

節能減碳！

替垃圾車規劃最短路徑



學校：宜昌國中

隊伍名稱：讓愛麗絲早點回家

小組成員：顏崇佑、溫仲儒、林鼎浚、張瑋庭

指導老師：朱惟庸、吳珮甄

1

讓愛麗絲早點回家-

研究動機、目的/名詞簡介

2

文獻探討-

一筆畫問題/郵遞員問題

3

研究設計與實施-

研究對象/問題釐清與思考/解決方法

目錄

4

參考資料

六 讓愛麗絲早點回家-研究動機、目的

有時會看到垃圾車在同樣路段出現不止一次
因此我們想…

是不是有辦法**減少這些重複路段**，
不僅讓辛苦的清潔人員**早點回家**，
也能降低車子所造成的**能源耗費**。



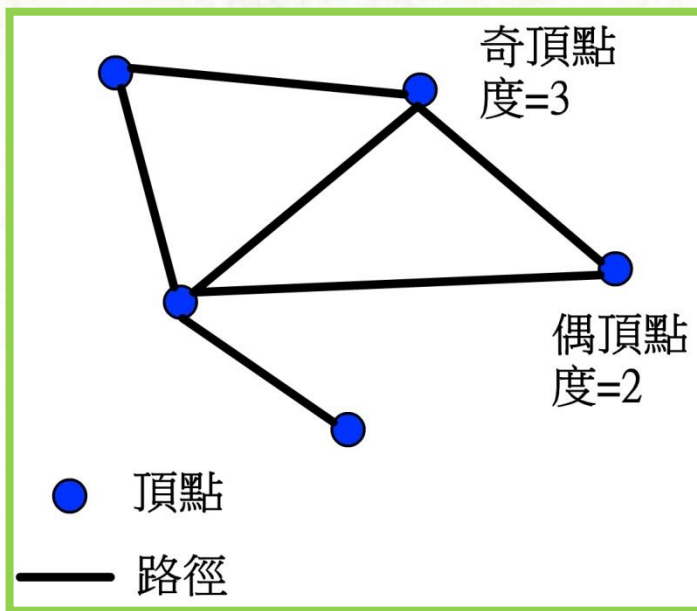


讓愛麗絲早點回家-名詞簡介



路徑

連接兩端點的線段



頂點

連接路徑的端點



奇頂點

連接奇數條路徑的端點



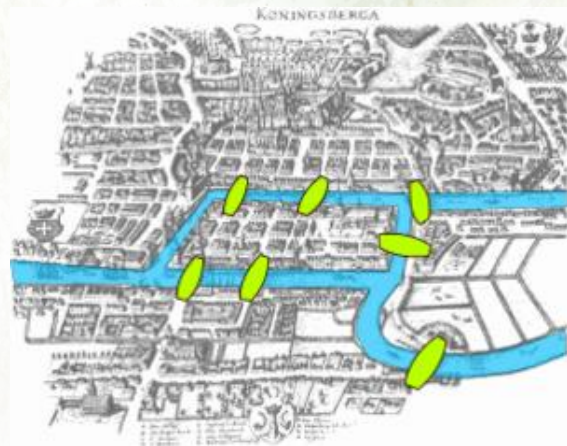
偶頂點

連接偶數條路徑的端點

圖 文獻探討—一筆畫問題

💡 從**歐拉**解決(俄羅斯)柯尼斯堡七橋問題開始

💡 結論：要畫完路徑，每個點都要**一進一出**，所以必須為偶頂點，而且隨便選一個頂點出發，都可完成。



💡 如果這個圖剛好有兩個奇頂點，那麼將**其中一個奇頂點當成出發點**，最後一定會把圖全部畫完，並**停在第二個奇頂點**，因此要一筆畫畫出圖且每條路不重複，只能存在0或2個奇頂點，這樣的圖形稱為**歐拉迴路(或歐拉路徑)**。

圖 文獻探討-郵遞員問題

☑ 在一個已知的地區，郵差需設法找到一條最短路徑，可以走過此地區所有的街道，且最後要**回到出發點**（此路徑需**通過所有邊至少一次**。）

若圖中

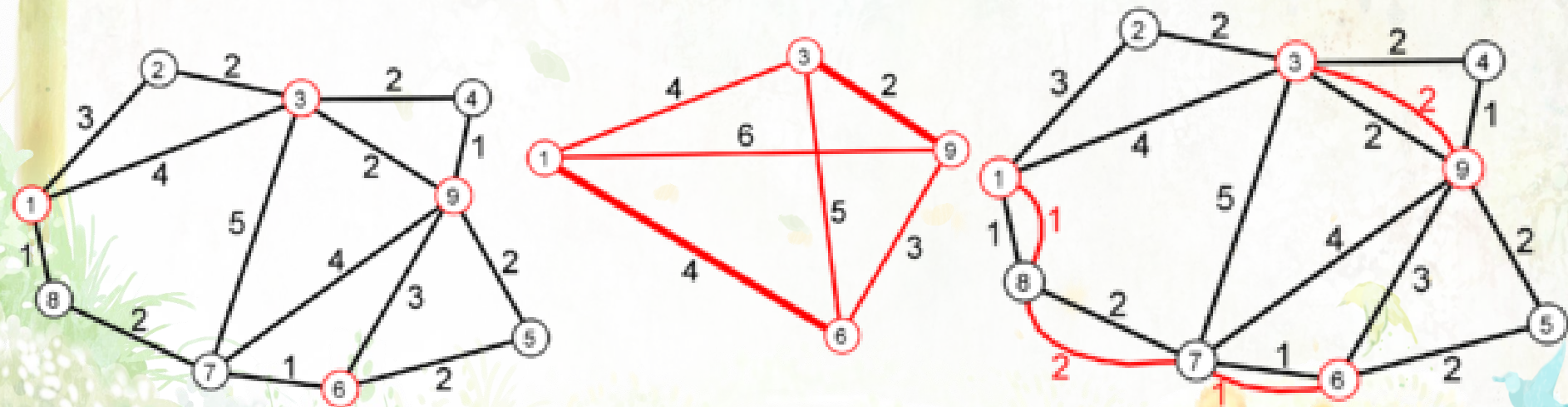
不存在歐拉迴路，其中必存在有奇數個邊的端點，且這類的端點一定**大於等於2個**。因此有些邊需要再**重複一次**，使**奇數**邊的端點變為**偶數**邊的端點。

