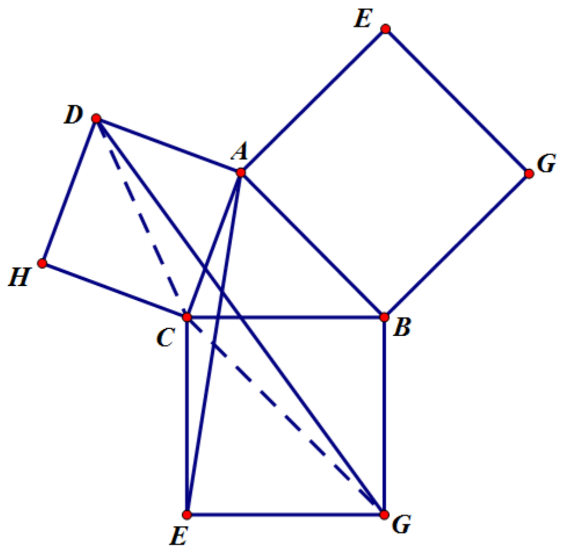
$\therefore \frac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = \sqrt{2}$ (等腰直角三角形)

$\angle DBG = 90^{\circ} + \angle ABC = \angle ABE$

$\because \Delta DBG \sim \Delta ABE$ (SAS 相似)

$\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{AE}} = \sqrt{2}$

得證。



圖六

2.面積性質

性質(1)

連接 D、E，F、G，H、I，

則ΔABC 的面積 $\cong$ ΔADE 的面積 $\cong$ ΔBFG 的面積 $\cong$ ΔCHI 的面積。

證明：

$\because \Delta ABC$ 的面積 $= a\,b\sin(\angle 3)$

且 ΔCHI 的面積 $= a\,b\sin\left(180^{\circ} - \angle 3\right)$

$= a\,b\sin(\angle 3)$

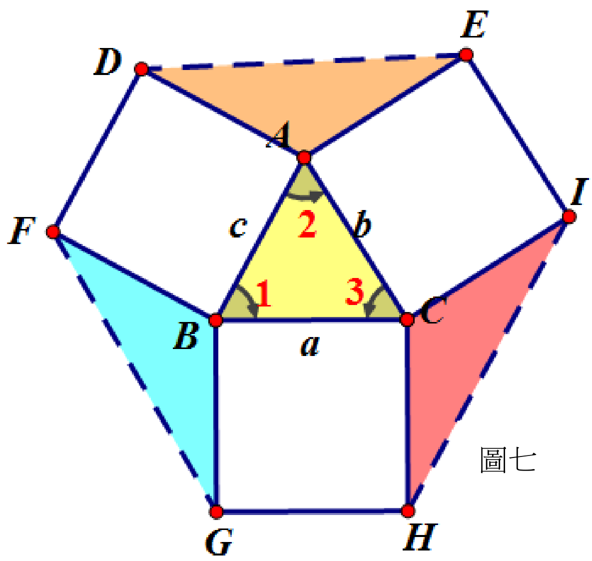
$\therefore \Delta ABC$ 的面積 $\cong \Delta CHI$ 的面積

同理可證

ΔABC 的面積 $\cong \Delta ADE$ 的面積 $\cong$

ΔBFG 的面積 $\cong \Delta CHI$ 的面積

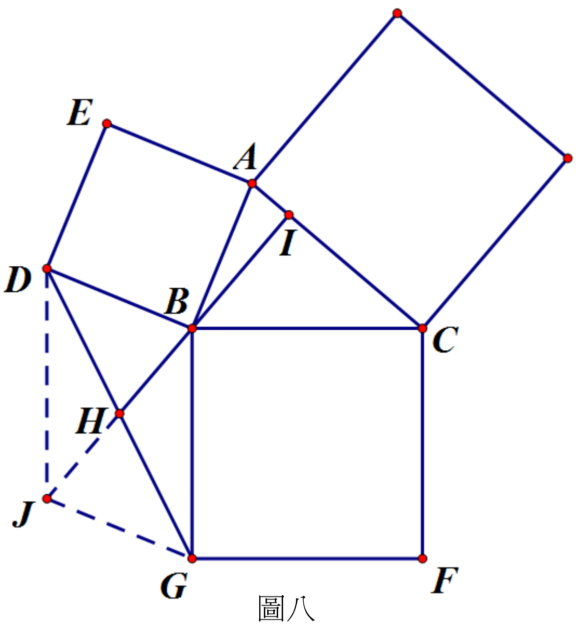
得證。



圖七

性質(2-1)

做$\overline{DG}$中點H，過 B 點做 H 的射線，與$\overline{AC}$相交於 I 點，則$\Delta BJG \cong \Delta CAB$。



