投稿類別：自然科學

篇名：

多根柱河內塔最佳分盤法探究~以Scratch堆疊程式輔助運算

作者：

陳羿潔。花蓮縣立壽豐國中。國二禮班

呂婷芸。花蓮縣立壽豐國中。國二禮班

林祐民。花蓮縣立壽豐國中。國三義班

指導老師：

陳錦松老師

翟方妤老師

壹●前言

一、研究動機

我們在 59 屆科展的時候，利用 Scratch 堆疊程式，完成不限柱數與不限盤數的最少步數的遊戲程式，評審老師對我們表示肯定，也得到了數學科第二名的佳績。評審老師問我們一個問題，可不可以把最佳的分盤法，也用 Scratch 程式寫出來，先提示玩河內塔遊戲的人如何分盤，這樣整個河內塔的研究就會很完整。我們利用暑假的時間進行多根柱河內塔小論文的研究，也希望能完成了不限柱數與不限盤數「最佳分盤法」的 Scratch 程式。

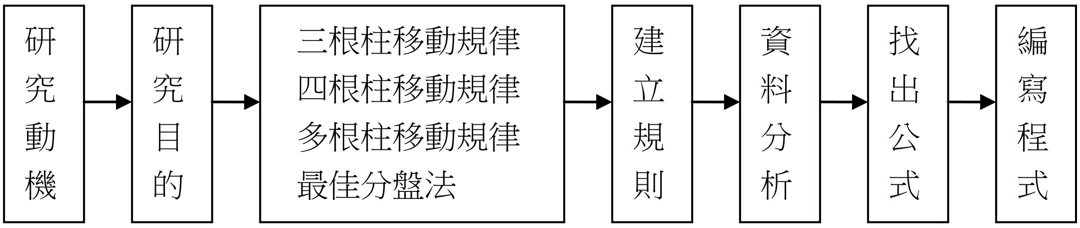
二、研究目的

我們依據評審的建議進行最佳分盤法的 Scratch 堆疊程式探究，這是推導多根柱最少步數的核心基礎。希望能夠籍由簡易的算式推導與演算，只要具備國二所學的數列與級數的觀念就能理解，結合 Scratch 堆疊程式的運算思維，容易讓初學者實際操作。

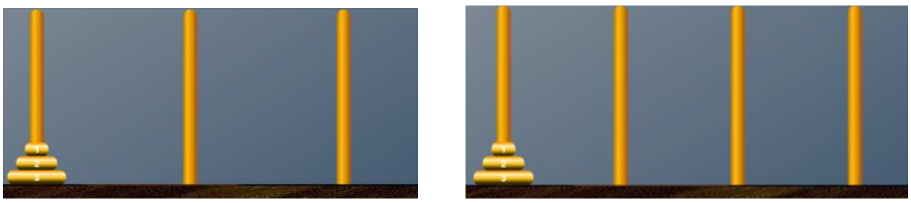
我們希望在 59 屆科展 Scratch 堆疊程式的研究基礎上，編寫出不限柱數、不限盤數的最少步數以及最佳分盤法的程式，提供對河內塔有興趣的國內外研究者，一個不一樣的想法與參考的依據，讓瞭解河內塔不再是難題，並且推廣多根柱河內塔遊戲！

三、研究方法與架構

河內塔基本架構是有三根柱子，起始柱子上有大小不同的盤子。遊戲規定一次只能拿起一個盤子，而且小盤一定要放在大盤上。遊戲的最終目標是要把所有的圓盤，都移到最後一根的終點柱上。我們先找出三根柱的走法與規律，之後再找出四根柱，五根柱，多根柱的規律。研究架構如下：