有歐拉迴路，則任一個歐拉迴路即為此問題的解。

圖 文獻探討-郵遞員問題

解決方式

1. 找出需要處理的奇數點。
2. 將這些點完全連接，成為偶數點。
3. 端點兩兩配對，找出重複但最短的路徑。



(1, 2, 3, 4, 9, 3, 1, 8, 7, 3, 9, 7, 6, 9, 5, 6, 7, 8, 1) 即為一解，
圖中紅色的部份即為重複的邊。



研究設計與實施-研究對象



宜昌村垃圾車行經路線圖



研究設計與實施-研究對象

將946-TH，19:15開始的路線整理如下圖(單位：公里)：





研究設計與實施-研究對象

原本的路徑計算(單位：公里)：

V1→V2	V2→V3	V3→V4	V4→V5	V5→V6	V6→V7	V7→V8	V8→V2	V2→V3	V3→V7	V7→V6	V6→V4	V4→V3	V3→V2	V2→V8
0.35	0.05	0.06	0.07	0.13	0.09	0.1	0.18	0.05	0.16	0.09	0.11	0.06	0.05	0.18

V8→V9	V9→V10	V10→V11	V11→V9	V9→V10	V10→V12	V12→V13	V13→V14	V14→V15	V15→V14	V14→V16	V16→V17	V17→V16	V16→V10	V10→V12
0.1	0.04	0.22	0.15	0.04	0.3	0.36	0.04	0.14	0.14	0.25	0.07	0.07	0.12	0.3

V12→V18	V18→V19	V19→V20	V20→V19	V19→V21	V21→V22	V22→V23	V23→V13	V13→V23	V23→V21	V21→V19	V19→V18	total
0.4	0.21	0.06	0.06	0.08	0.05	0.25	0.3	0.3	0.09	0.08	0.21	6.16


原本經過頂點依序為：


V1→V2→V3→V4→V5→V6→V7→V8→V2→V3→V7→V6→V4
 →V3→V2→V8→V9→V10→V11→V9→V10→V12→V13→V14
 →V15→V14→V16→V17→V16→V10→V12→V18→V19→V20
 →V19→V21→V22→V23→V13→V23→V21→V19→V18。


原本總路徑長為6.16公里。

研究設計與實施-問題釐清與思考

圖形分析：


 每一條路口都能迴轉，這是一個無向圖。

 每一條路都要經過，所以這是一筆畫問題。

 每個迴路畫完後，要考慮進入點到出口點的最短路徑，所以是最短路徑問題。


改良條件：


 V1進-V18出。


 原本的路徑必須經過。

研究設計與實施-問題釐清與思考

圖形分類：

 單一路徑：無須考慮一筆畫問題。如果路徑的其中一端是死路，又不是進出點的話，這種路徑需一進一出需要把長度乘2。

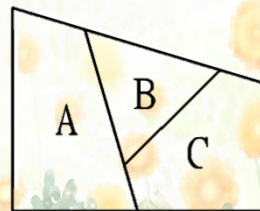
 單一迴圈：無須考慮一筆畫問題，只要考慮入口點到出口點的最短路徑問題。

 有共用邊的迴圈：要考慮一筆畫問題以及進入點與出口點的最短路徑問題。



單一路徑

單一迴圈

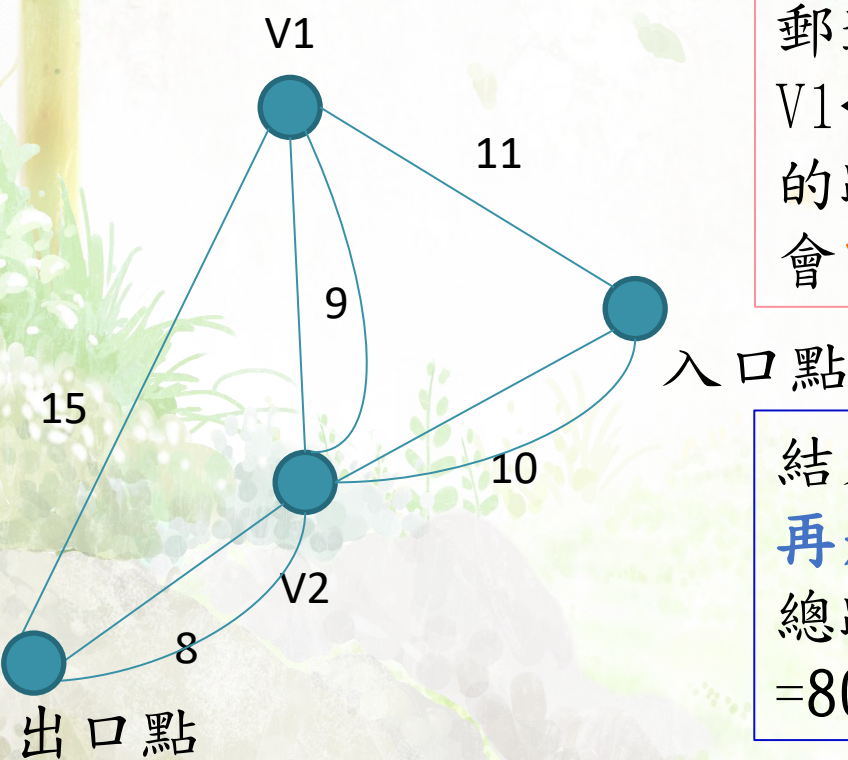


有共用邊的迴圈

✍ 研究設計與實施-問題釐清與思考

✍ 問題拆解：

👉 無向圖的一筆畫最短路徑問題，已經有郵遞員問題的解法，可以把圖所有路徑走完。範例：



郵遞員問題解法計算後，結果是重複 $V1 \leftrightarrow V2$ 路徑就能走完全部且成本最小的路徑，成本為 $10+8+15+9+9+11=62$ ，會回到入口。