圖八

證明：

以 G 點做 DB 的平行線；

以 D 點做 BG 的平行線，

使兩線交於 J 點。

則$\overline{GB} = \overline{BC}$；

$\overline{JG} = \overline{DB} = \overline{AB}$

$\angle ABC = 180^{\circ} - \angle DBG = \angle BGJ$

得到$\Delta BJG \cong \Delta CAB$

得證。

性質(2-2)

做$\overline{DG}$中點H，過 B 點做 H 的射線，與$\overline{AC}$相交於 I 點，則$\angle BIC = 90^{\circ}$。

證明：

根據性質(2-1)

$\because \angle ICB = \angle JBG$

$\angle JBG + 90^{\circ} + \angle IBC = 180^{\circ}$

$= \angle IBC + \angle ICB + \angle BIC$

則$\angle BIC = 90^{\circ}$

得證。

性質(2-3)

做$\overline{DG}$中點H，過 B 點做 H 的射線，與$\overline{AC}$相交於 I 點，則$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AC}$。

證明：

根據性質(2-1)

$\frac{1}{2}\overline{BJ} = \overline{BH}$

$\overline{BJ} = \overline{AC}$

則$\overline{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

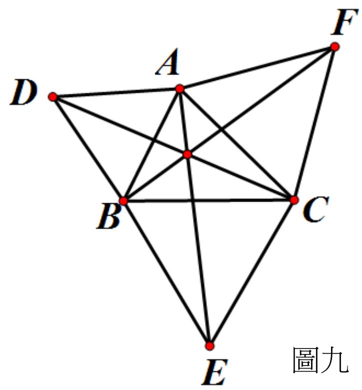
得證。

(二)外接正三角形

1.長度性質

性質(1)

連接 A、E，D、C，B、F，則$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{BF}}$。



圖九

證明：

$\because \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DB}}$，$\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{BC}}$

且$\angle\mathrm{DBA} = 60^{\circ} + \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ABE}$

$\therefore \Delta\mathrm{ABE} \cong \Delta\mathrm{DBC}$

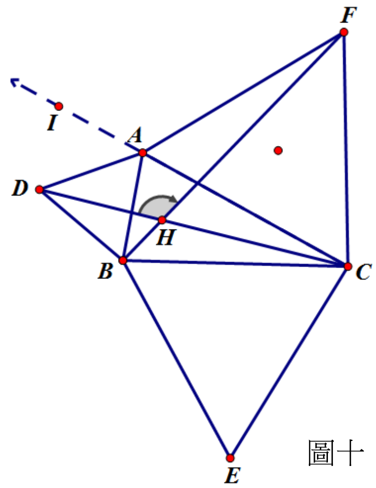
則$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DC}}$

同理可證$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{BF}}$

得證。

性質(2)

連接 C、D，B、F，則$\angle\mathrm{DHF} = 120^{\circ}$



圖十

證明：

作$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$則$\angle\mathrm{IAD} = \angle\mathrm{ADC} + \angle\mathrm{DCA}$(外角定理)

跟據性質(1)的全等得到

$\angle\mathrm{IAD} = \angle\mathrm{ADH} + \angle\mathrm{AFH}$

且$\angle\mathrm{DAF} = \angle\mathrm{DHF} + \angle\mathrm{ADH} + \angle\mathrm{AFH}$

則$\angle\mathrm{IAF} = 120^{\circ} = \angle\mathrm{DHF}$

得證。

性質(2)

連接 C、D，B、F，若$\overline{\mathrm{CD}}$ 和$\overline{\mathrm{BF}}$相交於 G 點

則 A、G、E 三點必共線

證明：

ΔAFC 有一外接圓

$\because \angle FAC = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ} = \angle FAC$