（圖1）：研究架構圖（資料來源：本小組自行繪製）



（圖2）三根柱及四根柱每根柱的名稱說明（來源：本小組網路螢幕複製編輯[1]）

[1] 河內之塔網路遊戲，http://home.educities.edu.tw/oddest/math181.htm 〈註六〉

貳●正文

一、找出規律

我們先從三根柱、四根柱、五根柱至多根柱的分盤法，找出多根柱的最少步數公式，依序進行的步驟如下：

(一)三根柱的規律

我們發現要完成河內塔的遊戲，有其規律性。例如要完成5盤的遊戲，必需先在分盤柱上完成4盤，要完成4盤，需先完成3盤，要完成2盤，需先完成1盤。當底盤移到終點柱之後，再重複上述的步驟一次。因此，5盤最少步數是由4盤最少步數乘2再加1；4盤最少步數是3盤最少步數乘2再加1，3盤最少步數是2盤步數乘2再加1，依此類推。 如圖3所示。

（圖3）三根柱3盤的移動規律，需2*3+1=7步

（表1）河內塔三根柱的規律（來源：本小組整理）

三根柱盤數 ***m***	1	2	3	4	5	*m*
最少步數 $S_3(m)$	1	3	7	15	31	2^m-1
規律性 1 (2 倍前盤步數+1)	1	2*1+1	2*3+1	2*7+1	2*15+1	2* $S_3(m\text{-}1)+1$
步 數 差 $J_3(m)=S_3(m)-S_3(m-1)$	1 （2^0）	2 （2^1）	4 （2^2）	8 （2^3）	16 （2^4）	$2^{m\text{-}1}$
規律性 2 (所有步數差之和)	1	1+2	1+2+4	1+2+4+8	1+2+4+8+16	$\sum_{x=1}^{m} J_3(x)$

由上表可知，三根柱m盤的最少步數表示為$S_3(m)$，而n根柱m盤的最少步數表示為$S_n(m)$。而大家熟知的河內塔三根柱 m 盤的最少步數公式是 2^m-1。我們發現了兩個重要的規律，這兩個規律是我們要推導出四根柱、五根柱及多根柱最少步數的關鍵。

規律1：是利用前盤（$m-1$盤）最少步數乘2再加1，即：$S_n(m)=2*S_n(m-1)+1$，就可算出n根柱m盤的最少步數 $S_n(m)$。

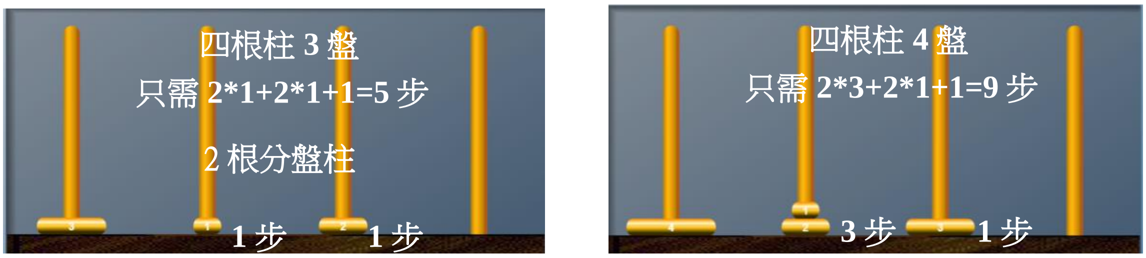
規律2：是用所有步數差$J_n(m)$之和，即：$\sum_{x=1}^{m} J_n(x)$，即可算出n根柱m盤的最少步數。

我們發現三根柱的步數差恰好是2的次方數遞增的規律，而且各有1個。基於（規律2）步數差重要規律，我們定義n根柱2^x步數差的個數為 $D_n(2^x)$。對應三根柱而言，2^x步數差的個數為：$D_3(2)=D_3(4)=D_3(8)=D_3(16)=D_3(2^x)=1$