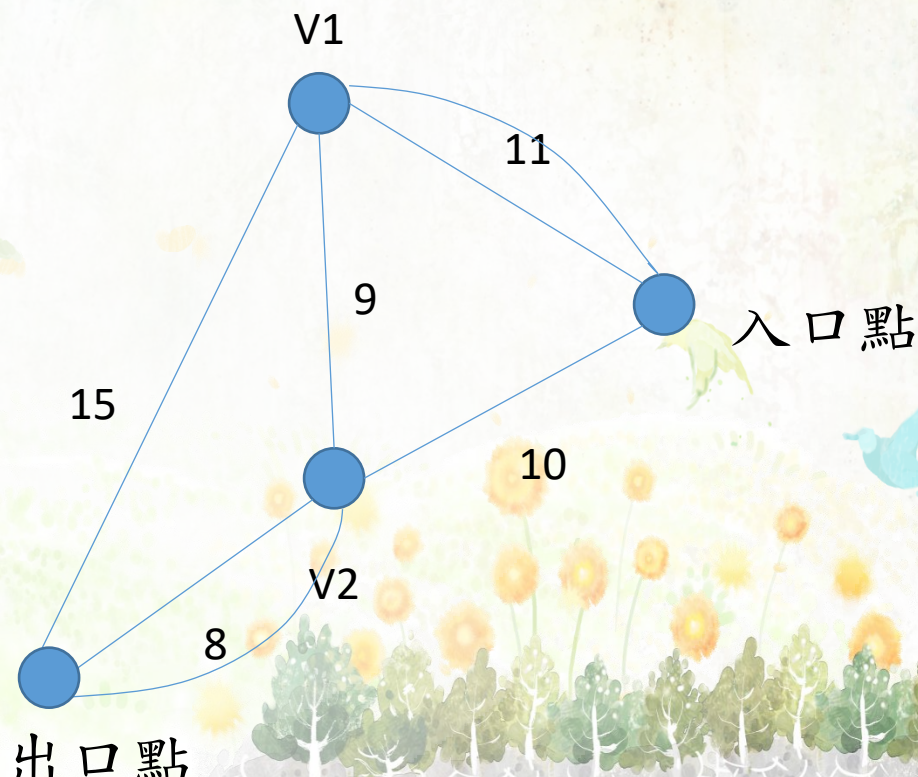
結束的地方一定要是出口點的話，需再走 $入口 \rightarrow V2 \rightarrow 出口點$ 才能出去，故總路徑成本為 $10+8+15+9+9+11+10+8=80$

✍ 研究設計與實施-問題釐清與思考

✍ 問題拆解：

☞ 若是選擇重複 $V1 \leftrightarrow$ 入口點與 $V2 \leftrightarrow$ 出口點，此時的總路徑成本為 $10+9+11+11+15+8+8=72 < 80$

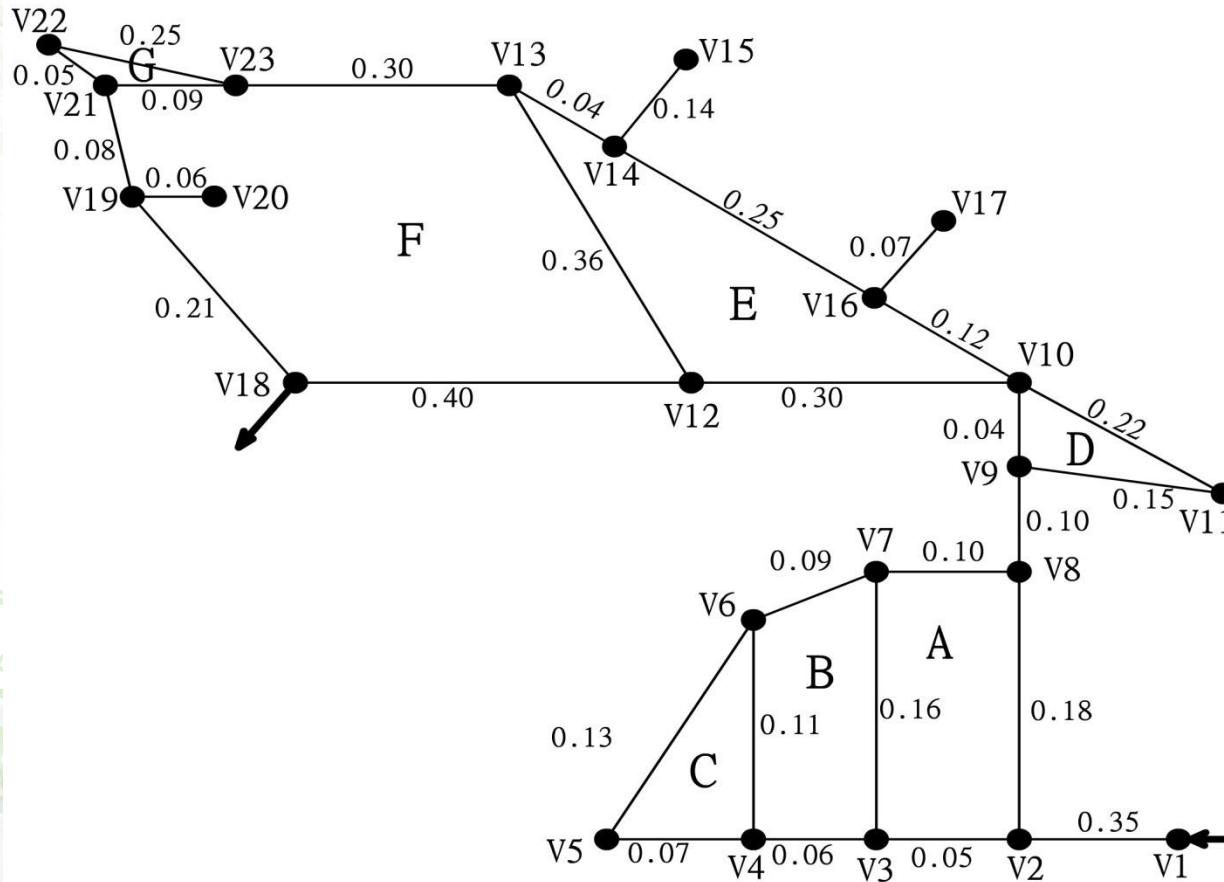
可知因為進出口的限制，
郵遞員問題解法未必能解決
我們的研究問題





研究設計與實施-解決方法

簡化圖形：




待解決的共用迴路：(A、B、C)與(E、F、G)