$\therefore$ A、C、F、G 四點共圓

則$\angle AGF = 60^{\circ}$

且$\angle BGC + \angle = 120^{\circ}$

$\angle BGC + \angle BEC = 180^{\circ}$

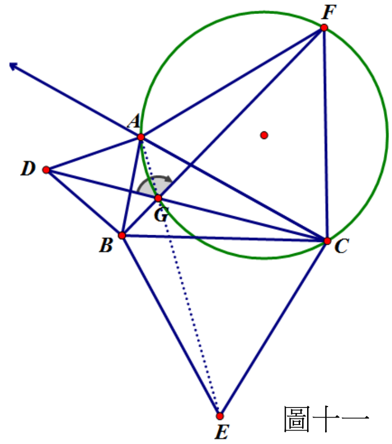
則 G、B、E、C 共圓

$\because \angle BCE = \angle BGE = 60^{\circ}$

$\therefore \angle AGF + \angle FGC + \angle CGE = 180^{\circ}$

則 A、G、E 三點必共線

得證。



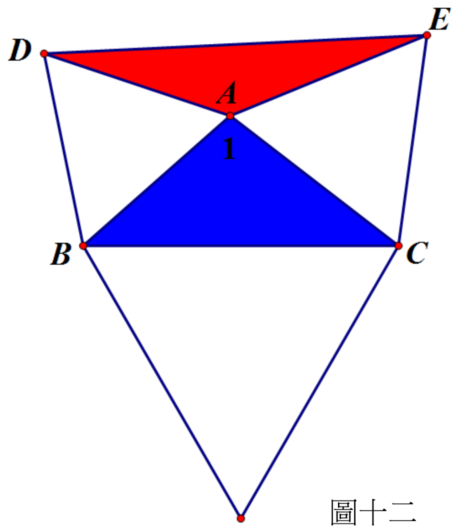
圖十一

2.面積性質

性質(1-1)

連接$\overline{DE}$，若$180^{\circ} > \angle 1 > 60^{\circ}$時

則$\dfrac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta DAE\text{ 的面積}} = \dfrac{\sin(\angle 1)}{\sin(\angle 1 - 60^{\circ})}$



圖十二

證明：

ΔABC 的面積$=\overline{AB}\,\overline{AC}\sin(\angle 1)$

$\overline{AD} = \overline{AB}$，$\overline{AE} = \overline{AC}$

ΔADE 的面積 $= \overline{AB}\,\overline{AC}\sin(240^{\circ} - \angle 1)$

$$\frac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta DAE\text{ 的面積}} = \frac{\overline{AB}\,\overline{AC}\sin(\angle 1)}{\overline{AB}\,\overline{AC}\sin(240^{\circ} - \angle 1)}$$

$$\frac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta DAE\text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin(240^{\circ} - \angle 1)}$$

$$\frac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta DAE\text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin(180^{\circ} - 240^{\circ} + \angle 1)}$$

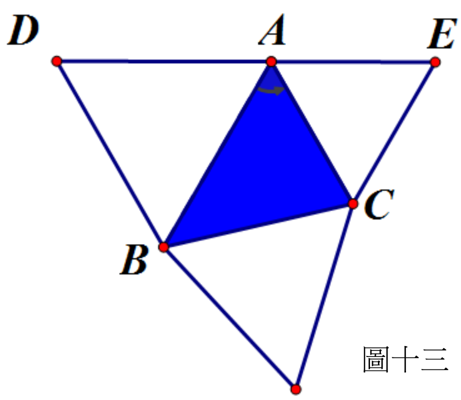
$$\frac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta DAE\text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin(\angle 1 - 60^{\circ})}$$

得證。

性質(1-2)

連接$\overline{DE}$，若$\angle 1 = 60^{\circ}$時

則ΔDAE 的面積 $= 0$



圖十三

證明：

則$\angle DAB + \angle DAB + \angle ABC = 180^{\circ}$

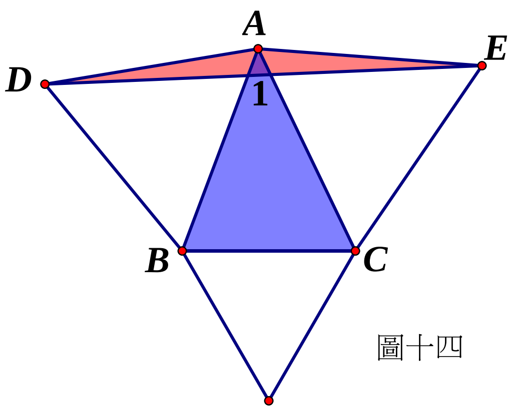
$\overline{AD}\,\overline{AE}\sin 180^{\circ} = 0$

得證。

性質(1-3)

連接$\overline{DE}$，若$60^{\circ} > \angle 1 > 0^{\circ}$時

則$\frac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta DAE \text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin(\angle 1 - 60^{\circ})}$



圖十四

ΔABC 的面積$=\overline{AB}\,\overline{AC}\sin(\angle 1)$

$\overline{AD} = \overline{AB}$，$\overline{AE} = \overline{AC}$

ΔADE 的面積 $= \overline{AB}\,\overline{AC}\sin(120^{\circ} + \angle 1)$

$$\frac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta DAE \text{ 的面積}} = \frac{\overline{AB}\,\overline{AC}\sin(\angle 1)}{\overline{AB}\,\overline{AC}\sin(120^{\circ}+\angle 1)}$$

$$\frac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta DAE \text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin(120^{\circ} + \angle 1)}$$

$$\frac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta DAE \text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin\left(180^{\circ} - (120^{\circ} + \angle 1)\right)}$$

$$\frac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta DAE \text{ 的面積}} = \frac{\sin(\angle 1)}{\sin\left(60^{\circ} - \angle 1\right)}$$

得證。

(三)外接其他圖形

性質 1.