(二)四根柱的規律及分盤法

四根柱的河內塔也有其規律性，我們發現最少的步數有明顯的減少，原因為多一根柱，

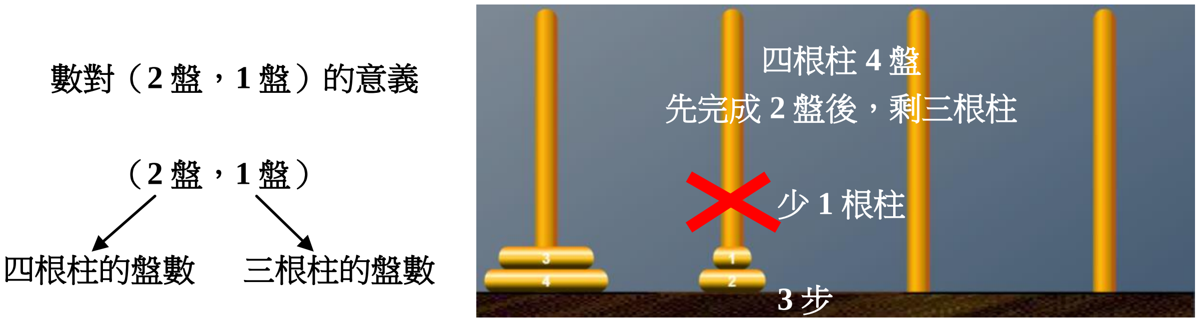
就可以將圓盤先分配在2根分盤柱上，不同於三根柱只能將圓盤分在1根分盤柱上。例如要完成3盤的遊戲，就不需要先完成2盤，可以先將2盤分成1盤和1盤，寫成數對（1盤，1盤）。因為1盤只需1步，所以四根柱的3盤只需$S_4(3)$=2*1+2*1+1=5步（規律1）即可完成。同理，要完成4盤的遊戲，可以先將3盤分成2盤和1盤，寫成數對（2盤，1盤）。因為四根柱的2盤需3步，1盤只需1步，最少步數為$S_4(4)$ =2*3+2*1+1=9步（規律1）。



（圖4）四根柱有2根分盤柱，可減少很多步數

而5盤的遊戲，就不需先完成4盤，可以先將4盤分成3盤和1盤，寫成數對（3盤，1盤）。因為四根柱的3盤需5步，1盤只需1步，所以最少步數為$S_4(5)$ =2*5+2*1+1=10+2+1=13步（規律1），增加的盤數依此類推。

我們發現分盤方式也有其規律，能減少很多步數的試驗。就數對（2盤，1盤）的敘述而言，前面的2盤是對應於四根柱的最少步數，而後面的1盤是對應於三根柱的最少步數。因為先完成2盤之後，就少一根柱可分盤，而後面的1盤等同於三根柱的步數。圖示如下：



（圖5）四根柱分盤的數對意義說明

由上可知，只要依據上列的分盤「敘述」，我們就可以快速的找出最少步數的分盤規律，可以大量減少不同分盤方式的步數試驗。我們試著將四根柱1~10盤用上述的分盤「敘述」找出各盤所對應的最少步數，結果發現了一個簡單易懂的分盤規則，說明於表二。

（表2）四根柱1~10盤的分盤規律（有2根分盤柱，所以會有2個2步差）

四根柱盤數 *m*	1	2	3
盤數最佳分法	（0 盤，0 盤）	（1 盤，0 盤）	（1 盤，1 盤）
分盤說明	不用分盤	只能先分 1 盤	各分 1 盤步數最少
規律 1	2*0+1	2*1+1	2*1+2*1+1
最少步數 $S_4(m)$	1	3	5
步數差 $J_4(m)$	1	2	2

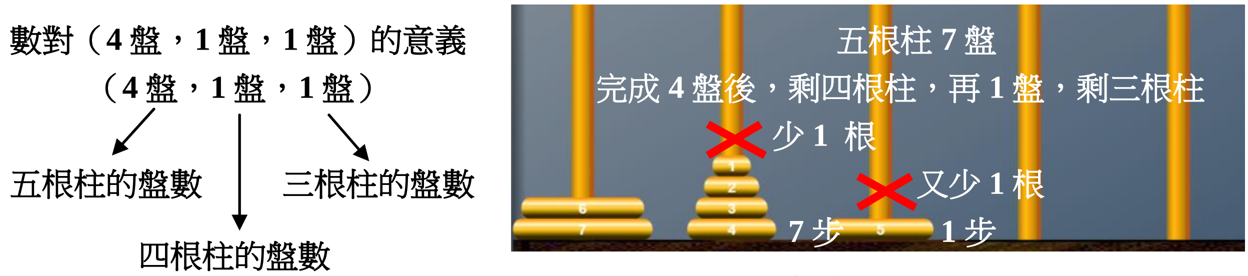
四根柱盤數 m	4	5	6
盤數最佳分法	（2 盤，1 盤）	（3 盤，1 盤）	（3 盤，2 盤）→ 在三根柱增加盤數
分盤說明	先從四根柱增盤	先從四根柱增盤	四根柱的 3 盤增為 4 盤時步數差為 4 三根柱的 1 盤增為 2 盤時步數差為 2
規律 1	2*3+2*1+1	2*5+2*1+1	2*5+2*3+1
最少步數 $S_4(m)$	9	13	17
步數差 $J_4(m)$	4	4	4