研究設計與實施-解決方法一

 結合歐拉迴路想法與郵遞員問題：

 歐拉迴路容許兩個奇數點在圖中，此時要一筆畫完成，這兩個奇數點必定是起始點和結束點。

 利用這個想法，結合郵遞員問題，對於進出點，我們這樣處理：

① 如果進出點是本身是奇數點，不列入郵遞員問題的路徑討論頂點，也就是說，保持原狀，不加重複的路徑。

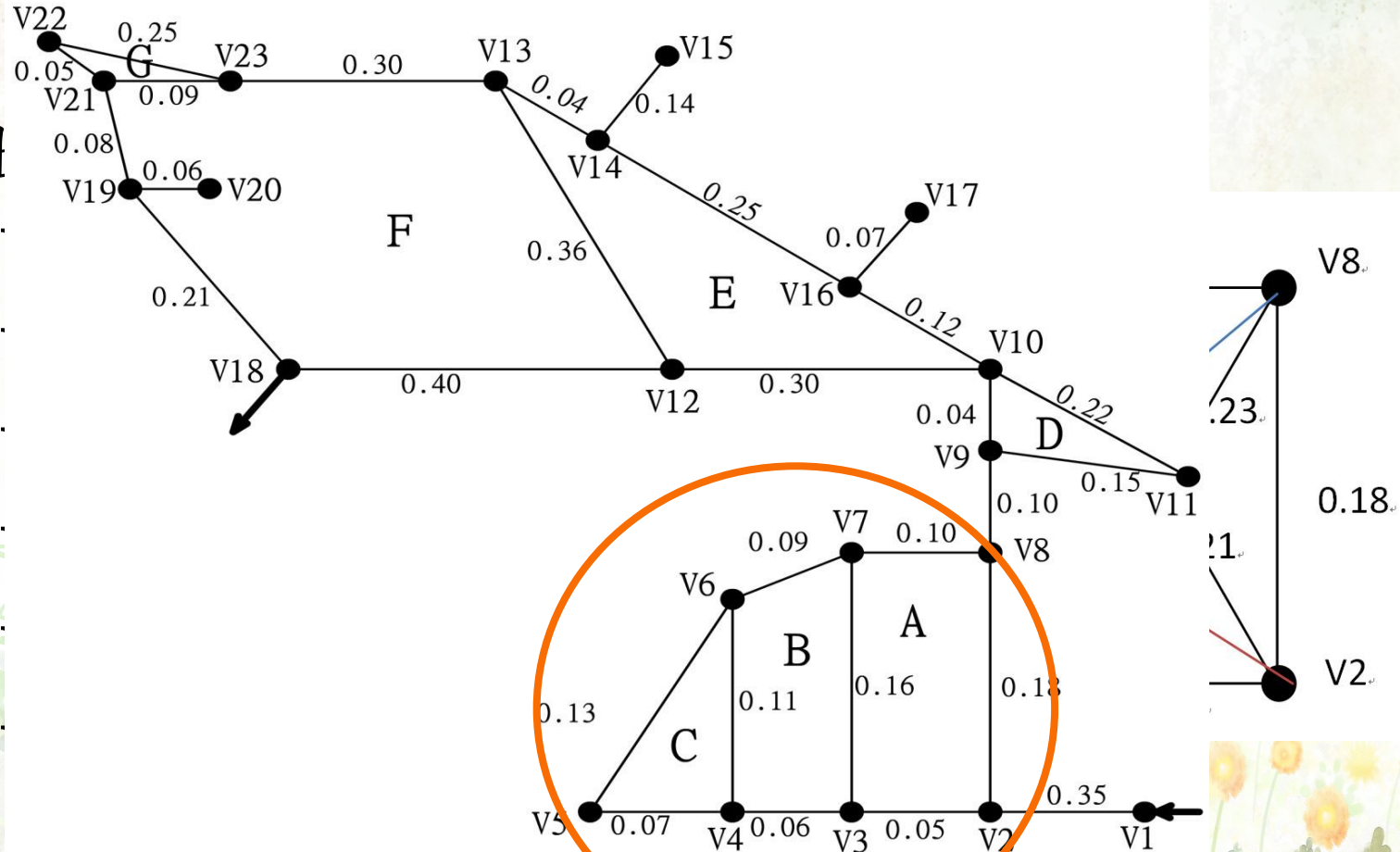
② 如果進入點或出口點本身是偶數點，以郵遞員問題加入重複路徑時，這個點也要列入討論。也就是說，一定要增加路徑變成奇數點（使之變成兩個奇點的歐拉迴路）。



研究設計與實施-解決方法一

郵遞員方法解ABC迴路：

列出





研究設計與實施-解決方法一

郵遞員方法解ABC迴路：

配對。	成本。
V2-V3、V4-V6、V7-V8。	0.26。
V2-V3、V4-V7、V6-V8。	0.44。
V2-V3、V4-V8、V6-V7。	0.43。
V2-V4、V3-V6、V7-V8。	0.38。
V2-V4、V3-V7、V6-V8。	0.46。
V2-V4、V3-V8、V6-V7。	0.43。
V2-V6、V3-V4、V7-V8。	0.38。
V2-V6、V3-V7、V4-V8。	0.67。
V2-V6、V3-V8、V4-V7。	0.65。
V2-V7、V3-V4、V6-V8。	0.46。
V2-V7、V3-V6、V4-V8。	0.67。
V2-V7、V3-V8、V4-V6。	0.55。
V2-V8、V3-V4、V6-V7。	0.33。
V2-V8、V3-V6、V4-V7。	0.55。
V2-V8、V3-V7、V4-V6。	0.45。