做一直角三角形ＡＢＣ分別以Ｂ、Ｃ，Ａ、Ｂ，Ａ、Ｃ為直徑做半圓，

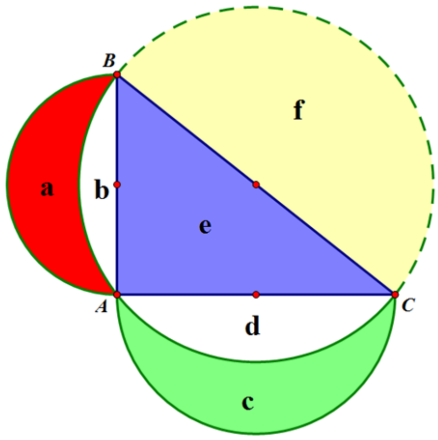
則紅色區域的面積+綠色區域的面積=藍色區域的面積

證明:

$\because\ f = b + e + d$

$\therefore a + b + c + d = b + e + d$ (畢氏定理)

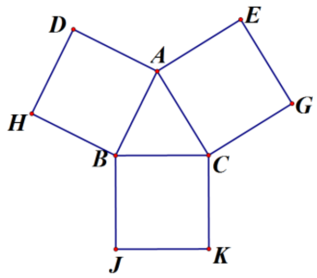
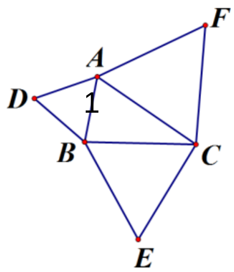
則$a + c = e$



圖十五

參、結論

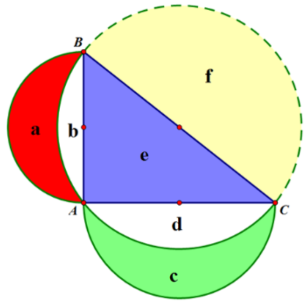
一、正方形與三角形性質

<table>
<tr><td>圖形
性質</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>邊長</td><td>連接 D、C，E、B，H、G
則$\overline{DC}:\overline{EB}:\overline{HG}$
$=1:1:\sqrt{2}$</td><td colspan="2">連接 D、C，A、E，B、F
$\overline{DC}:\overline{AE}:\overline{BF}$
$=1:1:1$</td></tr>
<tr><td>角度</td><td>連接 D、C，E、B 交於 I
則$\angle DIE = \angle EGC$
$= \angle CIB = \angle BID = 90^\circ$</td><td colspan="2">連接 D、C，A、E，B、F 交於 O
則$\angle DOA = \angle AOF = \angle FOC$
$= \angle COE = \angle EOB = \angle BOD = 60^\circ$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">相似</td><td>$\Delta ADC \cong \Delta AEB$(SAS 全等)</td><td colspan="2" rowspan="2">$\Delta DBC \cong \Delta ABE$(SAS 全等)</td></tr>
<tr><td>$\Delta ADC \sim \Delta AHG$(SAS 相似)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">面積</td><td rowspan="3">ΔABC 的面積
$= \Delta HBJ$ 的面積
$= \Delta GCK$ 的面積
$= \Delta DAE$ 的面積</td><td>$180^\circ > \angle 1 > 60^\circ$</td><td>$\dfrac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta ADF \text{ 的面積}}$
$= \dfrac{\sin(\angle 1)}{\sin(\angle 1 - 60^\circ)}$</td></tr>
<tr><td>$\angle 1 = 60^\circ$</td><td>ΔADF 的面積 $= 0$</td></tr>
<tr><td>$60^\circ > \angle 1 > 0^\circ$</td><td>$\dfrac{\sin(\angle 1)}{\sin(\angle 1 - 60^\circ)}$</td></tr>
</table>

二、半月形的觀察

外接半圓後發現

半月形 a 的面積+半月形 c 的面積=三角形 e 的面積



肆、參考資料

一、Arthur Benjamin(2017)。數學大觀念(第九版)。貓頭鷹出版。

二、別萊利曼(1916)。趣味幾何學。五南出版。

三、Arturo Sangalli(2015)。畢達哥拉斯的復仇(初版)。三民出版。

四、歐幾里得。沒有王者之路幾合原本。經典 3.0 出版。

五、查坦・波斯基。神奇酷數學 5 奇妙的幾何。親少兒出版。

六、查坦・波斯基。神奇酷數學 8 來玩幾何推理。親少兒出版。