四根柱盤數 m	7	8	9	10
盤數最佳分法	（4 盤，2 盤）	（5 盤，2 盤）	（6 盤，2 盤）	（6 盤，3 盤）
規律 1	9 步 2*9+2*3+1	13 步 2*13+2*3+1	17 步 2*17+2*3+1	7 步 2*17+2*7+1
分盤說明	2 步差用完 換 $J_4(m)$=4 先從四根柱增盤	先從四根柱增盤	先從四根柱增盤	$J_4(m)$=4 用完 換 $J_3(m)$=4 最後在三根柱增盤
最少步數 $S_4(m)$	25	33	41	49
步數差 $J_4(m)$	8	8	8	8

我們依據這樣的推導規律，只要依序填入前盤的最少步數，就能將四根柱64盤每盤的最少步數整理出來。其中，我們將數對（*r* 盤，*s* 盤），簡化為（*r*，*s*）。由規律2可知，四根柱10盤的步數也等於所有步數差之和=1*1+2*2+4*3+8*4=49步。

三、五根柱的規律及最佳分盤法：

五根柱的河內塔也和四根柱一樣有其規律性，因為五根柱有3根分盤柱，需要的步數減少更多。依據（圖5）四根柱分盤的數對說明方式，也同樣可對應到五根柱。圖示如下：



（圖6）五根柱7盤的分盤數對意義說明

因此，數對（4盤，1盤，1盤）的「敘述」為：五根柱的4盤與四根柱的1盤及三根柱的1盤。最小步數$S_5(7)$ =2*7+2*1+2*1+1=19步。依據上述分盤規律，及四根柱分盤的經驗，

簡單易懂的分盤規則，說明於表三。我們將五根柱1~12盤的步數整理如下，其中我們將數對（*q* 盤，*r* 盤，*s*盤），簡化為 （*q*，*r*，*s*）。

（表3）五根柱1~12盤的分盤規律（有3根分盤柱，所以會有3個2步差）

五根柱盤數 m	1	2	3	4
盤數最佳分法	(0 盤，0 盤，0 盤)	(1 盤，0 盤，0 盤)	(1 盤，1 盤，0 盤)	(1 盤，1 盤，1 盤)
規律 1	2*0+1	2*1+1	2*1+2*1+1	2*1+2*1+2*1+1
最少步數 $S_5(m)$	1	3	5	7
步數差 $J_5(m)$	1	2	2	2

五根柱盤數 ***m***	5	6	7	8
盤數最佳分法	（2，1，1）	（3，1，1）	（4，1，1）	（4，2，1）
規律 1	3 步 2*3+2*1+2*1+1	5 步 2*5+2*1+2*1+1	7 步 2*7+2*1+2*1+1	3 步 2*7+2*3+2*1+1
分盤說明	$D_5(2)$=3（3 個） 先從五根柱增盤	先從五根柱增盤	先從五根柱增盤	$D_4(2)$=2（2 個） 接著從四根柱增盤
最少步數 $S_5(m)$	11	15	19	23
步數差 $J_5(m)$	4	4	4	4