可看出V2-V3、V4-V6、V7-V8為最小成本，因此此三段路程需重複
解：V2-V8-V7-V3-V2-V3-V4-V6-V5-V4-V6-V7-V8→

總成本為原所有路徑加總+重複成本=0.95+0.26=1.21

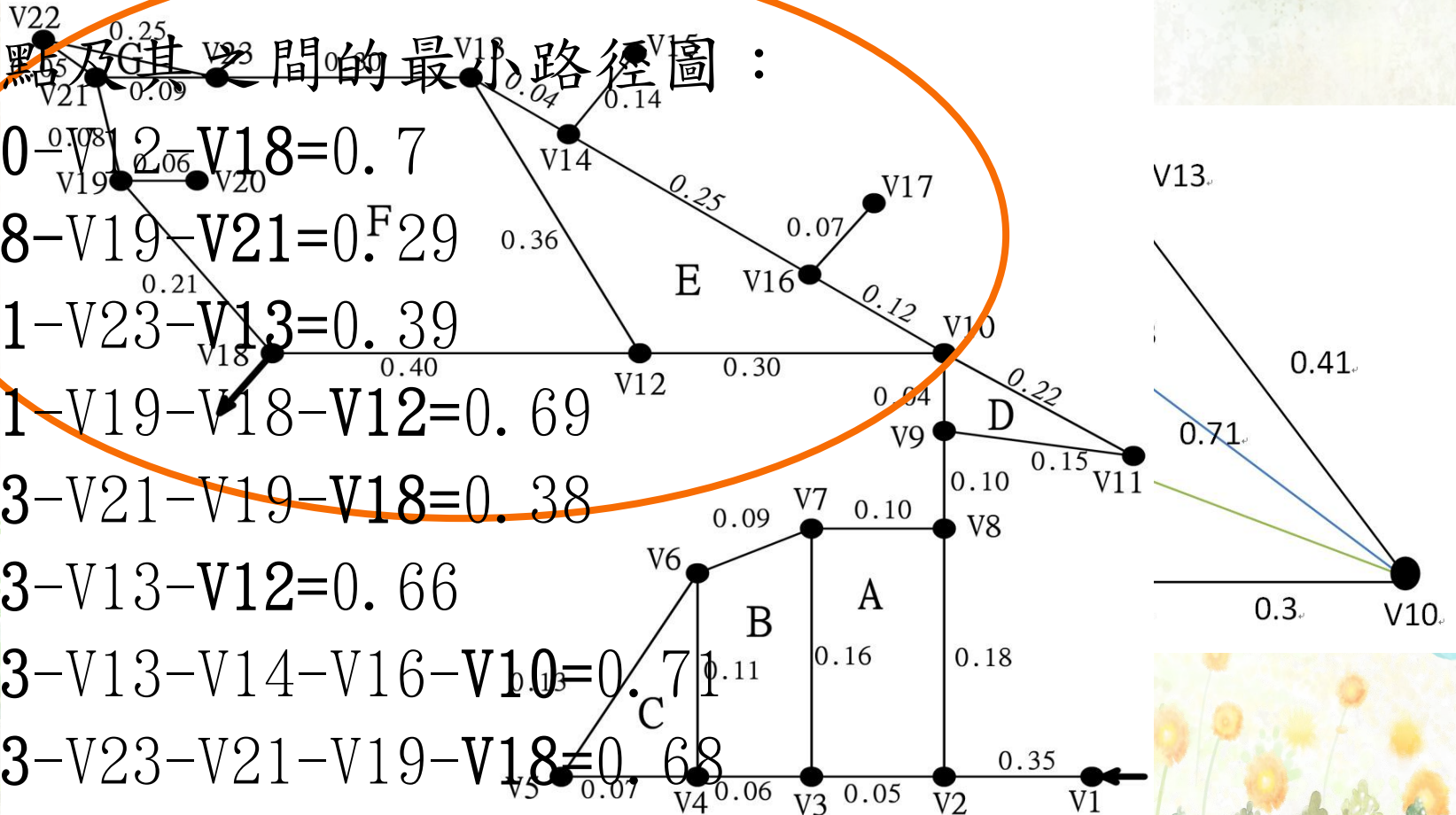


研究設計與實施-解決方法一

郵遞員方法解GEF迴路：

列出6點及其之間的最小路徑圖：

- ✍ V10-V12-V18=0.7
- ✍ V18-V19-V21=0.29
- ✍ V21-V23-V13=0.39
- ✍ V21-V19-V18-V12=0.69
- ✍ V23-V21-V19-V18=0.38
- ✍ V23-V13-V12=0.66
- ✍ V23-V13-V14-V16-V10=0.71
- ✍ V13-V23-V21-V19-V18=0.68
- ✍ V21-V23-V13-V14-V16-V10=0.8





研究設計與實施-解決方法一

郵遞員方法解GEF迴路：

V10-V12、V13-V23、
V18-V21為最小成
本，因此此三段路
程需重複

配對	成本
V10-V12、V13-V18、V21-V23	1.07
V10-V12、V13-V21、V18-V23	1.07
V10-V12、V13-V23、V18-V21	0.89
V10-V13、V12-V18、V21-V23	0.9
V10-V13、V12-V21、V18-V23	1.48
V10-V13、V12-V23、V18-V21	1.36
V10-V18、V12-V13、V21-V23	1.15
V10-V18、V12-V21、V13-V23	1.69
V10-V18、V12-V23、V13-V21	1.75
V10-V21、V12-V13、V18-V23	1.54
V10-V21、V12-V18、V13-V23	1.5
V10-V21、V12-V23、V13-V18	2.14
V10-V23、V12-V13、V18-V21	1.36
V10-V23、V12-V18、V13-V21	1.5
V10-V23、V12-V21、V13-V18	2.08

解：

V10-V16-V17-V16-V14-V15-V14-V13-V12-V18-V19-V20-V19-V21-V22-V2-

V13-V23-V21-V19-V18=>

總成本為原所有路徑加總+重複成本=2.72+(0.27+0.89)=3.88



研究設計與實施-解決方法一



總路徑：


$$\begin{aligned} &V1-V2+ABC迴圈+V8-V9+D迴圈+EFG迴圈 \\ &=0.35+1.21+0.1+0.45+3.88 \\ &=5.99(\text{Km}) < 6.16(\text{Km}, \text{原路徑長}) \end{aligned}$$



研究設計與實施-解決方法二

剔除最長路徑：

- (1) 找出要處理的端點，與這些端點中最長的路徑。
- (2) 任選路徑兩邊端點之一，找連接該點與其他待處理端點的最短路徑，重複該路徑。

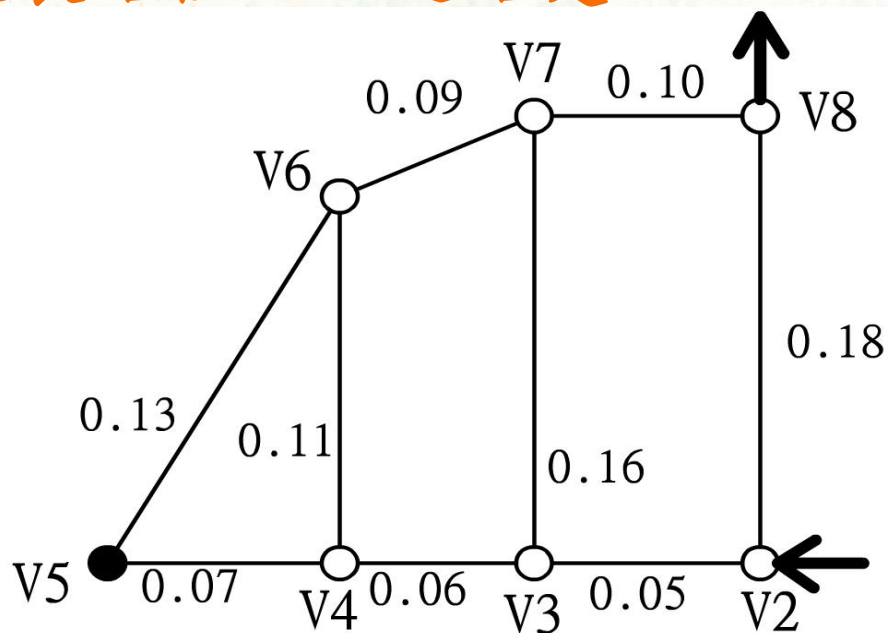
 重複(1)、(2)，直到只剩下兩個待處理端點，找尋這兩點的最短成本路徑後連接。



研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-ABC迴路處理：



將奇數點挑出來如圖，圖中○表示是待處理的頂點，●是已經處理好的頂點。



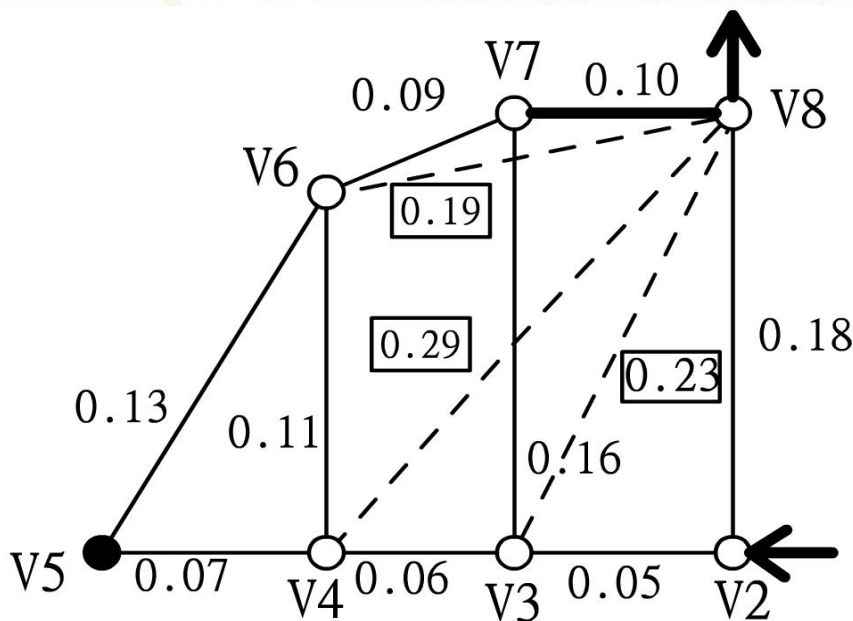
研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-ABC迴路處理：