五根柱盤數 ***m***	9	10	11	12
盤數最佳分法	（4，3，1）	（4，3，2）	（5，3，2）	（6，3，2）
規律 1	5 步 2*7+2*5+2*1+1	3 步 2*7+2*5+2*3+1	11 步 2*11+2*5+2*3+1	15 步 2*15+2*5+2*3+1
分盤說明	從四根柱增盤	$D_3(2)$=1（1 個） 最後從三根柱增盤	$J_5(m)$=2 用完 換 $J_5(m)$=4	$D_5(4)$=6（6 個） 可用到 11~16 盤
最少步數 $S_5(m)$	27	31	39	47
步數差 $J_5(m)$	4	4	8	8

我們依據這樣的推導規律，將五根柱64盤每盤的最少步數整理出來。由規律2可知，五根柱12盤的步數也等於所有步數差之和=1*1+2*3+4*6+8*2=47步。

參●結論

一、多根柱步數差的規律

我們找出了多根柱的規律，發現每多一盤的步數差，有 2 的次方的規律。我們將 2 的次方步數差個數分析如下，發現四根柱的 4 步差個數等於三~四根柱的 2 步差個數之和(紅色框)。

步數差數(個) 柱 數	1 步差個數	2 步差個數	4 步差個數	8 步差個數	16 步差個數	32 步差個數	64 步差個數	128 步差個數	256 步差個數	512 步差個數	1024 步差個數
三根柱	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
四根柱	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
五根柱	1	3	6	10	15	21					
六根柱	1	4	10	20	35						

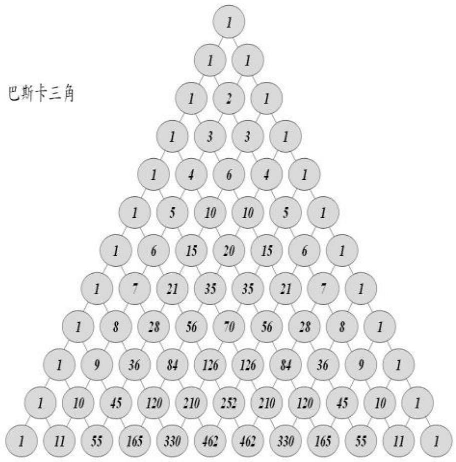
依此類推，五根柱的 8 步差個數等於三~五根柱的 4 步差個數之和（藍色框），我們發現了步數差個數的規則。例如：$D_6(16)=D_3(8)+D_4(8)+D_5(8)+D_6(8)$ =1+4+10+20=35 個，如上圖**綠色框**所示。算式表示為：$D_n(2^x)=\sum_{y=3}^{n} D_y(2^{x-1})$。依據上述規則，我們將上表擴充到十根柱，製成表 5。因此，只要依據規律 2 的方法，將 *m* 盤所有（2 的次方步數差）*（2^x 的步數差個數）相加起來，就能算出多根柱最少步數的公式。

二、巴斯卡三角形

我們發現，不同柱數的步數差$D_n(2^x)$個數規律，讓（表4）形成了一個巴斯卡三角形[2]。所以我們只要把這個三角形所構成的數值用公式表示出來，就可以解開三根柱以上的公式解。

表 4　河內塔多根柱步數差個數的規律

步數差數(個) ＼ 柱數	1步差個數	2步差個數	4步差個數	8步差個數	16步差個數	32步差個數	64步差個數	128步差個數	256步差個數	512步差個數	1024步差個數
三根柱	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
四根柱	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
五根柱	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
六根柱	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
七根柱	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
八根柱	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
九根柱	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
十根柱	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448



（圖7）表五構成了一個巴斯卡三角形

我們搜集相關資料，找出了用組合數來表示步數差個數的方法。解題方法說明如下：對於 n 根柱而言，我們設定一個 a 值，做為組合數的第一個參數，且令 $a=n-3$。設定另一個 2 的次方數 x 值，做為組合數的第二個參數。經過我們的演算，所有巴斯卡三角形的數值可表示的組合數為： $D_n(2^x)=C_a^{a+x}=\dfrac{(a+x)!}{a!\,x!}$ （其中x！中文敘述為 x 階層，演算法則為：3! = 3*2*1，5! = 5*4*3*2*1，但組合數規定0! = 1，所以$C_a^a=1$，$C_0^a=1$）。

例如：六根柱32步差的個數，即$D_6(32)=D_6(2^5)$，可用組合數表示為：C_3^8（a=6－3=3；2^x=32，x=5），即$D_6(32)=C_3^8=\dfrac{8!}{3!5!}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$　。同理，八根柱64步差的個數，即$D_8(64)=D_8(2^6)=C_5^{11}=\dfrac{11!}{5!6!}=\dfrac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$　。

依據上述的定義，我們將（表4）的所有數值，用組合數表示成（表5）。

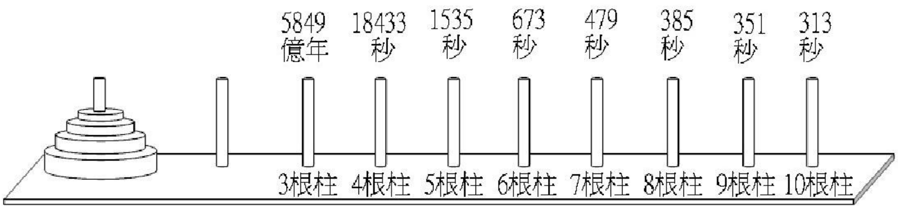
（表5）河內塔巴斯卡三角形的數值表示法

步數差數(個) ＼ 柱　數	1步差個數 2^0	2步差個數 2^1	4步差個數 2^2	8步差個數 2^3	16步差個數 2^4	32步差個數 2^5	64步差個數 2^6	128步差個數 2^7	256步差個數 2^8	512步差個數 2^9	1024步差個數 2^{10}
x 值= k 值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
三根柱 a=0	C_0^0 1	C_0^1 1	C_0^2 1	C_0^3 1	C_0^4 1	C_0^5 1	C_0^6 1	C_0^7 1	C_0^8 1	C_0^9 1	C_0^{10} 1

[2] 巴斯卡三角形的公式解，http://jishus.org/?p=598　〈註七〉

四根柱 a=1	C_1^1 1	C_1^2 2	C_1^3 3	C_1^4 4	C_1^5 5	C_1^6 6	C_1^7 7	C_1^8 8	C_1^9 9	C_1^{10} 10	C_1^{11} 11
五根柱 a=2	C_2^2 1	C_2^3 3	C_2^4 6	C_2^5 10	C_2^6 15	C_2^7 21	C_2^8 28	C_2^9 36	C_2^{10} 45	C_2^{11} 55	C_2^{12} 66
六根柱 a=3	C_3^3 1	C_3^4 4	C_3^5 10	C_3^6 20	C_3^7 35	C_3^8 56	C_3^9 84	C_3^{10} 120	C_3^{11} 165	C_3^{12} 220	C_3^{13} 286
七根柱 a=4	C_4^4 1	C_4^5 5	C_4^6 15	C_4^7 35	C_4^8 70	C_4^9 126	C_4^{10} 210	C_4^{11} 330	C_4^{12} 495	C_4^{13} 715	C_4^{14} 1001
八根柱 a=5	C_5^5 1	C_5^6 6	C_5^7 21	C_5^8 56	C_5^9 126	C_5^{10} 252	C_5^{11} 462	C_5^{12} 792	C_5^{13} 1287	C_5^{14} 2002	C_5^{15} 3003
九根柱 a=6	C_6^6 1	C_6^7 7	C_6^8 28	C_6^9 84	C_6^{10} 210	C_6^{11} 462	C_6^{12} 924	C_6^{13} 1716	C_6^{14} 3003	C_6^{15} 5005	C_6^{16} 8008
十根柱 a=7	C_7^7 1	C_7^8 8	C_7^9 36	C_7^{10} 120	C_7^{11} 330	C_7^{12} 792	C_7^{13} 1716	C_7^{14} 3432	C_7^{15} 6435	C_7^{16} 11440	C_7^{17} 19448