因為最長路徑是 $V2 \leftrightarrow V8$ 的0.18，任選 $V2$ 或 $V8$ 處理，先選 $V8$ 。

計算 $V8$ 與所有待處理頂點連接路徑成本，發現 $V8 \leftrightarrow V7$ 的成本最低=0.10如下圖。粗實線部分將重複連接。



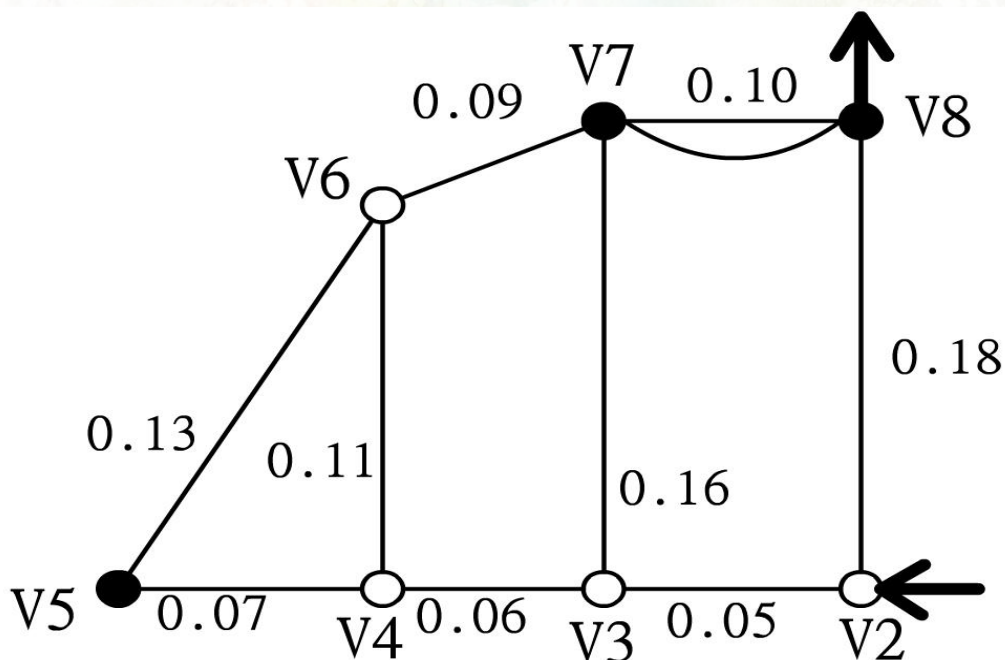


研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-ABC迴路處理：

重複連接V7 \leftrightarrow V8如下圖。



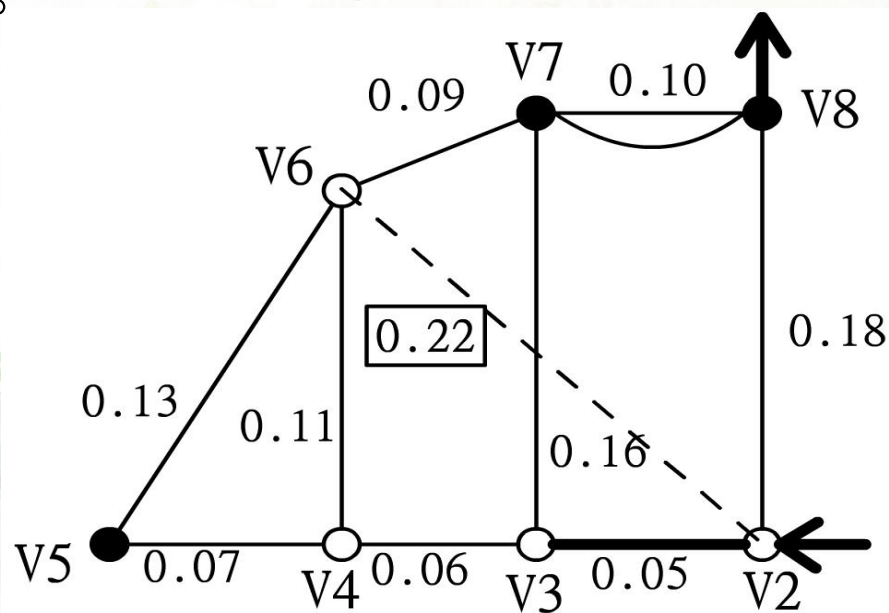


研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-ABC迴路處理：

待處理頂點連接的最長路徑，是V2連接的0.18，所以要處理V2頂點。處理結果如下圖，發現路徑成本V2 ↔ V3=0.05最小，粗實線部分將重複連接。



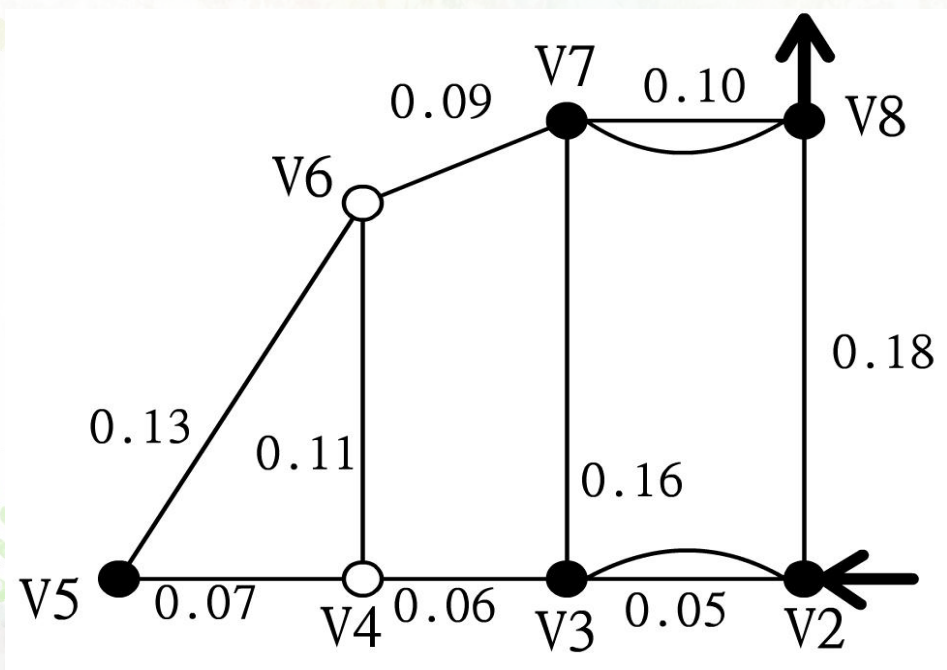


研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-ABC迴路處理：

重複連接 $V2 \leftrightarrow V3$ 如下圖。



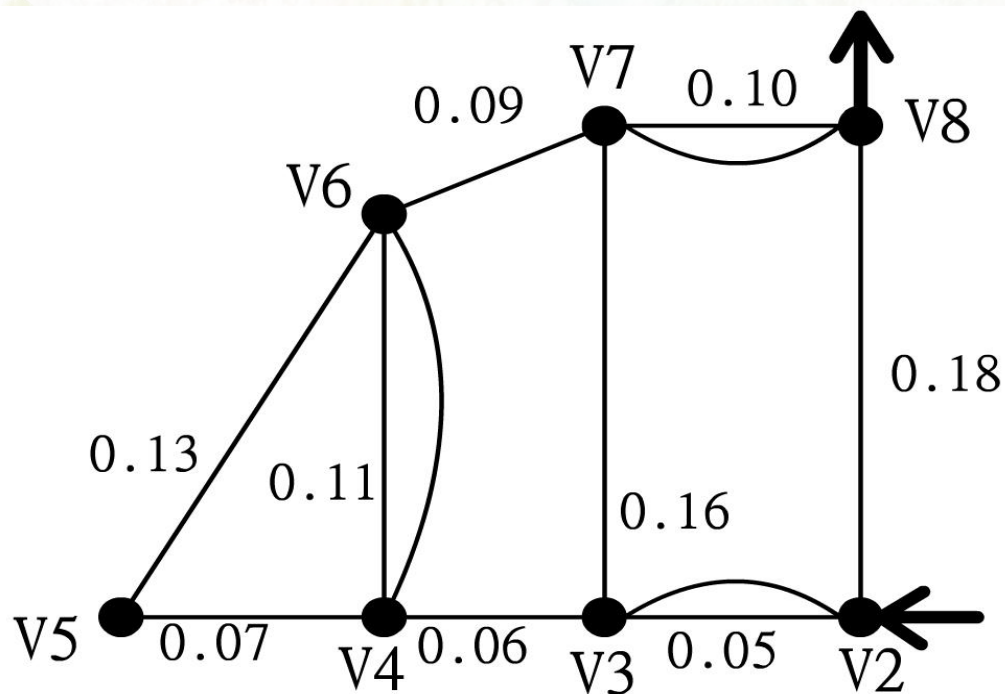


研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-ABC迴路處理：

因為只剩下V4、V6兩個待處理頂點，直接連接V4與V6如圖，就是最佳解。





研究設計與實施-解決方法二

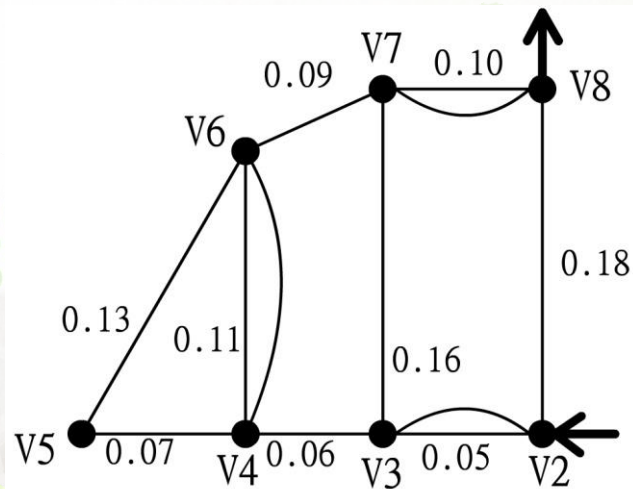


剔除最長路徑-ABC迴路處理：

全部處理完畢，路徑走法為

$V2 \rightarrow V3 \rightarrow V7 \rightarrow V8 \rightarrow V2 \rightarrow V3 \rightarrow V4 \rightarrow V5 \rightarrow V6 \rightarrow V4 \rightarrow V6$