上表說明如下，以十根柱為例，1 步差有 1 個，2 步差有 8 個，4 步差有 36 個，即 $D_{10}(4)=36=C_7^9$ ；8 步差有 120 個，即 $D_{10}(8)=120=C_7^{10}$ ，，依此類推。因此，十根柱 64 盤所需的時間=$2^0*C_7^7+2^1*C_7^8+2^2*C_7^9+2^3*19=313$ 秒（因為 1+8+36+19=64），合計 5 分 13 秒。我們將三根柱至十根柱 64 盤，所需的時間圖示如下，我們的發現比國內相關研究更容易上手[3]：



（圖8）三根柱至十根柱64盤的最少步數

三、多根柱公式（$n\geq 3$）

接著，我們將多根柱的公式推導如下：若有n根柱（$n\geq 3$），m個圓盤，所求的最少步數為 $S_n(m)$。定義：$a=n-3$，x為2的次方值，我們需要先算出盤數 m 會落在那個 2^x 的步數差中。所以要先求出大於等於盤數m的最小 k 值（$k=x$），然後代入 $S_n(m)$ 的通式解。

步驟一：求 k值

k值公式：$m\leq\sum_{x=0}^{k}C_a^{a+x}$ ，先求大於等於m的最小 k 值。即第 m 盤會落在 2^k 步數差中。

步驟二：將 k值代入公式解

最少的步數$S_n(m)$等於（每個 2^x 的步數差）*（步數差的個數C_a^{a+x}）之和，通式解整理為：

$$n\text{ 柱 }m\text{ 盤公式：}S_n(m)=\sum_{x=0}^{k}2^xC_a^{a+x}-2^k\left(\sum_{x=0}^{k}C_a^{a+x}-m\right)$$

（其中$2^k\left(\sum_{x=0}^{k}C_a^{a+x}-m\right)$為超出 m 盤的數值，需要扣除）

3 〈柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係〉，44 屆高中科學展覽，22 頁。〈註一〉
〈n 柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找〉，中華民國第 51 屆中小學科學展覽（國中組）。〈註二〉

例如：10根柱有150盤，先求出 k 值：

步驟一：求k值

$150 \le \sum_{x=0}^{x=k} C_7^{7+x}$ ，150≤1+8+36+120，得k =3，即第150盤落在2^3的步數差中。

代入公式：

步驟二：$S_n(m) = \sum_{x=0}^{k} 2^x C_a^{a+x} - 2^k \left(\sum_{x=0}^{k} C_a^{a+x} - m \right)$

$S_{10}(150) = \sum_{x=0}^{3} 2^x C_7^{7+x} - 2^3 \left(\sum_{x=0}^{3} C_7^{7+x} - 150 \right)$

$= 1*1 + 2*8 + 4*36 + 8*120 - 8*(165 - 150)$

$= 1 + 16 + 144 + 960 - 120 = 1001$步

四、59屆科展的Scratch堆疊程式[4]

我們應用59屆科展的Scratch堆疊程式，堆疊出巴斯卡三角形中組合數的程式，先算出k值，然後進行不限柱數，不限盤數的最少步數計算，Scratch程式如下圖9所示：

(圖9) 最少步數的Scratch堆疊程式

[4] 〈揭開多根柱河內塔之神秘面紗~以 scratch 堆疊程式輔助運算〉，59 屆花蓮縣國中小科學展覽。〈註五〉

五、最佳分盤的Scratch堆疊程式

接著，我們想把多根柱的最佳分盤法用Scratch堆疊程式呈現出來，我們發現，最少步數的形成，是依序把各分盤柱所屬的不同步數差填滿所完成，而這個「依序」填滿，就是最佳分盤法的關鍵。例如，6根柱64盤的分盤方式，就是先從6根柱的1步差開始填➔接著2步差➔4步差➔8步差。

步數差數(個) / 柱 數	1步差個數 2^0	2步差個數 2^1	4步差個數 2^2	8步差個數 2^3
x 值	0	1	2	3
三根柱 a=0 3	C_0^0 1	C_0^1 1	C_0^2 1	C_0^3 ~~1~~ → 0
四根柱 a=1 6	C_1^1 1	C_1^2 2	C_1^3 3	C_1^4 ~~4~~ → 0
五根柱 a=2 19	C_2^2 1	C_2^3 3	C_2^4 6	C_2^5 ~~10~~ → 9
六根柱 a=3 35	C_3^3 1	C_3^4 4	C_3^5 10	C_3^6 20