 $\rightarrow V7 \rightarrow V8$ 。總長度為：

$0.05 + 0.16 + 0.10 + 0.18 + 0.05 + 0.06 + 0.07 + 0.13 + 0.11 + 0.11 + 0.09 + 0.10 = 1.21$ (Km)

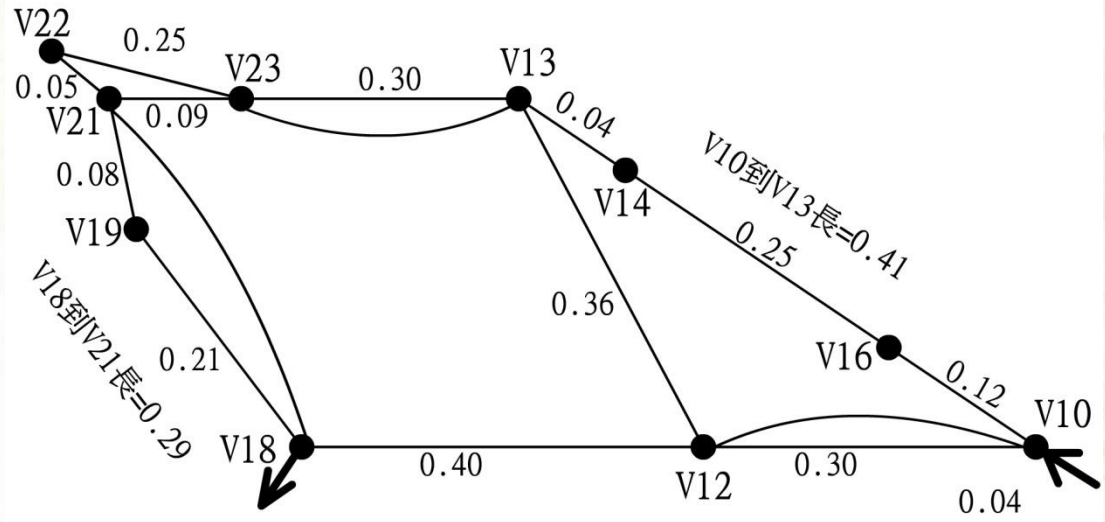




研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑-EFG迴路處理：



EFG處理方法相同，結果如圖。路徑走法為：

V10→V13→V12→V10→V12→V18→V21→V22→V23
→V13→V23→V21→V18。總長度為：

0.41+0.36+0.30+0.30+0.40+0.29+0.05+0.25+0.30
+0.30+0.09+0.29=3.34



研究設計與實施-解決方法二



剔除最長路徑：

總路徑成本為：

0.99(單一路徑總路徑成本)

+0.45(單一迴路D路徑成本)

+1.21(ABC迴路成本)

+3.34(EFG迴路成本)=5.99(Km)。

此結果與方法一相同。



參考資料

☞ 全球暖化示意圖－

攝影師：[Graphics Hub](#)，連結：[Pexels](#)

☞ 一筆畫問題－

維基百科 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9F%AF%E5%B0%BC%E6%96%AF%E5%A0%A1%E4%B8%83%E6%A1%A5%E9%97%AE%E9%A2%98>

☞ 郵遞員問題－

維基百科 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%82%AE%E9%80%92%E5%91%98%E9%97%AE%E9%A2%98>

☞ 吉安鄉宜昌村垃圾清運圖－

吉安鄉公所清潔隊網頁 <http://clean.ji-an.gov.tw/Introduction/Removal/>

謝謝欣賞