各步數差盤數和= 4 +10+20+35=69>63

(63為需分盤的盤數)

圖 10 分盤法

左圖10說明如下：
箭頭方向為填盤次序，由多根柱往少根柱填盤。6根柱64盤，需有63盤來分盤，依序填盤之後，發現1步差、2步差、4步差及8步差都填滿之後，共計69盤，超出需分盤的63盤，有6盤之多。所以，五根柱的8步差只需填9盤即滿63盤。我們發現，填盤完成後，6根柱的分盤柱上會有35 (1+4+10+20)盤，5根柱的分盤柱上會有19(1+3+6+9)盤，4根柱的分盤柱上會6(1+2+3+0)盤，3根柱的分盤柱上會有3(1+1+1+0)盤。

依此規律，6根柱64盤的最佳分盤法為(35，19，6，3)。我們套用此規律，應用在59屆科展已堆疊完成的巴斯卡三角形中組合數的程式中，成功完成最佳分盤法的程式，如下圖9所示：

(圖11) 最佳分盤法的Scratch堆疊程式

六、結論與貢獻

五年前學長姐接觸河內塔的偶然，已找出了一個解題的架構，我們接手之後，也傳承了學長姐的精神，在不斷的努力與推展之下。將近三年來的用心研究，我們找出了多根柱分盤的規律性，所發現的規律1，是解開河內塔多根柱最少步數的基礎核心，簡單易懂。河內塔多根柱研究所需面對的最大問題就是分盤方式有太多種，如何找出最佳的分盤法，就是解開多根柱河內塔的關鍵。我們找出了最少「步數差」的依序分盤方式，很容易就建構出了一個巴斯卡三角形數列，利用規律2的想法推導出公式。而 2^x 步數差個數的表示法，$D_n(2^x)=C_a^{a+x}$（$a=n-3$），是我們解出多根柱公式的創意發想。我們的貢獻整理如下：

(一)最基本的演算法解題：沒有繁雜的算式推導與演算，只要具備國二所學的數列與級數的觀念就能理解，容易讓初學者實際操作，比國內外相關研究更容易上手。

(二)*n*根柱*m*盤的通式解：我們在104年小論文競賽已找出*n*柱*m*盤公式通式解，在59屆科展發展出Scratch堆疊程式解題，可提供國內外相關研究參考，也歡迎加以驗證。

(三)最佳分盤法的Scratch堆疊程式：玩**三根柱**河內塔的難題就是當盤數增加的時候，步數是2的次方增加，讓很多人沒有耐心來玩。其實只要**增加**河內塔的**柱數**，整個步數就會大量減少，如下圖的10根柱100盤，只需601步即可完成。因此，我們發展出來的Scratch堆疊程式就是一個「提示如何分盤」與「檢驗最少步數」的最佳工具，我們非常樂意提供Scratch堆疊程式給大眾無償使用。期盼我們五年來的努力與貢獻，能讓多根柱河內塔的遊戲能夠推廣出去，因為河內塔簡單的遊戲規則，卻是訓練手、眼、腦協調的最佳遊戲教具。

(圖 10) 10 根柱 100 盤，只需 601 步即可完成

肆●引註資料

一、圖書資料

註一、〈柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係〉，四十四屆中小學科學展覽（高中組）。

註二、〈n柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找〉，中華民國第51屆中小學科學展覽（國中組）。

註三、〈河內塔多根柱探討〉，103年花蓮縣國中小扶輪盃小論文競賽（國中組自然領域）。

註四、〈河內塔多根柱探討〉，104年花蓮縣國中小扶輪盃小論文競賽（國中組自然領域）。

註五、〈揭開多根柱河內塔之神秘面紗~以scratch堆疊程式輔助運算〉，108年花蓮縣59屆國中小科學展覽(國中組)。

二、網路資料

註六、河內之塔網路遊戲　http://home.educities.edu.tw/oddest/math181.htm

註七、巴斯卡三角形的公式解　http://jishus.org/?p=598